УДК 513.88:517.5

Т. Г. МАЛАКСИАНО (Т. Г. РУДЕНСКАЯ)

ОБ УСЕЧЕННОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ ГАМБУРГЕРА

Известны [1] необходимые и достаточные условия того, что последовательность $\{S_k\}_0^{2n-2}$ линейных ограниченных самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, допускает представление вида

$$S_k = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k dE(\lambda) \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-2) \tag{1}$$

с некоторой спектральной функцией $E(\lambda)$.

В настоящей работе устанавливается критерий представимости последовательности $\{S_k\}_0^{2n-2}$ в более естественном* виде:

$$\begin{cases} S_k = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k dE(\lambda) \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-3) \\ S_{2n-2} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2n-2} dE(\lambda) + M, \end{cases} \tag{2}$$

где $E(\lambda)$ $(-\infty \leqslant \lambda \leqslant \infty)$ — некоторая спектральная функция; M — неотрицательный (может быть, нулевой) оператор в $\boldsymbol{H}$. Дается описание операторов M во всех возможных представлениях вида (2) последовательности $\{S_k\}_0^{2n-2}$ и среди всех таких операторов M находится максимальный оператор $M_{\max}$, т. е. такой, что для любого оператора M, входящего в какое-либо из представлений (2), справедливы неравенства $(Mf, f) \leqslant (M_{\max}f, f)\ \forall f \in \boldsymbol{H}$. Рассматривается вопрос существования представления (2) с наперед заданным оператором M, удовлетворяющим условию $0 \leqslant M \leqslant M_{\max}$.

---

* В скалярном случае естественность такого представления разъяснена в книге М. Г. Крейна и А. А. Нудельмана [2, гл. V].

1. **Теорема 1.** *Для того чтобы последовательность* $\{S_k\}_0^{2n-2}$ *линейных ограниченных самосопряженных операторов была представима в виде* (2) *с некоторой спектральной функцией* $E(\lambda)$ $(-\infty \leqslant \lambda \leqslant \infty)$ *и неотрицательным линейным ограниченным оператором* M, *необходимо и достаточно, чтобы действующий в пространстве* $\overset{n-1}{\underset{0}{\oplus}} \boldsymbol{H}$ *оператор*

$$H_{n-1} = \begin{bmatrix} S_0 & S_1 \dots S_{n-1} \\ S_1 & S_2 \dots S_n \\ \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n \dots S_{2n-2} \end{bmatrix}$$

был неотрицательным.

В основе доказательства теоремы лежит связь между тригонометрической и степенной проблемами моментов, в классическом случае установленная в [3, 4]. В [5] (см. п. 19.2—19.6) И. С. Иохвидов предложил доказательство основного свойства преобразования Фишера—Фробениуса, которое легко переносится на операторный случай. Именно, если в тождестве Фишера—Фробениуса

$$x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \dots + x_{n-1}\varepsilon^{n-1} \equiv$$
$$\equiv (a+\bar{a}\varepsilon)^{n-1} y_0 + (a+\bar{a}\varepsilon)^{n-2}(b+\bar{b}\varepsilon) y_1 + \dots + (b+\bar{b}\varepsilon)^{n-1} y_{n-1}, \qquad (\text{Ф.—Ф.})$$

x_i и y_i $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ понимать как координаты векторов $x = \langle x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\rangle$ и $y = \langle y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\rangle$ гильбертова пространства $\overset{n-1}{\underset{0}{\oplus}} \boldsymbol{H}$, то (Ф.—Ф.) при любых фиксированных a и b $(a\bar{b} - \bar{a}b \neq 0)$ определяет неособенное линейное преобразование пространства $\overset{n-1}{\underset{0}{\oplus}} \boldsymbol{H}$ на себя и обратное преобразование со следующими свойствами: любая эрмитова теплицева форма

$$\sum_{p,\, q=0}^{n-1} (C_{p-q} x_p,\ x_q) \qquad (3)$$

$(C_{-p} = C_p^*,\ C_p$ — линейные ограниченные операторы, $p = 0, 1, \dots, n-1)$ преобразуется в ганкелеву форму

$$\sum_{j,\, k=0}^{n-1} (S_{j+k} y_j,\ y_k) \quad (S_k = S_k^*,\ k = 0, 1, \dots, 2n-2). \qquad (4)$$

Всякая ганкелева форма (4) обратным преобразованием переводится в теплицеву форму (3). Теплицевы и ганкелевы формы, связанные между собой преобразованием Фишера—Фробениуса и обратным преобразованием, являются неотрицательными одновременно.

