УДК 519.210 Ю. М. ДЮКАРЕВ

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ И АДДИТИВНЫЕ КЛАССЫ СТИЛТЬЕСА АНАЛИТИЧЕСКИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ. II

Настоящая статья является продолжением работы [1]. В ней используются некоторые результаты и обозначения из [1].

4°. Неравенства Шварца—Пика. Пусть матрица-функция $s(z)\in\in S$. Наряду с $s(z)$ будем рассматривать и матрицу-функцию $s_p(z)=z^{-1}s(z)$. По теореме 2.1 обе матрицы-функции $s(z)$ и $s_p(z)$ принадлежат классу N. Пусть далее точки $z_1, \ldots, z_n$ таковы, что $z_j\neq\bar{z}_k$ $(1\leqslant j,\ k\leqslant n)$ (это условие — общего положения). Неравенства Шварца—Пика для $s(z)$ и $s_p(z)$, связанные с точками $z_1, \ldots, z_n$, имеют вид [2, с. 84]

$$\left\{\frac{s^*(z_j)-s(z_k)}{\bar{z}_j-z_k}\right\}_{j,\ k=1}^{n}\geqslant 0, \tag{4.1}$$

$$\left\{\frac{-s_p^*(z_j)+s_p(z_k)}{\bar{z}_j-z_k}\right\}_{j,\ k=1}^{n}\geqslant 0. \tag{4.2}$$

Неравенства Шварца—Пика для матриц-функций класса W_s из неравенств (4.1), (4.2) получим, воспользовавшись дробно-линейным преобразованием, которое связывает классы W_s и S.

Пусть

$$\alpha=\begin{pmatrix}0&0\\0&I\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}0&I\\0&0\end{pmatrix},\ \gamma=\begin{pmatrix}0&0\\I&0\end{pmatrix},\ \delta=\begin{pmatrix}-I&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Здесь I — единичная матрица m-го порядка.

Дробно-линейное преобразование $s=(\alpha w+\beta)(\gamma w+\delta)^{-1}$ определено в точности для тех матриц $w=\{w_{jk}\}_{j,\ k=1}^{2}$ (здесь w_{jk} — $m\times\times m$-матрицы), у которых матрица $\gamma w+\delta$ невырождена. Для таких матриц условие $w^*J_Hw-J_H\geqslant 0$ эквивалентно условию $i(s^*-s)\geqslant 0$, а условие $w^*J_{\text{П}}w-J_{\text{П}}\geqslant 0$ эквивалентно условию $s^*++s\geqslant 0$. Это следует из равенств $i(s^*-s)=(\gamma w+\delta)^{-1*}(w^*J_Hw--J_H)(\gamma w+\delta)^{-1}$, $s^*+s=(\gamma w+\delta)^{-1*}(w^*J_{\text{П}}w-J_{\text{П}})(\gamma w+\delta)^{-1}$.

Нетрудно видеть, что матрица $\gamma w+\delta$ невырождена в точности тогда, когда блок w_{12} матрицы w невырожден.

Если $w(z)\in W_s$ и $\det w_{12}(z)\not\equiv 0$, то преобразование $s(z)==(\alpha w(z)+\beta)(\gamma w(z)+\delta)^{-1}$ (4.3) определено для всех $z\in C\diagdown(-\infty,0]$ за исключением некоторого множества изолированных точек. Эти точки для $s(z)$ являются устранимыми особенностями и, следовательно, можем считать $s(z)\in S$.

Наряду с $w(z)$ рассмотрим матрицу-функцию $w_p(z)=P(z)\times\times w(z)P^{-1}(z)$, где $P(z)=\begin{pmatrix}zI&0\\0&I\end{pmatrix}$.

Пусть

$$s_p(z)=(\alpha w_p(z)+\beta)(\gamma w_p(z)+\delta)^{-1}. \tag{4.4}$$

Заметим, что если определено преобразование (4.3), то определено и преобразование (4.4). Сравнивая (4.3) и (4.4) приходим к равенству $s_p(z) = z^{-1}s(z)$. По теореме 2.1 — $s_p(z) \in \boldsymbol{N}$.

