УДК 517.43

*Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК*

# ОБ ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ. II*

## § 4. Связь между свойствами решения в правой части

В работе [1] были получены результаты о разрешимости уравнения

$$(Ly)(z) = h(z) \tag{1}$$

в классах $E(G)$ и $K(F)$ (см. уравнение (7) работы [1]). В настоящей работе продолжим исследование уравнения (1) в тех же классах функций.

Назовем ограниченное замкнутое не разбивающее плоскость множество $Q$ существенным множеством функции $v(z)$, регулярной в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, если $v(z)$ регулярна в области $CQ$, но не является однозначной анали-

---

* Настоящая статья является продолжением работы [1], используются те же обозначения, определения и результаты.

тической функцией в любой области $CQ_1$, где $Q_1$ — замкнутое собственное подмножество $Q$, не разбивающее плоскость.

**Лемма 3.** *Пусть $G$ и $g$ удовлетворяют условиям теоремы 1 из [1], а $F$ — любой компакт $G$, не разбивающий плоскость. Тогда оператор $L$ действует из $K(F)$ в $K(F)$.*

Доказательство. Пусть $y(z) \in K(F)$, тогда $\hat{y}(t) \in A_0(CF)$. Так как $y \in E(G)$, то при всех достаточно малых $z$

$$(Ly)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(zt)\,g(t)\,\hat{y}(t)\,dt, \quad Ly \in E(G),$$

$\Gamma$ — любой контур в $G$, содержащий внутри себя $F$. При всех достаточно больших $\tau$

$$(\hat{Ly})(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^{-n-1}}{2\pi i}\int_\Gamma t^n g(t)\,\hat{y}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(t)\,\hat{y}(t)}{t-\tau}\,dt$$

и $(\hat{Ly})(\tau)$ регулярна в области, внешней относительно контура $\Gamma$. Так как контур $\Gamma$ можно взять как угодно близким к $\partial F$, то без труда находим, что $\hat{Ly}(\tau) \in A_0(CF)$ и, следовательно, $Ly \in K(F)$.

Из леммы 3 и теоремы 1 получаем

Следствие 2. *Пусть множество $G$ и функция $g$ удовлетворяют условиям теоремы 1 из [1]. Пусть, далее, $h \in E(G)$ и $F$ — существенное множество $\hat{h}(z)$ ($F \Subset G$). Тогда существует частное решение $y_0 = \omega_F(z)$ уравнения (1), такое, что $F$ — существенное множество $\hat{y}_0$.*

Пусть $h \in E(G)$. Обозначим символом $v(h)$ замыкание выпуклой оболочки множества всех особенностей $\hat{h}(z)$.

Следствие 3. *Пусть $G$ — выпуклая область, $g(z) \in A(G)$, $g \not\equiv 0$ в $G$, $h(z) \in E(G)$. Тогда существует частное решение $y_0 = \omega_{v(h)}(z)$ уравнения (1) из $E(G)$, такое, что $v(y_0) = v(h)$. Общий вид решения уравнения (1), обладающего тем свойством, что $v(y) = v(h)$, дается формулой*

$$y(z) = y_0(z) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{=1}^{p_k - 1} c_{j,\,k} z^j f^{(j)}(\alpha_k z), \quad |z| \leqslant \delta_0,$$

*где $\alpha_k$ ($1 \leqslant k \leqslant r$) — все нули $g(z)$, лежащие в $v(h)$, $p_k$ — их кратности, а $c_{j,\,k}$ — произвольные постоянные.*

Пусть $G$ — выпуклая область, $y \in E(G)$ и $r(y) = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \left| \frac{y^{(k)}(0)}{k!\,a_k} \right|^{\frac{1}{k}}$.

Очевидно, что $\forall y \in E(G)$ $r(y) = \sup\{|z| : z \in v(y)\}$. Из следствия 3 получаем

Следствие 4. *Пусть* $G$ — *выпуклая область*; $g \in A(G)$, $h \in E(G)$. *Тогда существует частное решение* $y_0(z) = \omega_{v(h)}(z)$ *уравнения* (7), *такое, что* $r(y_0) = r(h)$.

Заметим еще, что из леммы 3 следуют для случая выпуклой области $G$ соотношения $v(Ly) \subseteq v(y)$ и $r(Ly) \leqslant r(y)$, $\forall y \in E(G)$.

