УДК 511.6+517.56

А. В. КРЫТОВ

О РОСТЕ И РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ p-МЕРНЫХ ЦЕЛЫХ КРИВЫХ С ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

1. Пусть $\vec{G}(z) = \{g_n(z)\}_{n=1}^{p}$ — p-мерная ($p \geqslant 2$) целая кривая. Будем пользоваться стандартными обозначениями теории целых кривых [1—5]. Введем следующее определение.

Определение 1. *Если* $\vec{G}(z)$ — *p-мерная целая кривая и* ω, $0 \leqslant \omega \leqslant p-2$, — *максимальное число всех p-мерных линейно-независимых векторов* $\vec{a}$, *таких, что* $(\vec{G}(z) \cdot \vec{a}) \equiv 0$, *то будем говорить, что* $\vec{G}(z)$ *имеет* ω-*линейно-зависимые компоненты*[1].

Н. Тода [6—8] получил оценки для суммы дефектов p-мерных целых кривых с ω-линейно-зависимыми компонентами. Сформулируем основные результаты данной работы.

Теорема 1. *Пусть* $\vec{G}(z)$ — *p-мерная целая кривая с* ω-*линейно-зависимыми компонентами нижнего порядка* $\lambda < 1$. *Предположим, что для произвольной фиксированной допустимой системы*[2] A *векторы* $\vec{a} \in E_A(\vec{G}) = \{\vec{a} \in A : \delta(\vec{a}, \vec{G}) > 0\}$ *занумерованы так, что* $\delta(\vec{a}_1, \vec{G}) \geqslant \delta(\vec{a}_2, \vec{G}) \geqslant \ldots > 0$. *Тогда, если* $k\ (\geqslant p)$ — *целое число, то*

$$\delta(\vec{a}_k, \vec{G}) \leqslant 1 - \frac{q \sin \frac{\pi\lambda}{q}}{\pi\lambda},$$

где

$$q = q(k) = \left[\frac{k-1}{p-1}\right].$$

Следствие 1. *В условиях теоремы 1*

$$\sum_{k=p}^{\infty} \delta(\vec{a}_k, \vec{G}) \leqslant \frac{\pi^4}{36} \lambda^2 (p-1)^2.$$

Следствие 2. *При любом* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=p}^{\infty} \delta^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\vec{a}_k, \vec{G}) \leqslant \left(2 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \left\{\frac{\pi}{\sqrt{6}} \lambda (p-1)\right\}^{1+2\varepsilon}.$$

Следствие 3. *Для произвольной фиксированной допустимой системы векторов* A

$$\sum_{\vec{a} \in A} \delta(\vec{a}, \vec{G}) \leqslant p - 1 + \frac{\pi^4}{36} \lambda^2 (p-1)^2.$$

Доказательство теоремы 1 проводится методом работы [9].

Теорема 2. *Пусть целая кривая* $\vec{G}(z)$ *определена теоремой 1 и для произвольной фиксированной допустимой системы* A *векторы* $\vec{a} \in \Omega_A(\vec{G}) = \{\vec{a} \in A : \beta(\vec{a}, \vec{G}) > 0\}$ *занумерованы так, что* $\beta(\vec{a}_1, \vec{G}) \geqslant \beta(\vec{a}_2, \vec{G}) \geqslant \ldots > 0$. *Тогда*

$$\beta(\vec{a}_p, \vec{G}) \leqslant \pi\lambda \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{2} \left\{p - \sum_{k=1}^{p} \delta(\vec{a}_k, \vec{G})\right\}.$$

---

[1] Фактически определение 1 дано в работе [6, с. 299].

[2] Везде в п. I мы предполагаем, что для любого вектора $\vec{a} \in A$ $(\vec{G}(z) \times \times \vec{a}) \not\equiv 0$.

Следствие 1. *Для целых кривых с* ω*-линейно-зависимыми компонентами нулевого нижнего порядка множество* $\Omega_A(\vec{G})$ содер*жит самое большее* $p-1$ *вектор.*

Следствие 2. *Для рассматриваемых в следствии 1 целых кривых нулевого нижнего порядка*

$$\sum_{\vec{a}\in A} \beta(\vec{a}, \vec{G}) \leqslant p-1,$$

где A *— произвольная фиксированная допустимая система векторов.*

Доказательство теоремы 2 проводится методом работы [10].

Теорема 2а. *Для любых чисел* p, $p \geqslant 2$ *и* ω, $0 < \omega \leqslant p-2$ *существуют* p*-мерная целая кривая* $\vec{G}_0(z)$ *с* ω*-линейно-зависимыми компонентами нулевого нижнего порядка и допустимая система векторов* $A_0 = \{\vec{a}_k\}$, *для которых* $\delta(\vec{a}_k, \vec{G}_0) = \beta(\vec{a}_k, \vec{G}_0) = 1$ *при* $k = 1, 2, \ldots, p-1$ *и* $\delta(\vec{a}_k, \vec{G}_0,) = \beta(\vec{a}_k, \vec{G}_0) = 0$ *при* $k \geqslant p$.