Теорема 4.1. *Пусть точки* $z_1, \ldots, z_n$ *находятся в общем положении и не являются полюсами матрицы-функции* $w(z) \in \boldsymbol{W}_s$. *Имеют место следующие неравенства Шварца—Пика:*

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{w^*(z_1)J_Hw(z_1) - J_H}{i(\bar{z}_1 - z_1)} & \ldots & \dfrac{w^*(z_1)J_Hw(z_n) - J_H}{i(\bar{z}_1 - z_n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{w^*(z_n)J_Hw(z_1) - J_H}{i(\bar{z}_n - z_1)} & \ldots & \dfrac{w^*(z_n)J_Hw(z_n) - J_H}{i(\bar{z}_n - z_n)} \end{matrix}\right\} \geqslant 0, \qquad (4.5)$$

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{J_H - w_p^*(z_1)J_Hw_p(z_1)}{i(\bar{z}_1 - z_1)} & \ldots & \dfrac{J_H - w_p^*(z_1)J_Hw_p(z_n)}{i(\bar{z}_1 - z_n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{J_H - w_p^*(z_n)J_Hw_p(z_1)}{i(\bar{z}_n - z_1)} & \ldots & \dfrac{J_H - w_p^*(z_n)J_Hw_p(z_n)}{i(\bar{z}_n - z_n)} \end{matrix}\right\} \geqslant 0. \qquad (4.6)$$

Докажем эту теорему сначала при условии $\det w_{12}(z_j) \neq 0$, $0 \leqslant j \leqslant n$ **(4.7)**, а затем избавимся от него.

В силу (4.7) $\det w_{12}(z) \neq 0$ и, следовательно, найдены преобразования (4.3) и (4.4). Они определяют пару матриц-функций $s(z)$ и $s_p(z)$, для которых могут быть записаны неравенства (4.1), (4.2). Легко проверяемые равенства $i(s^*(z_j) - s(z_k)) = (\gamma w(z_j) + \delta)^{-1*}\{w^*(z_j)J_Hw(z_k) - J_H\}(\gamma w(z_k) + \delta)^{-1}$; $i(-s_p^*(z_j) + s_p(z_k) = (\gamma w_p(z_j) + \delta)^{-1*}\{J_H - w_p^*(z_j)J_Hw_p(z_k)\}(\gamma w_p(z_k) + \delta)^{-1}$ показывают, что для $w(z)$ выполнены неравенства (4.5), (4.6) при условии (4.7).

Ослабим теперь условие (4.7) до условия $\det w_{12}(z) \not\equiv 0$ **(4.8)**.

Пусть $z_1, \ldots, z_n$ произвольные точки общего положения, не являющиеся полюсами $w(z)$. Тогда существуют последовательности точек $z_1^l, \ldots, z_n^l$ такие, что

1. $z_j^l \to z_j$ $(l \to \infty)$, $1 \leqslant j \leqslant n$;
2. Для любых l и j выполняется условие $\det w_{12}(z_j^l) \neq 0$;
3. Точки z_j^l не являются полюсами матрицы-функции $w(z)$;
4. Точки $z_1^l, \ldots, z_n^l$ находятся в общем положении при всех l.

Таким образом, при всех l могут быть записаны неравенства Шварца—Пика, связанные с точками $z_1^l, \ldots, z_n^l$. Совершая в (4.5) и (4.6) предельный переход $z_j^l \to z_j$, получим неравенства Шварца—Пика при условии (4.8).

Избавимся теперь и от условия (4.8) «малым шевелением» $w(z)$ в классе $\boldsymbol{W}_s$.

Рассмотрим $w^\varepsilon(z) = \begin{pmatrix} I & \varepsilon I \\ 0 & I \end{pmatrix} w(z)$, $\varepsilon > 0$.

Очевидно, что $w^\varepsilon(z) \in W_s$. Пусть $\sigma > 0$. Из доказательства ниже леммы 4.1 $\det w_{22}(\sigma) \neq 0$. Отсюда вытекает, что $\det w_{12}^\varepsilon(\sigma) = \det(w_{12}(\sigma) + \varepsilon w_{22}(\sigma)) \neq 0$ для всех ε за исключением конечного числа. Таким образом, при малых $\varepsilon > 0$ матрица-функция $w^\varepsilon(z)$ удовлетворяет условию (4.8). Записав неравенства Шварца—Пика (4.3) и (4.4) для $w^\varepsilon(z)$, и совершая в них предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получаем неравенства (4.5) и (4.6) для матрицы-функции $w(z)$.

