УДК 517.9

А. А. МАКАРОВ

КЛАССЫ КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В СВЕРТКАХ

Исследуется корректная разрешимость следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = A(x) * u(x, t), \quad x \in R^m, \ t \in [0; T], \tag{1}$$

$$\int_0^T dM(t)\, B(x, t) * u(x, t) = \varphi(x), \tag{2}$$

где $A(x)$ и $B(x, t)$ — матрицы размеров $n \times n$, элементами которых являются обобщенные функции с компактным носителем, причем $B(x, t)$ непрерывно зависит от t в топологии K' (см. [1]); $M(t)$ — матрица размеров $n \times n$, состоящая из комплекснозначных функций ограниченной вариации на $[0; T]$; $u(x, t)$ и $\varphi(x)$ — достаточно гладкие вектор-функции. Свертка понимается в смысле свертки основной и обобщенной функций, причем в качестве основных функций будут использоваться убывающие и растущие функции.

Мы говорим, что задача (1)—(2) корректно разрешима из топологического пространства F_1 в $F_2 (F_1 \subset F_2)$ если 1) для любой $\varphi_1(x) \in F_1$ существует решение $u(x, t) \in F_2$ ($\forall t \in [0; T]$); 2) такое решение единственно; 3) $u(x, t)$ непрерывно зависит от $\varphi(x)$.

Классы корректной разрешимости задачи (1)—(2) определяются поведением на бесконечности собственных значений матрицы $\widetilde{A}(s)$ и целой функции $\Delta(s) = \det \int_0^T dM(t)\, \widetilde{B}(s, t) \exp t\widetilde{A}(s)$, где $\widetilde{A}(s)$ и $\widetilde{B}(s, t)$ — преобразования Фурье (в смысле обобщенных функций [1]) от $A(x)$ и $B(x, t)$.

Нам понадобятся пространства, введенные в работе [2]. Пусть $l(t)$ — непрерывная положительная возрастающая функция, определенная на $(0; \infty)$ и удовлетворяющая следующим условиям: 1) $\exists a, b, c, \forall t_1, t_2$: $l(t_1+t_2) < l(t_1) + l(t_2) + at_1 + bt_2 + c$; 2) $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{t}{l(t)} = 0$. Пространство $W_{l,\alpha}^N$ состоит из N раз дифференцируемых функций, удовлетворяющих неравенствам

$$\exists \delta_\varphi > 0, \ \forall k: |k| \leqslant N: \ |D^k\varphi(x)| < C_k \exp l((\alpha - \delta_\varphi)|x|),$$

где $k = (k_1, \ldots, k_m)$ — мультииндекс. Топология в $W_{l,\alpha}^N$ задается равномерной сходимостью на компактах и равномерными оценками.

Пространство $W_{l,\alpha}^\infty$ определяется как проективный предел пространств $W_{l,\alpha}^N$, т. е. $W_{l,\alpha}^\infty = \bigcap\limits_N W_{l,\alpha}^N$.

В работе [2] описано кольцо свертывателей в пространстве $W_{l,\alpha}^\infty$ и доказано, что преобразования Фурье свертывателей являются целыми функциями, удовлетворяющими оценке

$$\exists p, \ \forall \rho > 0, \ \exists C_\rho: |\psi(s)| < C_\rho (1 + |s|)^p \exp l^*\left(\left(\frac{1}{\alpha} + \rho\right) |\operatorname{Im} s|\right),$$

где $l^*(\tau)$ — сопряженная по Юнгу к $l(t)$.

Пусть $l(t) = t\ln(1+t)$, а H — радиус наименьшего шара с центром в начале координат, содержащего носитель матрицы $A(x)$.