## § 5. Другие представления решения. Примеры

Согласно теореме 2 из [1] обратный оператор $L^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда $g(z) \neq 0$ в $G$. В этом случае имеем

$$L^{-1}h = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(zt)\frac{\hat{h}(t)}{g(t)}dt, \ \forall h \in E(G), \ |z| < b(\Gamma), \tag{2}$$

где $\Gamma$ — любой контур в $G$, такой, что $\hat{h}(t)$ локально-аналитична на множестве $\overline{\operatorname{ext}\Gamma}$.

Укажем некоторые другие представления оператора $L^{-1}$ при дополнительных предположениях относительно $G$.

Пусть $G$ — односвязная область, не содержащая бесконечно удаленную точку, $g(z) \in A(G)$ и $g(z) \neq 0$ в $G$. В этом случае существует последовательность многочленов $p_k(z) = \sum_{s=0}^{n_k} a_{s,k} z^s$, сходящаяся к $\frac{1}{g(z)}$ равномерно внутри $G$. Из представления (2) находим

$$(L^{-1}h)(z) = \lim_{k\to\infty} \sum_{s=0}^{n_k} a_{s,k} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(zt)\hat{h}(t)t^s dt =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{s=0}^{n_k} a_{s,k}(D_f^s h)(z).$$

Можно в данном случае выразить решение и через операторы обобщенного сдвига $T(h, \alpha)(z)$. Именно, пусть $h(t) \in K(F)$, где $F$ — компакт $G$, не разбивающий плоскость. Проведем замкнутую спрямляемую жорданову кривую $\Gamma$, отделяющую $F$ от $\partial G$ и такие же кривые — $\Gamma_1$, отделяющую $\Gamma$ от $\partial G$, и $\Gamma_2$, отделяющую $\Gamma_1$ от $\partial G$. Согласно теореме 13 гл. I монографии [2] функция разлагается в ряд Данжуа — Вольфа: $\frac{1}{g(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z-\alpha_k}$, равномерно сходящийся внутри $\Gamma_1$. В этом представлении $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k| < \infty$; $\alpha_k$ — некоторые точки $G$, лежащие между $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$. Отсюда

$$L^{-1}h = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(zt)\hat{h}(t)\,dt}{g(t)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(zt)\hat{h}(t)}{t-\alpha_k}dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(f(zt)\,h(t))_-}{t-\alpha_k}\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} c_k T(\hat{h},\ z)(\alpha_k).$$

Заметим, что в последнем представлении коэффициенты $c_k$ и числа $\alpha_k \in G$ одни и те же для всех $h$ из класса $K(F)$ с фиксированным $F$.

Наконец, если $G$ — круг: $|t| < R$, $g(z) \in A(G)$ и $g(z) \neq 0$ в $G$, то

$$(t) \equiv \frac{1}{g(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k t^k,\ \overline{\lim_{k\to\infty}}\, |g_k|^{\frac{1}{k}} \leqslant \frac{1}{R};$$

$$(L^{-1}h)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(zt)\, t^k \hat{h}(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} g_k (D_f^k h)(z).$$

Когда $L$ не является изоморфизмом $E(G)$, можно в некоторых случаях дать другие представления частного решения. Ограничимся здесь простейшим случаем, когда $G$ — круг $|z| < R$. Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы в кольце $r(h) < |t| < r(h) + \varepsilon$ не было нулей $g(z)$ $\left(\text{Как выше, } r(h) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left| \frac{h^{(k)}(0)}{k!\,|a_k|} \right|^{\frac{1}{k}}\right)$. Тогда функция

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(zt)\,\hat{h}(t)}{g(t)}\, dt,\ C_r = \{t : |t| = r\},\ r(h) < r < r(h) + \varepsilon,$$

является частным решением уравнения (1). При этом $r(\varphi_0) \leqslant r(h) = r(L\varphi_0) \leqslant r(\varphi_0)$ и $r(\varphi_0) = r(h)$. Разложим функцию $\frac{1}{g(t)}$ в ряд Лорана в кольце $r(h) < |t| < r(h) + \varepsilon$, найдем (при $|z| < \gamma$)

$$\varphi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu_k}{2\pi i} \int_{C_r} f(zt)\,\hat{h}(t)\, t^k dt + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_{-k} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(zt)\,\hat{h}(t)\, t^{-k} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k (D_f^k h)(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_{-k} (D_f^{-k} h)(z).$$

Рассмотрим один пример. Пусть $F$ — произвольное замкнутое ограниченное множество со связным дополнением,