Теорема 4.1 доказана.

Лемма 4.1. *Если* $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (a, b, c, d — $m \times m$ *матрицы*) — *постоянная матрица класса* W_s, *то матрицы* a *и* d *невырождены.*

Доказательство. Имеем

$$L^* J_H L - J_H = i \begin{pmatrix} c^*a - a^*c & c^*b - a^*d + I \\ d^*a - b^*c - I & d^*b - b^*d \end{pmatrix} = 0; \qquad (4.9)$$

$$L^* J_{\text{П}} L - J_{\text{П}} = \begin{pmatrix} c^*a + a^*c & c^*b + a^*d - I \\ d^*a + b^*c - I & d^*b + b^*d \end{pmatrix} \geqslant 0. \qquad (4.10)$$

В силу (4.9) неравенство (4.10) записывается в виде

$$\begin{pmatrix} c^*a & c^*b \\ b^*c & b^*d \end{pmatrix} \geqslant 0. \qquad (4.11)$$

Рассмотрим квадратичную форму, порожденную матрицей из (4.11),

$$Q(x, y) = (x^*, y^*) \begin{pmatrix} c^*a & c^*b \\ b^*c & b^*d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geqslant 0, \qquad (4.12)$$

где x и y — m-мерные векторы-столбцы.

Допустим, что a вырождена. Тогда существует вектор $x_0 \neq 0$ такой, что $ax_0 = 0$. Рассматривая форму Q на векторе $\begin{pmatrix} \lambda x_0 \\ y \end{pmatrix}$, где λ — произвольное комплексное число, получаем $2 \operatorname{Re} \lambda y^* b^* c x_0 + y^* b^* d y \geqslant 0$.

В силу произвольности λ и y $b^* c x_0 = 0$ **(4.13)** имеют место равенства

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_0 \\ cx_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ cx_0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a^*c^* \\ b^*d^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cx_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^*cx_0 \\ b^*cx_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^*ax_0 \\ b^*cx_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b^*cx_0 \end{pmatrix}.$$

Матрица L невырождена (она J_H-унитарна). Но тогда из первого равенства вытекает, что $cx_0 \neq 0$, а из второго — что $b^*cx_0 \neq 0$. А это противоречит (4.13). Итак, a невырождена. Аналогично доказывается невырожденность d. Лемма 4.1 доказана.

В дальнейшем важна следующая модификация неравенств (4.5), (4.6). Запишем их для «фиксированных» точек общего положения $\mu_1, \ldots, \mu_n$ и «текущей» точки $\bar{z}$. Преобразуя $w(\bar{z})$ по принципу симметрии $w(\bar z) = J_H w^{-1*}(z) J_H$, и умножая (4.3) слева на T, а справа на T^* где

$$T^* = \begin{pmatrix} I_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & I_2 & \\ & & & J_H w^*(z) \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

приходим к неравенству

$$\left(\begin{array}{c|c} \left\{\dfrac{w^*(\mu_j) J_H w(\mu_k) - J_H}{i(\bar\mu_j - \mu_k)}\right\}_{j,\,k=1}^{n} & \begin{array}{c} \dfrac{w^*(\mu_1) - w^*(z)}{i(\bar\mu_1 - \bar z)} \\ \dfrac{w^*(\mu_n) - w^*(z)}{i(\bar\mu_n - \bar z)} \end{array} \\ \hline * & \dfrac{w(z) J_H w^*(z) - J_H}{i(\bar z - z)} \end{array}\right) \geqslant 0. \qquad (4.14)$$