Теорема 3. *Пусть целая кривая* $\vec{G}(z)$ *определена теоремой 1 и* $\beta(\vec{a}_p, \vec{G}) > 0$. *Тогда*

$$\beta(\vec{a}_{p-1}, \vec{G}) \leqslant \pi\lambda \operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{2}\left\{p - \sum_{k=1}^{p}\delta(\vec{a}_k, \vec{G})\right\},$$

где векторы $\vec{a} \in \Omega_A(\vec{G})$ *таковы, что* $\beta(\vec{a}_{k+1}, \vec{G}) \leqslant \beta(\vec{a}_k, \vec{G})$ $(k = 1, 2, \ldots, p-1)$.

Доказательство теоремы 3 проводится методом работы [11].

2. В работе [12] определены характеристики роста и распределения значений n-значной трансцендентной алгеброидной мероморфной функции $f(z)$, определяемой уравнением

$$g_n(z) \cdot w^n + g_{n-1}(z) \cdot w^{n-1} + \ldots + g_0(z) = 0, \qquad (1)$$

где $\{g_k(z)\}_{k=0}^{n}$ линейно-независимые целые функции, имеющие лишь конечное число общих нулей, и хотя бы одно из отношений $g_k(z)/g_\nu(z)$ $(k \neq 0)$ является трансцендентной мероморфной функцией.

В этой же работе приведены соотношения (4,2) (см. [12, с. 48]) между величинами дефектов и величинами отклонений алгеброидной функции $f(z)$ и соответствующей ей целой кривой $\vec{G}_f(z) = \{g_k(z)\}_{k=0}^{n}$. Заметим, что эти соотношения имеют место и в том случае, когда компоненты целой кривой $\vec{G}_f(z)$ являются ω-линейно зависимыми функциями. В силу этого теоремы 1, 2 и 3 данной работы справедливы для алгеброидных функций, определяемых уравнением (1), коэффициенты которого подчинены условию ω-линейной зависимости.

3. В следующей теореме целая кривая $\vec{G}(z)$ имеет линейно независимые компоненты.

Теорема 4. *Пусть $\vec{G}(z)$ — p-мерная целая кривая нижнего порядка λ, $0 < \lambda \leqslant 0{,}5$, и A — произвольная фиксированная допустимая система векторов. Если для $p-1$ вектора $\vec{a} \in A$ выполняется неравенство $\delta(\vec{a}, \vec{G}) \geqslant 1 - \cos \pi\lambda$, то все остальные дефекты равны нулю.*

Для доказательства теоремы 4 нами было перенесено на p-мерные целые кривые понятие протяжения мероморфных функций (см. [13]) и доказана оценка величины протяжения для целых кривых, аналогичная мероморфному случаю (см. [13, с. 419, формула (1.4)]). При доказательстве теоремы 4 методом работы [13] мы получили утверждения, обобщающие на целые кривые известные результаты для мероморфных функций [14, теорема 2; 15, теорема 1, утверждение I; 16, гл. V, теоремы 3.1 и 3.2].

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. П. Петренко за постановку задачи и руководство работой.

Список литературы: 1. *Ahlfors L.* The theory of meromorphic curves.— «Acta Soc. Sci. Fenn.», 1941, vol. 3, N 4, p. 1—31. 2. *Weyl H.*, *Weyl J.* Meromorphic functions and analytic curves. Princeton, 1943. 531 p. 3. *Cartan H.* Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données.— «Mathematica», 1933, vol. 7, p. 5—33. 4. *Гольдберг А. А.* Некоторые вопросы теории распределения значений.— Дополнение к книге Г. Виттиха «Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям», М., Физматгиз, 1960. 319 с. 5. *Петренко В. П.*, *Хассайн М.* О росте целых кривых.— «Изв. АН СССР, сер. мат.», 1976, т. 37, № 2, с. 466—477. 6. *Toda N.* Sur les combinaisons exceptionnelles de fonctions holomorphes; applications aux fonctions algebroides.— «Tohoku Math. J.», 1970, vol. 22, N 2, p. 290—319. 7. *Toda N.* Sur quelques combinaisons lineaires exceptionnelles au sens de Nevanlinna.— «Tohoku Math. J», 1971, vol. 23, N 1, p. 67—95. 8. *Toda N.* Sur quelques combinaisons lineaires exceptionnelles au sens de Nevanlinna. II.— «J. Math. Soc. Iap.», 1973, vol. 25, N 1, p. 158—167. 9. *Крытов А. В.* Некоторые оценки для дефектов p-мерных целых кривых.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 29. Харьков, 1978, с. 51—60. 10. *Петренко В. П.* О росте целых кривых нижнего порядка $\lambda < 1$.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 20. Харьков, 1974, с. 134—141. 11. *Ламзина Т. Б.* О величинах отклонений целых кривых нижнего порядка $\lambda < 1$.— «Изв. АН СССР, сер. мат.», 1974, т. 38, № 2, с. 323—332. 12. *Петренко В. П.* О распределении значений некоторых классов целых функций.— ДАН СССР, 1975, т. 223, № 1, с. 46—48. 13. *Baernstein A.* Proof of Edrei's spread conjecture.— «Proc. Loudon Math. Soc. (3)». 1973, vol. 26, N 3, p. 418—434. 14. *Edrei A.* Sums of deficiencies of meromorphic functions.— «J. anal. math.», 1965, vol. 14. p. 79—107. 15. *Edrei A*, Solution of the deficiency problem for function of small lower order.— «Proc. London Math. Soc. (3)», 1973, vol. 26, N 3, p. 435—445. 16. *Гольдберг А. А.*, *Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970. 591 с.

Поступила 21 января 1976 г.