$d = \sup\{|z| : z \in F\}$, $f(z) \in A_{R_0}$, $0 < R_0 \leqslant \infty$, $f^{(k)}(0) \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Возьмем любое комплексное число $\alpha$ из $V_{\frac{R_0}{d}}$, и пусть $\alpha < r_1 < \frac{R_0}{d}$, $G = V_{\frac{R_0}{r_1}}$. Функция $g(z) = f(\alpha z)$ аналитична в $G$, и по теореме 1 уравнение (1) разрешимо в $K(F)$ для любой правой части $h(z)$

из $K(F)$. Иначе говоря, оператор $T(y, \alpha)$ является при каждом фиксированном $\alpha$ из $V_{\frac{R_0}{d}}$ эпиморфизмом $K(F)$. Отсюда следует, что $\forall\alpha \in V_{\frac{R_0}{d}}$, $\forall h \in K(F)\ \exists y_\alpha \in K(F)$: $(D_f^n h)(0) = (D_f^n y_\alpha)(\alpha)$, $n = 0$, 1, 2, .... Учитывая соотношение (4), приходим к такому результату:

**Теорема 3.** *Пусть* $B_\alpha = \left\{c = \left\{(D_f^n y)(\alpha)\right\}_{n=0}^{\infty}:\ y \in K(F)\right\}$. *Тогда* $B_\alpha \equiv \mathrm{const}$ *в круге* $V_{\frac{R_0}{d}}$.

Следствие. *Если* $\alpha, \beta \in V_{\frac{R_0}{d}}$, *то* $\forall\, w \in K(F)\ \ \exists v \in K(F)$: $(D_f^n w)(\alpha) = (D_f^n v)(\beta)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

## § 6. Операторы бесконечного порядка в обобщенных производных

Рассмотрим один важный подкласс операторов (5) (см. [1]), а именно, операторы $M$ вида

$$(My)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (D_f^k y)(z). \tag{3}$$

Как и выше, $F$ — замкнутое ограниченное множество со связным дополнением, а $G$ — открытое множество, не содержащее бесконечно удаленную точку и не разбивающее плоскость.

Пусть $B$ — некоторое локально-выпуклое пространство аналитических функций. Будем говорить, что оператор (3)

1) применим к $B$ в точке $z_0$, если $\forall\, y \in B$ функции $D_f^k$ у аналитичны в некоторой окрестности $z_0$, $k = 0, 1, \ldots$ и сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (D_f^k y)(z_0)$;

2) применим (абсолютно применим) к $B$, если ряд (3) сходится (соответственно абсолютно сходится) по топологии $B$ для любой функции $y(z)$ из $B$;

3) регулярно применим к $B$ внутри круга $V_R$, если $\forall\, y \in B$ $\forall n \geqslant 0$ $D_f^n y \in A_R$ и если $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| M_r(D_f^k y) < \infty$, $\forall r < R$, $\forall y \in B$, $M_r(y) = \max\{|y(z)| : |z| = r\}$.

Рассмотрим случаи, когда $B = K(F)$ и $B = E(G)$.

**Теорема 4.** *Пусть $F$ — ограниченное замкнутое множество, не разбивающее плоскость и пусть оператор (3) применим к $K(F)$ в точке $z = 0$. Тогда*

$$\varlimsup_{k\to\infty} |c_k|^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{\alpha_F},\ \alpha_F = \sup\{|z| : z \in F\}. \tag{4}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $\alpha = \alpha_F > 0$. Допустим, что $\varlimsup_{k\to\infty} |c_k|^{\frac{1}{k}} \geqslant \frac{1}{\alpha}$, тогда для некоторой подпоследовательности $\{n_k\}$ $\lim\limits_{k\to\infty}|C_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} = d \geqslant \frac{1}{\alpha}$. Положим $d_n = 0$, если $n \neq n_k$ и $d_{n_k} = (c_{n_k}\alpha^{n_k})^{-1}$, $k = 1, 2 \ldots$ Так как $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}|d_k|^{\frac{1}{k}} \leqslant 1$, то, по лемме Вострецова (см. [3]), существует целая функция $\psi(z)$ роста не выше, чем первого порядка и минимального типа ($\psi(z) \in [1, 0]$), такая, что $|d_n| \leqslant \psi(n)$, $n \geqslant 0$. По теореме Вигерта—Ло (см. [3]), функция $h(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\psi(n)z^n$ регулярна в области $|z-1| > 0$ и $h(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}h_k(z-1)^{-k}$, $\lim\limits_{k\to\infty}|h_k|^{\frac{1}{k}} = 0$. Пусть $z_0 \in F$ и $|z_0| = \alpha$. Функция $H(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\psi(n)\left(\frac{z_0}{z}\right)^n$ регулярна в области $|z - z_0| > 0$. Положим $v(z) = \frac{H(z) - H(0)}{z}$. Очевидно, что $v(z)$ регулярна в области $|z - z_0| > 0$, причем, если $|z| > |z_0|$,

$$v(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\frac{(z_0)^n}{z^{n+1}} + \frac{a}{z} \text{ и } v(\infty) = 0.$$