Теорема 1. *Если выполнены условия:*

а) $\forall H_1 > H$: $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \operatorname{Re}\lambda_i(s) < C_{H_1} \exp H_1 |\operatorname{Im} s|$,

где $\lambda_i(s)$ — *собственные значения матрицы* $\tilde{A}(s)$;

б) $\exists \mu, \ \forall H_1 > H$: $|\Delta(s)| > B_{H_1}(1+|s|)^\mu \exp\{-\exp H_1 |\operatorname{Im} s|\}$

или условия:

а′) $\forall H_1 > H$: $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \{-\operatorname{Re}\lambda_i(s)\} < C_{H_1} \exp H_1 |\operatorname{Im} s|$;

б′) $\exists \mu, \forall H_1 > H: |\Delta(s) \det\exp\{-T\tilde{A}(s)\}| > B_{H_1}(1+|s|)^\mu \times \times \exp\{-\exp H_1 |\operatorname{Im} s|\}$,

то задача (1)—(2) корректно разрешима из пространства $W_{l,1/H}^N$ *в пространство* $W_{l,1/H}^{N-p}$ *для некоторого* p *и любых достаточно больших* N.

Доказательство. Рассмотрим сначала первый случай. Пользуясь известным неравенством (см. [3, с. 78]) и условием а), получим оценку

$$\|\exp t\tilde{A}(s)\| < C_{H_1}(1+|s|)^p \exp\{\exp H_1 |\operatorname{Im} s|\}. \tag{3}$$

Такой же оценке удовлетворяет норма матрицы $\int\limits_0^T dM(t)\,\tilde{B}(s,t) \times$

$\times \exp t\tilde{A}(s)$, а также ее миноры и обратная к ней матрица в силу условия б). Значит, матрица

$$Q(s, t) = \exp t\tilde{A}(s)\left[\int_0^T dM(t)\,\tilde{B}(s, t)\exp t\tilde{A}(s)\right]^{-1}$$

также удовлетворяет оценке вида (3), а это означает, что элементы матрицы $Q(s, t)$ являются преобразованиями Фурье свертывателей в пространстве $W^{\infty}_{l, 1/H}$.

Покажем, что $u(x, t) = G(x, t) * \varphi(x)$ ($G(x, t)$ — обратное преобразование Фурье от $Q(s, t)$) является решением задачи (1)—(2), если $\varphi(x) \in W^N_{l, 1/H}$. В силу своего определения $Q(s, t)$ удовлетворяет системе

$$\frac{\partial Q(s, t)}{\partial t} = \tilde{A}(s)\,Q(s, t).$$

Применим к обеим частям равенства обратный оператор Фурье и свернем полученное с $\varphi(x)$. Учитывая, что оператор Фурье произведение переводит в свертку и ассоциативность свертки, в правой части равенства получим $A(x) * u(x, t)$. В левой же части, учитывая непрерывность обратного оператора Фурье в рассматриваемых пространствах (см. [2]), получим

$$\frac{\partial G(x, t)}{\partial t} * \varphi(x) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}.$$

Равенство (1) доказано.

Рассмотрим теперь равенство

$$\int_0^T dM(t)\,B(x, t) * u(x, t) = \left\{\int_0^T dM(t)\,B(x, t) * G(x, t)\right\} * \varphi(x),$$

которое следует из ассоциативности, линейности и непрерывности свертки. Преобразования Фурье от матрицы, стоящей в фигурных скобках, равно $\int_0^T dM(t)\,\tilde{B}(s, t)\,Q(s, t) = E$ (E — единичная матрица) в силу определения $Q(s, t)$. Поэтому $\int_0^T dM(t)\,B(x, t) * u(x, t) = \varphi(x)$, т. е. условие (2) выполнено.

Теперь докажем единственность решения. Предположим, существует ненулевое решение $u(x, t)$ задачи (1)—(2) с $\varphi(x) = 0$, при всех $t \in [0, T]$ принадлежащее $W^N_{l, 1/H}$. Тогда $u(x, 0) = \varphi_1(x) \in W^N_{l, 1/H}$, а решение задачи Коши с таким начальным условием совпадает по теореме единственности (см. [3, с. 110]) с $u(x, t)$ и имеет вид $u(x, t) = G_1(x, t) * \varphi_1(x)$, где $G_1(x, t)$ — обратное преобразование Фурье матрицы $\exp t\tilde{A}(s)$. Подставив $u(x, t)$ в (2), получим

$$\int_0^T dM(t)\,B(x, t) * u(x, t) = \left\{\int_0^T dM(t)\,B(x, t) * G_1(x, t)\right\} * \varphi_1(x) = 0.$$

По условию б), преобразование Фурье матрицы, стоящей в фигурных скобках, является невырожденной матрицей и обратная к ней матрица, по доказанному выше, удовлетворяет оценке вида (3). Поэтому оператор свертки обратим, и, следовательно, $\varphi_1(x) \equiv 0$, а значит, единственность решения доказана.