С другой стороны, теплицева форма (3) неотрицательна точно тогда, когда последовательность линейных ограниченных операторов $\{C_p\}_0^{n-1}$ является тригонометрической последовательностью моментов [1, теорема 4], т. е. допускает представление

$$C_p = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ip\lambda} dF(\lambda) \quad (p = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1), \tag{5}$$

где $F(\lambda)$ $(-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi)$ — некоторая спектральная функция. Подставляя интегральные представления (5) в соотношения, связывающие операторы $C_p\,(p = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$ и $S_k\,(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-2)$, получаем

$$S_{j+k} = \int_{-\pi}^{\pi} \omega_{j+k}(\lambda)\, dF(\lambda) \quad (j,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Можно показать, что при $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{i}{2}$ (преобразование Фишера)

$$\omega_k = (-1)^{2n-2-k} \cos^{2n-2-k} \frac{\lambda}{2} \cdot \sin^k \frac{\lambda}{2}\, (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-2),$$

а значит, для непрерывной справа спектральной функции $F(\lambda)$ имеем

$$S_k = \int_{-\pi+0}^{\pi-0} \left(-\operatorname{tg} \frac{\lambda}{2}\right)^k \cdot \cos^{2n-2} \frac{\lambda}{2}\, dF(\lambda) \ \ (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-3), \tag{6}$$

$$S_{2n-2} = \int_{-\pi+0}^{\pi-0} \operatorname{tg}^{2n-2} \frac{\lambda}{2} \cos^{2n-2} \frac{\lambda}{2}\, dF(\lambda) + M,$$

где $M = F(\pi) - F(\pi - 0)$ — неотрицательный оператор в $\boldsymbol{H}$.

Производя в равенствах (6) замену

$$t = -\operatorname{tg} \frac{\lambda}{2},\ \hat{E}(t) = F(\pi) - F(\lambda)$$

и вводя функцию

$$E(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{(1+u^2)^{n-1}} \cdot d\hat{E}(u),$$

которая является монотонно возрастающей, неотрицательной и непрерывной слева, приходим к представлению (2) операторной последовательности $\{S_k\}_0^{2n-2}$. Теорема доказана.

2. Пусть последовательность $\{S_k\}_0^{2n-2}$ допускает представление вида (2) с некоторым неотрицательным оператором M. Переходя к последовательности $\{S_0,\ S_1,\ \ldots,\ S_{2n-3},\ S_{2n-2} - M\}$ и используя теорему 1 из [1] и теорему 1.7 из [6], получаем следующий результат

Теорема 2. *Операторы M во всех возможных представлениях вида (2) последовательности $\{S_k\}_0^{2n-2}$ описываются формулой**

$$M = S_{2n-2} - A - \left| X K^{\frac{1}{2}} \right|^2,$$

где

$$A = \left| H_{n-2}^{-\frac{1}{2}} B_{n-2} \right|^2,$$

$$K = S_{2n-4} + A - \left| (H_{n-3} + L_{n-3})^{\frac{1}{2}} (B_{n-3} + D_{n-3}) \right|^2;$$

$$L_n = \begin{bmatrix} S_2 & S_3 & \dots S_{n+2} \\ S_3 & S_4 & \dots S_{n+3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n+2} & S_{n+3} & \dots S_{2n+2} \end{bmatrix}; \quad B_n = \begin{bmatrix} S_{n+1} \\ S_{n+2} \\ \vdots \\ S_{2n+1} \end{bmatrix}; \quad C_n = \begin{bmatrix} S_{n+2} \\ S_{n+3} \\ \vdots \\ S_{2n+2} \end{bmatrix};$$

$$D_n = \begin{bmatrix} S_{n+3} \\ S_{n+4} \\ \vdots \\ S_{2n+3} \end{bmatrix};$$

X — произвольный замкнутый оператор, удовлетворяющий неравенству

$$\left| X K^{\frac{1}{2}} \right|^2 \leqslant S_{2n-2} - A$$

(оператор в правой части последнего неравенства неотрицателен в силу неотрицательности оператора H_{n-1}).

Следствие. *Для любой последовательности, удовлетворяющей условиям теоремы 1, существует представление (2) с оператором*

$$M_{\max} = S_{2n-2} - \left| H_{n-2}^{\frac{1}{2}} B_{n-2} \right|^2, \tag{7}$$

который, очевидно, является максимальным из всех операторов M, входящих в какое-либо из представлений (2).