Положим $b(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R} f(zt)\,v(t)\,dt$, где $C_R = \{t : |t| = R\}$, $R >$ $> |z_0|$. Тогда $b(z) = a\ a_0\psi(0) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\psi(n)z_0^n z^n$, $b \in K(F)$ и

$$(D_f^k b)(0) = \frac{a_0}{a_k}a_k\psi(k)z_0^k = a_0\psi(k)z_0^k,\ k = 1, 2, \ldots$$

Отсюда $\left|c_{n_k}(D_f^{n_k}b)(0)\right| \geqslant |d_{n_k}||a_0||z_0|^{n_k}|c_{n_k}| = |a_0|$, $\forall k \geqslant 1$ и ряд $\sum\limits_{s=0}^{\infty}c_s(D_f^s b)(0)$ расходится.

Пусть теперь $\alpha = 0$; в этом случае $F = \{0\}$, а класс $K(F)$ совпадает с множеством $K(0)$ всех целых функций $y(z)$, таких, что $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{y_k}{a_k}\right|^{\frac{1}{k}} = 0$. Допустим, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}|c_k|^{\frac{1}{k}} = \infty$; тогда для некоторой подпоследовательности $m_k$ натуральных чисел $\lim\limits_{k\to\infty}|c_{m_k}|^{\frac{1}{m_k}} = \infty$. Положим $d_n = 0$, $n \neq m_k$ и $d_{m_k} = \frac{a_{m_k}}{|c_{m_k}|}$, $k = 1, 2, \ldots$. Можно всегда считать, что $c_{m_k} \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Функция

$q(z)=\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ принадлежит $K(0)$, $(D_f^{m_k} q)(0)=\dfrac{a_0}{|c_{m_k}|}$ и опять ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (D_f^k q)(0)$ расходится.

Следствие 1. *Пусть $F$ удовлетворяет условиям теоремы 4 $|t|<\dfrac{R_0}{\alpha}$ и оператор (3) применим в $K(F)$ в точке $t$. Тогда справедливо неравенство (4).*

Действительно, по теореме 3 применимость оператора (3) к $K(F)$ в точке $t\in V_{\frac{R_0}{\alpha}}$ равносильна применимости в начале координат.

Следствие 2. *Пусть $G$ — открытое множество со связным дополнением, не содержащее бесконечно удаленную точку. Тогда, если оператор (3) применим к $E(G)$ в точке $z=0$, то*

$$\varlimsup_{k\to\infty} |c_k|^{\frac{1}{k}} \leqslant \frac{1}{\alpha_G}, \quad \alpha_G=\sup\{|z|:\ z\in G\}. \tag{5}$$

Действительно, если $z_n\in G$, $|z_n|\uparrow \alpha_G$, то достаточно положить $F_n=z_n$ и применить теорему 4 к классу $K(F_n)\subseteq E(G)$, $n=1, 2, \ldots$

Следствие 3. *Пусть $f(z)\in A_\infty$, а множества $F$ и $G$ такие же, как в следствиях 1 и 2. Тогда оператор (3) применим к $K(F)$ (соответственно к $E(G)$ в какой-либо конечной точке $z_0$, справедливо неравенство (4) (соответственно (5)).*

**Теорема 5.** *Пусть для оператора (3) выполняется условие (4), а множество $F$ удовлетворяет условиям теоремы 4. Тогда*

$$\forall y\in K(F),\ \forall p\in P,\quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\, q_p(D_f^k y)<\infty.$$

Доказательство. Пусть $T$ — произвольный компакт $CF$, $y\in K(F)$ и $q_p(y)=p(y)=\sup\{|y(t)|: t\in T\}$. Проведем контур $\Gamma$ так, чтобы $F\subset \operatorname{int}\Gamma$, $T\subset \operatorname{ext}\Gamma$. Тогда

$$\forall k\geqslant 0\ (D_f^k y)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(zt)\, t^k \hat{y}(t)\, dt,\quad |z|\leqslant \eta_0.$$

