УДК 513.88

Ю. И. ЛЮБИЧ

## ОБЩИЙ ВИД НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ПРОЕКТОРОВ В $R^n$

В [1] в связи с одной проблемой математической генетики [2] был указан общий вид стохастических проекторов. В настоящей заметке с целью дальнейших приложений описывается более широкий класс, а именно — класс неотрицательных проекторов. Напомним, что линейный оператор $A$ в $\boldsymbol{R}^n$ называется неотрицательным ($A \geqslant 0$), если он не выводит из координатного конуса $x_j \geqslant 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, иначе говоря, задается в каноническом базисе матрицей с неотрицательными элементами. Требуется описать все $P \geqslant 0$, удовлетворяющие уравнению $P^2 = P$.

**Теорема.** *Общий вид неотрицательных проекторов дается формулой*

$$P = \sum_{i=1}^{r} (\cdot,\ a_i^*)(a_i + b_i), \tag{1}$$

*где* $r = \operatorname{rg} P$, $\{a_i\}$ *— ортогональная система неотрицательных векторов;* $\{a_i^*\}$ *— биортогональная к ней система неотрицательных векторов;* $\{b_i\}$ *— система неотрицательных векторов, ортогональная* $\{a_i\} \cup \{a_i^*\}$.

Доказательство. Рассмотрим в $\operatorname{Im} P$ неотрицательную линейную оболочку образов базисных векторов $K_P = \operatorname{Lin}^+(Pe_1, \ldots, Pe_n)$. Это телесный конус в $\operatorname{Im} P$. Пусть $c_i = Pe_i\,(1 \leqslant i \leqslant m)$ — все его крайние точки. Покажем, что

$$\operatorname{supp} c_i \cap \operatorname{supp} c_j \subset \operatorname{Ker} P \quad (i \neq j). \tag{2}$$

Действительно, если $e_k \in \operatorname{supp} c_i$, то $\operatorname{supp} Pe_k \subset \operatorname{supp} Pc_i = \operatorname{supp} c_i$. Так как $c_i$ — крайняя точка в $K_P$, то $Pe_k = \pi_{ik} e_i$, иначе векторы $c_i \pm \tau Pe_k$ при достаточно малых $\tau$ принадлежат конусу $K_P$, не пропорциональны $c_i$, а их полусумма равна $c_i$. Следовательно, если $e_k \in \operatorname{supp} c_i \cap \operatorname{supp} c_j$, то $Pe_k = 0$, иначе $c_i$, $c_j$ пропорциональны.

Векторы $c_i$ «разбиваются» следующим образом: $c_i = a_i + b_i$, где $a_i \geqslant 0$, $b_i \geqslant 0$, $\operatorname{supp} a_i \cap \operatorname{Ker} P = \varnothing$, $\operatorname{supp} b_i \subset \operatorname{Ker} P$ (или, что равносильно, $b_i \in \operatorname{Ker} P$). В силу (2) $\operatorname{supp} a_i \cap \operatorname{supp} a_j = \varnothing$, $\operatorname{supp} a_i \cap \operatorname{supp} b_j = \varnothing$, т. е.

$$(a_i,\ a_j) = 0 \ (i \neq j),\ (a_i,\ b_j) = 0. \tag{3}$$

Очевидно, $a_i \neq 0$ (иначе $c_i = Pe_i \in \operatorname{Ker} P$, т. е. $c_i = 0$).

Векторы $\{c_i\}_1^m$ образуют базис в $\operatorname{Im} P$, так как они, очевидно, порождают $\operatorname{Im} P$ и линейно независимы:

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i c_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j b_j = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant m)$$

в силу ортогональности (3). Поэтому $m = \operatorname{rg} P = r$.

Итак,

$$Px = \sum_{i=1}^{r} \xi_i(x)(a_i + b_i)$$

($\xi_i(x)$ — координаты вектора $Px$ в базисе $\{c_i\}_1^r$). Но отсюда в силу (3)

$$\xi_j(x) = \frac{(Px, a_j)}{(a_j, a_j)} = (x, a_j^*),$$

где

$$a_j^* = \frac{P^* a_j}{(a_j, a_j)} \geqslant 0 \ (1 \leqslant j \leqslant m).$$

Поскольку $Pa_i = e_i$, то $(a_i, a_j^*) = \delta_{ij}$. Аналогично из $Pb_i = 0$ следует $(b_i, a_j^*) = 0$. Мы получили все, что требовалось.

Обратно, любой оператор вида (1), построенный по системам $\{a_i\}$, $\{a_i^*\}$, $\{b_i\}$ с указанными в формулировке теоремы свойствами является неотрицательным проектором. Теорема доказана.

Напомним, что неотрицательный линейный оператор называется неразложимым, если он не имеет инвариантных координатных подпространств.

Следствие 1. *Общий вид неразложимых неотрицательных проекторов дается формулой*

$$P = (\cdot, a^*)a, \tag{4}$$

*где* $a > 0$, $a^* > 0$, $(a, a^*) = 1$. *Ранг неразложимого неотрицательного проектора равен 1.*

Доказательство. В общей формуле (1) для неразложимого проектора $P$ все $b_k = 0$, так как координатное подпространство, натянутое на $\bigcup \operatorname{supp} b_k$ содержится в $\operatorname{Ker} P$ и тем самым инвариантно. Следовательно,

$$P = \sum_{i=1}^{r} (\cdot, a_i^*) a_i.$$

Но тогда $Pa_i = a_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, и координатные подпространства, натянутые на $\operatorname{supp} a_i (1 \leqslant i \leqslant r)$ инвариантны. Следовательно, $r = 1$, $a_1 > 0$, а так как $P^* = (\cdot, a_1^*)a$ и $P^*$ неразложим вместе с $P$, то $a_1^* > 0$. Обратно, из (4) и условий $a > 0$, $a^* > 0$, очевидно, следует неразложимость оператора $P$.

Следствие 2 [1]. *Общий вид стохастических (по столбцам) проекторов дается формулой*

$$P = \sum_{i=1}^{r} \{(\cdot, s_i) + (\cdot, \sigma_i)\} a_i,$$

где $r = \operatorname{rg} P$, $\{a_i\}$ — ортогональная система стохастических векторов,

$$s_i = \sum_{k \in \operatorname{supp} a_i} e_k \ (1 \leqslant i \leqslant r) \text{ и}$$

$$\sigma_i \geqslant 0, \ \operatorname{supp} \sigma_i \subset \overline{\bigcup_{j=1}^{r} \operatorname{supp} a_j}, \ \sum_{i=1}^{r} (s_i + \sigma_i) = \sum_{j=1}^{n} e_j.$$

Доказательство опустим.

**Список литературы:** **1.** *Любич Ю. И.* Линейные бернштейновские популяции. — В кн.: Теория функций, функц. анализ и их приложения. Вып. 2. Харьков, 1975, с. 107—111. **2.** *Бернштейн С. Н.* Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности. — «Учен. зап. н.-и. каф. Украины. отд. мат. «Вып. 1. 1924, с. 83—115.

*Поступила 10 ноября 1977 г.*