Замечание 1. Выражение (7) для оператора $M_{\max}$ можно получить непосредственно исходя из теоремы 1 и теоремы 1.7 из [6].

3. В скалярном случае условие строгой положительности вещественных квадратичных форм $\sum_{i,j=0}^{n-1} s_{i+j}\xi_i\xi_j$ является достаточным для того, чтобы вещественная числовая последовательность $\{s_k\}_0^{2n-2}$

---

* Здесь, как и в [1], $|T|^2 = T^*T$, а под оператором, обратным к действующему в H линейному ограниченному оператору T, понимается однозначно определенный оператор T^{-1} с областью определения $D(T^{-1}) = R(T)$ и такой, что $T^{-1}T = I - P$, где P — ортопроектор на ядро оператора T.

допускала представление вида $s_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^k d\sigma(\lambda)$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n - 2)$, где $\sigma(\lambda)$ — некоторая неубывающая на оси $(-\infty, \infty)$ функция.

Замечание 2. Для представимости последовательности линейных ограниченных самосопряженных операторов $\{S_k\}_0^{2n-2}$ в виде (1) с некоторой спектральной функцией $E(\lambda)$ $(-\infty \leqslant \lambda \leqslant \infty)$ условие строгой положительности форм $\sum\limits_{i,\,j=0}^{n-1} (S_{i+j}x_i, x_j)$ $\forall\, x_k \in \boldsymbol{H}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ (или, что одно и то же, условие строгой положительности оператора H_{n-1}) не является ни необходимым, ни достаточным.

Замечание 3. Из представимости последовательности $\{S_k\}_0^{2n-2}$ в виде (2) с оператором $M = 0 \left(S_{2n-2} \neq \left| H_{n-2}^{-\frac{1}{2}} B_{n-2} \right|^2\right)$, вообще говоря, не следует представимость этой последовательности в виде (2) с произвольным оператором M, $0 \leqslant M \leqslant M_{\max}$.

В случае равномерной положительности оператора H_{n-1} $\left(\text{это значит, что } \forall f \in \bigoplus\limits_0^{n-1} \boldsymbol{H},\ (H_{n-1}f, f) \geqslant \alpha(f, f),\ \alpha > 0\right)$ среди представлений (2) последовательности $\{S_k\}_0^{2n-2}$ всегда найдется такое, в котором $M = 0$. Более того, справедлива

Теорема 3. *Если $H_{n-1} \geqslant 0$ и оператор H_{n-2} равномерно положителен, то для каждого оператора M, удовлетворяющего условию $0 \leqslant M \leqslant M_{\max}$, найдется представление (2) последовательности $\{S_k\}_0^{2n-2}$ с этим M.*

Доказательство использует теорему 1 из [1], которую можно сформулировать так: последовательность $\{S_k\}_0^{2n-2}$ допускает представление вида (1) точно тогда, когда оператор H_{n-1} неотрицателен и оператор сдвига $S < f_0, \ldots, f_{n-2}, 0 > = < 0, f_0, \ldots, f_{n-2} >$ в пространстве $\left(\bigoplus\limits_0^{n-1} \boldsymbol{H}\right)_{H_{n-1}}$* является корректно определенным и замыкаемым.

Автор выражает глубокую благодарность М. Г. Крейну за предложенную тему и А. А. Нудельману за обсуждение результатов.

Список литературы: 1. *Ando T.* Truncated moment problems for operators.— «Acta, Sci. math.», 1970, vol. 31, N 3—4, p. 319—334. 2. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., «Наука», 1973. 552 с. 3. *Fisher E.* Uber das Caratheodory'sche Problem, Pofenzreihen mit positiven reelen Feil bettrefend, Rendiconti del Circolo Mat.

---

* Т. е. в пространстве $\bigoplus\limits_0^{n-1} \boldsymbol{H}$ со скалярным произведением, порожденным оператором H_{n-1}: $(\cdot,\cdot)_{H_{n-1}} = (H_{n-1}\cdot,\cdot)$.

di Palermo, XXXII, 1911, p. 240—256. 4. *Frobenius G.* Ableitung eines Sat es' von Caratheodory aus einer Formel von kronecker, Sit ungsber d. Konigl. Preuss'. Ak. d. Kiss., I Halbband, 1912, p. 16—31. 5. *Иохвидов И. С.* Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы. М., «Наука», 1974. 264 с. 6. *Шмульян Ю. Л.* Операторный интеграл Хеллингера и некоторые его приложения.— «Мат. сб.», 1959, т. 49 (91), № 4, с. 382—430.

Поступила 30 января 1975 г.