При всех достаточно больших $\tau$ ($|\tau|>\max\{|t|: t\in\Gamma\}$) и любом $k\geqslant 0$

$$(D_f^k y)(\tau)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma t^{s+k}\hat{y}(t)\, dt\, \tau^{-s-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\hat{y}(t)\, t^k}{\tau-t}\, dt.$$

Поэтому для всех $\tau$ вне $\Gamma$

$$(\widehat{D_f^k y})(\tau)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\hat{y}(t)\, t^k}{t-\tau}\, dt,$$

откуда

$$\sup\{|(D_f^k y)(\tau)| : \tau \in T\} = p(D_f^k y) \leqslant \frac{l(\Gamma)(\alpha_\Gamma)^k}{2\pi\rho(T, \Gamma)} \times$$

$$\times \sup\{|\hat{y}(t)| : t \in T\} = A(\alpha_\Gamma)^k q_{p_1}(y)$$

(здесь $l(\Gamma)$ — длина $\Gamma$, $\alpha_\Gamma = \sup\{|t| : t \in \Gamma\}$, $\rho(T, \Gamma)$ — расстояние между $T$ и $\Gamma$).

Контур $\Gamma$ можно взять настолько близким к $\partial F$, чтобы $\alpha_F < \alpha_\Gamma < \left[\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |c_k|^{\frac{1}{k}}\right]^{-1}$. Тогда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k| q_p(D_f^k y) < \infty$ и теорема доказана.

Отметим попутно полученный результат: $\forall p \in P$ $\exists p_1 \in P$:

$$q_p(My) \leqslant A \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| |\alpha_\Gamma|^k q_{p_1}(y) = Bq_{p_1}(y), \ \forall y \in K(F).$$

При этом постоянная $B$ не зависит от $y$ и $M$ — непрерывный оператор из $K(F)$ в $K(F)$.

Следствие. *Пусть $G$ — открытое множество, не разбивающее плоскость и не содержащее бесконечно удаленную точку, и пусть оператор* (3) *удовлетворяет условию* (5). *Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (D_f^k y)(z)$ сходится абсолютно в топологии $E(G)$ для любой функции $y(z)$ из $E(G)$.*

Действительно, если $F$ — любой компакт $G$, не разбивающий плоскость, то $\alpha_F < \alpha_G$, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |c_k|^{\frac{1}{k}} \leqslant \frac{1}{\alpha_G} < \frac{1}{\alpha_F}$, и, по теореме 5, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k D_f^k y$ для любого $y \in K(F)$ сходится абсолютно в топологии $K(F)$ и подавно сходится абсолютно в топологии $E(G)$. Остается только вспомнить, что $E(G) = \bigcup\limits_{F\subset G} K(F)$.

Заметим, что топология пространства $K(F)$ мажорирует топологию $A_{\frac{R_0}{\alpha_F}}$ (топологию равномерной сходимости на каждом компакте $V_{\frac{R_0}{\alpha_F}}$). Действительно, если $|z| \leqslant r < \frac{R_0}{\alpha_F}$ и $y \in K(F)$, то (см. § 1 работы [1])

$$y(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(zt)\, \hat{y}(t)\, dt, \ \Gamma = C_{\frac{R_0}{r_1}}, \ r < r_1 < \frac{R_0}{\alpha_F}.$$

Отсюда

$$M_r(y) \leqslant \frac{R_0}{R_1} M_{\frac{rR_0}{r_1}}(f) \cdot \max\{|\hat{y}(t)| : t \in \Gamma\} \leqslant A_r q_{p_1}(y),$$

$$A_r = \frac{R_0}{r} M_{\frac{rR_0}{r_1}}(f).$$

**Теорема 6.** *Пусть $F$ ограниченное замкнутое множество со связным дополнением и $M$ — оператор вида (3). Тогда уравнение (4) необходимо и достаточно для того, чтобы оператор $M$ был а) применим к классу $K(F)$ в какой-либо точке $z_0 \in V_{\frac{R_0}{\alpha_F}}$; б) регулярно применим к $K(F)$ внутри $V_{\frac{R_0}{\alpha_F}}$; в) абсолютно применим к $K(F)$ по топологии $K(F)$; г) применим к $K(F)$ по топологии $K(F)$.*

**Теорема 7.** *Пусть $G$ — открытое множество, не разбивающее плоскость и не содержащее бесконечно удаленную точку. Условие (5) необходимо и достаточно для того, чтобы оператор (3) был а) применим к классу $E(G)$ в начале координат; б) применим к $E(G)$ по топологии $E(G)$; в) абсолютно применим к $E(G)$ по топологии $E(G)$.*