Аналогичные выкладки для $w_p(z)$ приводят к неравенству

$$\left(\begin{array}{c|c} \left\{\dfrac{J_H - w_p^*(\mu_j) J_H w_p(\mu_k)}{i(\bar\mu_j - \mu_k)}\right\}_{j,\,k=1}^{n} & \begin{array}{c} \dfrac{w_p^*(z) - w_p^*(\mu_1)}{i(\bar\mu_1 - \bar z)} \\ \dfrac{w_p^*(z) - w_p^*(\mu_n)}{i(\bar\mu_n - \bar z)} \end{array} \\ \hline * & \dfrac{J_H - w_p(z) J_H w_p^*(z)}{i(\bar z - z)} \end{array}\right) \geqslant 0. \qquad (4.15)$$

Имеют место и дуальные неравенства

$$\left(\begin{array}{c|c} \left\{\dfrac{w(\mu_j) J_H w^*(\mu_k) - J_H}{i(\bar\mu_k - \mu_j)}\right\}_{j,\,k=1}^{n} & \begin{array}{c} \dfrac{w(\mu_1) - w(z)}{i(z - \mu_1)} \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{w(\mu_n) - w(z)}{i(z - \mu_n)} \end{array} \\ \hline * & \dfrac{w^*(z) J_H w(z) - J_H}{i(\bar z - z)} \end{array}\right) \geqslant 0, \qquad (4.14')$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \left\{\dfrac{J_H - w_p(\mu_j) J_H w_p^*(\mu_k)}{i(\bar\mu_k - \mu_j)}\right\}_{j,\,k=1}^{n} & \begin{array}{c} \dfrac{w_p(z) - w_p(\mu_1)}{i(z - \mu_1)} \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{w_p(z) - w_p(\mu_n)}{i(z - \mu_n)} \end{array} \\ \hline * & \dfrac{J_H - w_p^*(z) J_H w_p(z)}{i(\bar z - z)} \end{array}\right) \geqslant 0. \qquad (4.15')$$

Они становятся очевидными после соответствующей перестройки неравенств (4.1), (4.2) и преобразования (4.3).

5°. Неравенства отщепления.

Неравенства Шварца—Пика (4.14) и (4.15) отражают ограничения, которые накладываются на значения $w(z)$ в точках

$\mu_1, \ldots, \mu_n$, z и обусловлены принадлежностью $w(z)$ к классу W_s. Исходя из этих неравенств получаем сейчас ограничения на значения $w(z)$ при заданном поведении в полюсах, так называемые неравенства отщепления.

Итак, пусть $w(z) \in W_s$ и точки $z_1, \ldots, z_n$ принадлежат множеству ее полюсов[1]. Будем считать, что эти точки находятся в общем положении, а соответствующие лорановские разложения имеют вид $w(z) = 2\tau_k c_k (z - z_k)^{-s_k} + b_k (z - z_k)^{-s_k+1} + \cdots$ **(5.1)**, где $\tau_k = \operatorname{Im} z_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Пусть далее μ_k попадают в такие окрестности точек z_k, где справедливы представления (5.1). Тогда $w(\mu_k) = 2\tau_k c_k (\mu_k - z_k)^{-s_k} + b_k (\mu_k - z_k)^{-s_k+1} + \cdots$.

Подставим эти представления в неравенство (4.14) и умножим слева на T_1, а справа на T_1^*, где

$$T_1 = \begin{pmatrix} (\bar\mu_1 - \bar z_1)^{s_1} I_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & (\bar\mu_n - \bar z_n)^{s_n} I_2 & \\ & & & I_2 \end{pmatrix}.$$

Перейдем к пределу при $\mu_k \to z_k$ и получим неравенство

$$\left(\begin{array}{c|c} \left\{\dfrac{4\tau_j\tau_k c_j^* J_H c_k}{i(\bar z_j - z_k)}\right\}_{j,k=1}^n & \begin{matrix} \dfrac{2\tau_1 c_1^*}{i(\bar z - \bar z)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{2\tau_n c_n^*}{i(\bar z_n - \bar z)} \end{matrix} \\ \hline * & \dfrac{w(z) J_H w^*(z) - J_H}{i(\bar z - z)} \end{array}\right) \geqslant 0. \qquad (5.2)$$

Далее рассмотрим $w_p(z)$. В соответствии с (5.1) она в окрестности z_k допускает представление $w_p(z) = 2\tau_k c_{k,p} (z - z_k)^{-s_k} + b_{k,p} (z - z_k)^{-s_k+1} + \cdots$, где $c_{p,k} = P(z_k) c_k P^{-1}(z_k)$.