Непрерывная зависимость $u(x, t)$ от $\varphi(x)$ следует из непрерывности оператора свертки.

В случае, когда выполнены условия а′) — б′), доказательство проводится аналогично.

Замечание. Теорема справедлива и для других $l(t) < t \ln(1+t)$, так как в этом случае $l^*(\tau) > \exp H\tau$, и из условий теоремы следует, что $Q(s, t)$ является преобразованием Фурье свертывателя в пространстве $W_{l,\alpha}^{\infty}$.

Следствие. *Если все элементы матриц $A(x)$ и $B(x, t)$ являются линейными комбинациями сдвигов δ-функций, а $\Delta(s) \neq 0$ для всех* s, *то задача (1)—(2) корректно разрешима из $W_{l,1/H}^{N}$ в $W_{l,1/H}^{N-p}$.*

Доказательство. Условие а) теоремы 1 выполняется, так как элементы $\tilde{A}(s)$ являются экспоненциальными полиномами, а условие б) следует из почти-периодичности $\Delta(s)$ (см. [4]).

Если $\Delta(s)$ имеет нули, то корректная разрешимость может иметь место в более узких пространствах $C_{l,[\gamma',\gamma'']}^{s}$ (см. [5]), состоящих из s раз дифференцируемых функций, с нормой

$$\|u(x)\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in R^m, |k| < s} \exp\{(\gamma'', x_+) + (\gamma', x_-)\}(1 + |x|^l)|D^k u(x)|,$$

где $x_+ (x_-)$ — вектор, координаты которого положительные (отрицательные) части соответствующих координат вектора x.

Теорема 2. *Если выполнены условия*

а) $\max_i \operatorname{Re} \lambda_i(s) < C$ *в слое* $\gamma'' < \operatorname{Im} s < \gamma'$;

б) $\exists \mu, h$: $|\Delta(s)| > C(1 + |s|)^{\mu} d(\operatorname{Im} s, \gamma', \gamma'')^h$,

где
$$d(\operatorname{Im} s, \gamma', \gamma'') = \min_{1 < i < m} \{\gamma_i' - \operatorname{Im} s_i, \operatorname{Im} s_i - \gamma_i''\},$$

или условия

а′) $\max_i \{-\operatorname{Re} \lambda_i(s)\} < C$;

б′) $|\Delta(s) \det\{-T\tilde{A}(s)\}| > C(1 + |s|)^{\mu} d(\operatorname{Im} s, \gamma', \gamma'')^h$,

то задача (1)—(2) корректно разрешима из пространства $C_{l,[\gamma',\gamma'']}^{s}$ в $C_{l,[\gamma',\gamma'']}^{s-p}$ при любых l и достаточно больших s и некотором $p = p(l)$.

Доказательство этой теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 1 с использованием результатов работы [5].

Автор благодарит проф. Борок В. М. за внимание к работе и ряд ценных замечаний.

Список литературы: 1. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй спец. курс. М., «Наука», 1965. 327 с. 2. *Макаров А. А.* О кольце свертывателей в одном функциональном пространстве.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 27. Харьков, 1977, с. 91—95. 3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Обобщенные функции, вып. 3. М., Физматгиз, 1958. 247 с. 4. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., Физматгиз, 1956. 240 с. 5. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Задача Коши и связанные с ней задачи для уравнений в свертках.—«Усп. мат. наук», 1972, т. XXVII, вып. 4 (166), с. 65—144.

Поступила 11 июля 1975 г.