УДК 511.6+517.56

А. В. КРЫТОВ

О РОСТЕ И РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ p-МЕРНЫХ ЦЕЛЫХ КРИВЫХ С ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

1. Пусть $\vec{G}(z) = \{g_n(z)\}_{n=1}^{p}$ — p-мерная ($p \geqslant 2$) целая кривая. Будем пользоваться стандартными обозначениями теории целых кривых [1—5]. Введем следующее определение.

Определение 1. *Если $\vec{G}(z)$ — p-мерная целая кривая и ω, $0 \leqslant \omega \leqslant p-2$, — максимальное число всех p-мерных линейно-независимых векторов $\vec{a}$, таких, что $(\vec{G}(z) \cdot \vec{a}) \equiv 0$, то будем говорить, что $\vec{G}(z)$ имеет ω-линейно-зависимые компоненты*[1].

Н. Тода [6—8] получил оценки для суммы дефектов p-мерных целых кривых с ω-линейно-зависимыми компонентами. Сформулируем основные результаты данной работы.

Теорема 1. *Пусть $\vec{G}(z)$ — p-мерная целая кривая с ω-линейно-зависимыми компонентами нижнего порядка $\lambda < 1$. Предположим, что для произвольной фиксированной допустимой системы*[2] *A векторы $\vec{a} \in E_A(\vec{G}) = \{\vec{a} \in A : \delta(\vec{a}, \vec{G}) > 0\}$ занумерованы так, что $\delta(\vec{a}_1, \vec{G}) \geqslant \delta(\vec{a}_2, \vec{G}) \geqslant \ldots > 0$. Тогда, если $k\ (\geqslant p)$ — целое число, то*

$$\delta(\vec{a}_k, \vec{G}) \leqslant 1 - \frac{q \sin \frac{\pi\lambda}{q}}{\pi\lambda},$$

где

$$q = q(k) = \left[\frac{k-1}{p-1}\right].$$

Следствие 1. *В условиях теоремы 1*

$$\sum_{k=p}^{\infty} \delta(\vec{a}_k, \vec{G}) \leqslant \frac{\pi^4}{36} \lambda^2 (p-1)^2.$$

Следствие 2. *При любом $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{k=p}^{\infty} \delta^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\vec{a}_k, \vec{G}) \leqslant \left(2 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \left\{\frac{\pi}{\sqrt{6}} \lambda (p-1)\right\}^{1+2\varepsilon}.$$

Следствие 3. *Для произвольной фиксированной допустимой системы векторов A*

$$\sum_{\vec{a} \in A} \delta(\vec{a}, \vec{G}) \leqslant p - 1 + \frac{\pi^4}{36} \lambda^2 (p-1)^2.$$

Доказательство теоремы 1 проводится методом работы [9].

Теорема 2. *Пусть целая кривая $\vec{G}(z)$ определена теоремой 1 и для произвольной фиксированной допустимой системы A векторы $\vec{a} \in \Omega_A(\vec{G}) = \{\vec{a} \in A : \beta(\vec{a}, \vec{G}) > 0\}$ занумерованы так, что $\beta(\vec{a}_1, \vec{G}) \geqslant \beta(\vec{a}_2, \vec{G}) \geqslant \ldots > 0$. Тогда*

$$\beta(\vec{a}_p, \vec{G}) \leqslant \pi\lambda \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{2} \left\{p - \sum_{k=1}^{p} \delta(\vec{a}_k, \vec{G})\right\}.$$

---

[1] Фактически определение 1 дано в работе [6, с. 299].

[2] Везде в п. I мы предполагаем, что для любого вектора $\vec{a} \in A$ $(\vec{G}(z) \times \vec{a}) \not\equiv 0$.

Следствие 1. *Для целых кривых с* ω*-линейно-зависимыми компонентами нулевого нижнего порядка множество* $\Omega_A(\vec{G})$ *содержит самое большее* $p-1$ *вектор.*

Следствие 2. *Для рассматриваемых в следствии 1 целых кривых нулевого нижнего порядка*

$$\sum_{\vec{a}\in A} \beta(\vec{a}, \vec{G}) \leqslant p-1,$$

где A *— произвольная фиксированная допустимая система векторов.*

Доказательство теоремы 2 проводится методом работы [10].

Теорема 2а. *Для любых чисел* p, $p\geqslant 2$ *и* ω, $0<\omega\leqslant p-2$ *существуют* p*-мерная целая кривая* $\vec{G}_0(z)$ *с* ω*-линейно-зависимыми компонентами нулевого нижнего порядка и допустимая система векторов* $A_0=\{\vec{a}_k\}$, *для которых* $\delta(\vec{a}_k, \vec{G}_0)=\beta(\vec{a}_k, \vec{G}_0)=1$ *при* $k=1, 2, \ldots, p-1$ *и* $\delta(\vec{a}_k, \vec{G}_0,)=\beta(\vec{a}_k, \vec{G}_0)=0$ *при* $k\geqslant p$.

Теорема 3. *Пусть целая кривая* $\vec{G}(z)$ *определена теоремой 1 и* $\beta(\vec{a}_p, \vec{G})>0$. *Тогда*

$$\beta(\vec{a}_{p-1}, \vec{G}) \leqslant \pi\lambda \operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{2}\left\{p-\sum_{k=1}^{p}\delta(\vec{a}_k, \vec{G})\right\},$$

где векторы $\vec{a}\in\Omega_A(\vec{G})$ *таковы, что* $\beta(\vec{a}_{k+1}, \vec{G})\leqslant\beta(\vec{a}_k, \vec{G})$ $(k=1, 2, \ldots, p-1)$.

Доказательство теоремы 3 проводится методом работы [11].

2. В работе [12] определены характеристики роста и распределения значений n-значной трансцендентной алгеброидной мероморфной функции $f(z)$, определяемой уравнением

$$g_n(z)\cdot w^n+g_{n-1}(z)\cdot w^{n-1}+\ldots+g_0(z)=0, \qquad (1)$$

где $\{g_k(z)\}_{k=0}^{n}$ линейно-независимые целые функции, имеющие лишь конечное число общих нулей, и хотя бы одно из отношений $g_k(z)/g_v(z)$ $(k\neq 0)$ является трансцендентной мероморфной функцией.

В этой же работе приведены соотношения (4,2) (см. [12, с. 48]) между величинами дефектов и величинами отклонений алгеброидной функции $f(z)$ и соответствующей ей целой кривой $\vec{G}_f(z)=\{g_k(z)\}_{k=0}^{n}$. Заметим, что эти соотношения имеют место и в том случае, когда компоненты целой кривой $\vec{G}_f(z)$ являются ω-линейно зависимыми функциями. В силу этого теоремы 1, 2 и 3 данной работы справедливы для алгеброидных функций, определяемых уравнением (1), коэффициенты которого подчинены условию ω-линейной зависимости.

3. В следующей теореме целая кривая $\vec{G}(z)$ имеет линейно независимые компоненты.