Проделав с $w_p(z)$ такие же выкладки, как и при получении неравенства (5.2), запишем

$$\left(\begin{array}{c|c} \left\{\dfrac{-4\tau_j\tau_k c_{j,p}^* J_H c_{k,p}}{i(\bar z_j - z_k)}\right\}_{j,k=1}^n & \begin{matrix} \dfrac{-2\tau_1 c_{1,p}^*}{i(\bar z_1 - \bar z)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{-2\tau_n c_{n,p}^*}{i(\bar z_n - \bar z)} \end{matrix} \\ \hline * & \dfrac{J_H - w_p(z) J_H w_p^*(z)}{i(\bar z - z)} \end{array}\right) \geqslant 0. \qquad (5.3)$$

[1] Функция $w(z)$ может иметь и иные полюсы в $C \setminus (-\infty, 0)$, а также иные особенности на $[-\infty, 0]$.

Пара неравенств (5.2) и (5.3) называются парой основных матричных неравенств отщепления.

Нетрудно убедиться в том, что имеет место и дуальная пара основных матричных неравенств отщепления:

$$\left(\begin{array}{c|c} \left\{\dfrac{4\tau_j\tau_k c_j J_H c_k^*}{i(\bar{z}_k - z_j)}\right\}_{j,k=1}^{n} & \begin{matrix} \dfrac{2\tau_1 c_1}{i(z-z_1)} \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{2\tau_n c_n}{i(z-z_n)} \end{matrix} \\ \hline * & \dfrac{w^*(z) J_H w(z) - J_H}{i(\bar{z}-z)} \end{array}\right) \geqslant 0, \qquad (5.2')$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \left\{\dfrac{-4\tau_j\tau_k c_{j,p} J_H c_{k,p}^*}{i(\bar{z}_k - z_j)}\right\}_{j,k=1}^{n} & \begin{matrix} \dfrac{-2\tau_1 c_{1,p}}{i(z-z_1)} \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{-2\tau_n c_{n,p}}{i(z-z_n)} \end{matrix} \\ \hline * & \dfrac{J_H - w_p^*(z) J_H w_p(z)}{i(\bar{z}-z)} \end{array}\right) \geqslant 0. \qquad (5.3')$$

Пары основных матричных неравенств отщепления были получены при условии, что точки $z_1, \ldots, z_n$ находятся в общем положении. Если это условие нарушается, т. е. при некоторых j и k имеет место равенство $z_j = \bar{z}_k$ или $z_j = \infty$ для некоторых j, то неравенства Шварца—Пика теряют смысл. Однако принадлежность матрицы-функции к классу W_s и в этих случаях приводит к некоторым аналогам неравенств отщепления. Рассмотрим некоторые случаи особого расположения полюсов.

А). Случай полюса на вещественной оси в точке $\sigma \neq 0$.

Пусть $w(z) \in W_s$ и имеет в точке $\sigma = \bar{\sigma}$, $\sigma \neq 0$ полюс[1] со следующим разложением в ряд Лорана:

$$w(z) = c(z-\sigma)^{-s} + b(z-\sigma)^{-s+1} + o(z-\sigma)^{-s+1}, \qquad (5.4)$$

где $c = \{c_{jk}\}_{j,k=1}^{2}$, $b = \{b_{jk}\}_{j,k=1}^{2}$, c_{jk}, b_{jk} — $m \times m$-матрицы.

---

[1] Если $\sigma > 0$, то функция $w(z)$, по определению класса W_s, может иметь в точке σ лишь изолированную особенность, необходимо являющуюся полюсом. Если же $\sigma < 0$, то подразумевается, что $w(z)$ аналитична в окрестности точки σ. Впрочем, неравенства отщепления справедливы даже и тогда, когда (5.4) является не лорановским разложением, а лишь асимптотическим соотношением, имеющим место, когда $z \to \sigma$ по некоторому множеству точек из $C \setminus (-\infty, 0]$. Это замечание относится и к другим случаям расположения «полюса» на $[-\infty, 0]$.

Имеет место следующая пара основных матричных неравенств отщепления

$$\left[\begin{array}{c|c} ic^*J_Hb & \dfrac{c^*}{i(\sigma-z)} \\ \hline * & \dfrac{wJ_Hw^*-J_H}{i(\bar{z}-z)} \end{array}\right] \geqslant 0; \quad \left[\begin{array}{c|c} -ic_p^*J_Hb_p & \dfrac{-c_p^*}{i(\sigma-z)} \\ \hline * & \dfrac{J_H-w_pJ_Hw_p^*}{i(\bar{z}-z)} \end{array}\right] \geqslant 0. \tag{5.5}$$

При этом $c^*J_Hc=0$ **(5.6)**. Здесь $c_p=\begin{pmatrix} c_{11} & \sigma c_{21} \\ \sigma^{-1}c_{21} & c_{21} \end{pmatrix}$; $b_p = \begin{pmatrix} b_{11} & \sigma b_{12}+c_{12} \\ \sigma^{-1}b_{21}-\sigma^{-2}c_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

Докажем первое из неравенств (5.5) и равенство (5.6). По принципу симметрии $w^{-1}(z)=J_Hc^*J_H(z-\sigma)^{-s}+J_Hb^*J_H(z-\sigma)^{-s+1}+o((z-\sigma)^{-s+1})$.

Из равенства $w^{-1}(z)w(z)=I_2$ вытекает, что $c^*J_Hc=0$, $c^*J_Hb+b^*J_Hc=0$ доказано равенство (5.6).

С учетом этих равенств

$$\frac{w^*(\mu)J_Hw(\mu)-J_H}{i(\bar{\mu}-\mu)}=\frac{i\,c^*J_Hb}{(\mu-\sigma)^s(\bar{\mu}-\sigma)^s}+o(|\mu-\sigma|^{2s}). \tag{5.7}$$

Здесь $\mu\neq\bar{\mu}$ и μ принадлежит той окрестности σ, в которой справедливо представление (5.4).

Теперь запишем неравенство Шварца—Пика (4.14) для двух точек μ и z. Подставим в это неравенство представления (5.4) и (5.7), и умножим его слева на T_1, а справа на T_1^*, где $T_1 = \begin{pmatrix} (\bar{\mu}-\sigma)^sI_2 & \\ & I_2 \end{pmatrix}$.

Предельный переход при $\mu\to\sigma$ приводит к первому из неравенств (5.5).

Второе неравенство из (5.5) доказывается аналогичным способом.

Может быть и дуальный вариант пары основных матричных неравенств отщепления

$$\left[\begin{array}{c|c} -icJ_Hb^* & \dfrac{-c}{i(\sigma-z)} \\ \hline * & \dfrac{w^*J_Hw-J_H}{i(\bar{z}-z)} \end{array}\right] \geqslant 0, \quad \left[\begin{array}{c|c} ic_pJ_Hb_p^* & \dfrac{c_p}{i(\sigma-z)} \\ \hline * & \dfrac{J_H-w_p^*J_Hw_p}{i(\bar{z}-z)} \end{array}\right] \geqslant 0. \tag{5.5'}$$

При этом $cJ_Hc^*=0$ **(5.6′)**. В). Случай полюса в точке $\sigma=0$.

Пусть $w(z)\in W_s$ и имеет в точке $\sigma=0$ полюс со следующим лорановским разложением (см. подстрочное примеч. на с. 45): $w(z)=cz^{-s}+bz^{-s+1}+o(z^{-s+1})$ **(5.9)**.

Тогда имеет место следующая пара основных матричных неравенств отщепления:

$$\left[\begin{array}{c|c} ic^*J_Hb & \dfrac{ic^*}{\bar{z}} \\ \hline * & \dfrac{wJ_Hw^*-J_H}{i(\bar{z}-z)} \end{array}\right] \geqslant 0, \quad \left[\begin{array}{c|c} -ic_p^{0*}J_Hb_p^0 & \dfrac{-ic_p^{0*}}{\bar{z}} \\ \hline * & \dfrac{J_H-w_pJ_Hw_p^*}{i(\bar{z}-z)} \end{array}\right] \geqslant 0. \tag{5.10}$$

При этом $c^*J_Hc=0$ **(5.11)**.

Здесь $c_p^0=\begin{pmatrix}0 & 0\\ c_{21} & 0\end{pmatrix}$, $b_p^0=\begin{pmatrix}c_{11} & 0\\ b_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$.

Неравенства (5.10) и равенство (5.11) доказываются так же, как и неравенства (5.5) и равенство (5.6). Отметим лишь тот факт, что в соответствии с (5.9) матрица-функция $w_p(z)$ в окрестности точки $\sigma=0$ допускает следующее представление: $w_p(z)=$ $=c_p^0z^{-s-1}+b_p^0z^{-s}+o(z^{-s})$ **(5.12)**.

Может быть и дуальный вариант пары основных матричных неравенств отщепления

$$\left[\begin{array}{c|c} -icJ_Hb^* & \dfrac{-ic}{z} \\ \hline * & \dfrac{w^*J_Hw-J_H}{i(\bar{z}-z)} \end{array}\right] \geqslant 0, \quad \left[\begin{array}{c|c} ic_p^0J_Hb_p^{0*} & \dfrac{ic_p^0}{z} \\ \hline * & \dfrac{J_H-w_p^*J_Hw_p}{i(\bar{z}-z)} \end{array}\right] \geqslant 0. \tag{5.10'}$$

При этом $cJ_Hc^*=0$ **(5.11′)**.

C). Случай полюса в точке $\sigma=\infty$.

Пусть $w(z)\in W_s$ и имеет в точке $\sigma=\infty$ полюс со следующим лорановским разложением (см. подстрочное примечание на с. 45) $w(z)=cz^s+bz^{s-1}+o(z^{s-1})$ **(5.13)**.

Имеет место следующая пара основных матричных неравенств отщепления:

$$\left[\begin{array}{c|c} -ic^*J_Hb & -ic^* \\ \hline * & \dfrac{wJ_Hw^*-J_H}{i(\bar{z}-z)} \end{array}\right] \geqslant 0, \quad \left[\begin{array}{c|c} ic_p^{\infty *}J_Hb_p^{\infty} & ic_p^{\infty *} \\ \hline * & \dfrac{J_H-w_pJ_Hw_p^*}{i(\bar{z}-z)} \end{array}\right] \geqslant 0. \tag{5.14}$$

При этом $c^*J_Hc=0$ **(5.15)**.

Здесь $c_p^{\infty}=\begin{pmatrix}0 & c_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $b_p^{\infty}=\begin{pmatrix}c_{11} & b_{12}\\ 0 & c_{22}\end{pmatrix}$.

Доказательства этих неравенств и равенств аналогичны тем, что приведены в пункте A). Отметим лишь тот факт, что в соответствии с (5.13) $w_p(z)$ допускает представление $w_p(z)=$ $=c_p^{\infty}z^{s+1}+b_p^{\infty}z^s+o(z^s)$ **(5.16)**.

Имеет место и дуальный вариант пары основных матричных неравенств отщепления

$$\left[\begin{array}{c|c} icJ_Hb^* & ic \\ \hline * & \dfrac{w^*J_Hw - J_H}{i(\bar{z}-z)} \end{array}\right] \geqslant 0, \left[\begin{array}{c|c} -ic_p^\infty J_{\text{н}} b_p^{\infty *} & -ic_p^\infty \\ \hline * & \dfrac{J_{\text{н}} - w_p^* J_{\text{н}} w_p}{i(\bar{z}-z)} \end{array}\right] \geqslant 0. \quad (5.14')$$

При этом $cJ_{\text{н}}c^* = 0$ **(5.15′)**.

Список литературы: 1. *Дюкарев Ю. М., Кацнельсон В. Э.* Мультипликативные и аддитивные классы Стилтьеса аналитических матриц-функций и связанные с ними интерполяционные задачи. I.— Теория функций, функц. анализ и их прил., 1981, вып. 36, с. 13. 2. *Ефимов А. В., Потапов В. П.* J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей.— Усп. мат. наук, 1973, **26**, вып. 1(169), с. 65—130.

Поступила в редколлегию 30.09.80.