**Теорема 8.** *Пусть множество $G$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, $f(z) \in A_\infty$, $f^{(k)}(0) \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда условие (5) необходимо и достаточно для того, чтобы оператор (3) был а) применим к $E(G)$ в какой-либо конечной точке; б) регулярно применим к $E(G)$ внутри $|z| < \infty$; в) (абсолютно) применим к $E(G)$ по топологии $E(G)$.*

**Теорема 9.** *Пусть $G$ — отграниченное открытое множество, не разбивающее плоскость. Условие (5) необходимо и достаточно для того, чтобы оператор (3) был а) применим к классу $E(G)$ в какой-либо точке $z_0 \in V_{\frac{R_0}{\alpha_G}}$; б) регулярно применим к $E(G)$ внутри $V_{\frac{R_0}{\alpha_G}}$; в) (абсолютно) применим к $E(G)$ по топологии $E(G)$.*

Заметим, что если оператор (3) удовлетворяет условию (5), то его можно представить в виде (5) из [1]. Действительно пусть $y \in E(G)$; проведем контур $\Gamma = \Gamma(y)$ в $G$ так, чтобы функция $y(t)$ была регулярна вне и на $\Gamma$. Тогда

$$(My)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (D_f^k y)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{2\pi i} \int_\Gamma f(zt)\, t^k \hat{y}(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(zt)\, g(t)\, \hat{y}(t)\, dt,$$

где функция $g(t)$ регулярна в круге $|t| < \alpha_G$, и подавно локально аналитична на множестве $G$. Таким образом, для уравнения $My = h$, где $h \in E(G)$ справедливо все, сказанное в §§ 2, 3 работы [1] относительно уравнения $Ly = h$, и, в частности, теоремы 1—2.

В случае, если $f(z) = e^z$, $G$ — ограниченная односвязная область и $F$ — замкнутое ограниченное связное множество, не разбивающее плоскость, пункты а), б) теоремы 6 и 8 получены ранее в работе [4]. При тех же предположениях относительно

$F$ и $G$, что и в [4], и тем же методом пункты а), б) теорем 6 и 8 доказаны в статье [5] для случая, когда $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$,

$$a_k \neq 0, \ k = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots; \ \lim_{k \to \infty} k^{\frac{1}{\rho}} |a_k|^{\frac{1}{k}} = (\rho e \sigma)^{\frac{1}{\rho}}, \ 0 < \rho, \ \sigma < \infty.$$

## § 7. Характеристическое свойство оператора $L$

Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in \overline{\mathrm{A}}_0, \ a_k \neq 0, \ k = 0, 1, 2, \ldots,$ $G$ — открытое множество, не содержащее бесконечно удаленную точку и не разбивающее плоскость. Пусть, далее, $l_0$ — оператор умножения на функцию $g(t) \equiv t$. Согласно результатам § 2, $l_0$ — непрерывный оператор из $E(G)$ в $E(G)$, а его сопряженный равен $(D_f y)(z)$.

Предположим, что $R$ — произвольный линейный непрерывный оператор из $E(G)$ в $E(G)$. В силу рефлексивности пространств $E(G)$ и $A(G) = E'(G)$ равенство $RD = DR$ имеет место тогда и только тогда, когда $D'R' = R'D'$ (см. [6]).

Но непрерывный линейный оператор $C$ из $A(G)$ в $A(G)$ перестановочен с оператором умножения на $t$ в том и только том случае, если $\forall x(t) \in A(G)$, $\forall t \in G$ $(Cx)(t) = a(t)x(t)$, где $a(t) \in A(G)$.

Этот результат следует из общей теоремы работы [7]: его легко получить и непосредственно, показав, что если $C_1 = \psi(z)$, то для любого многочлена $P(z)$ $(CP)(z) = P(z)\psi(z)$, откуда без труда находится, что $(CX)(z) = \psi(z) X(z)$ уже для всех $X$ из $A(G)$.

Итак, равенство $RD = DR$ имеет место тогда и только тогда, когда $R$ — сопряженный к оператору $lx = a(t)x(t)$, т. е. оператор вида (5) из [1]. Сформулируем полученный результат.

**Теорема 10.** *Пусть* $f(z) \in \overline{A}_0$, $f^{(k)}(0) \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots;$ *$G$ — открытое множество со связным дополнением, не содержащее бесконечно удаленную точку. Тогда общий вид линейного непрерывного на $E(G)$ оператора, перестановочного с оператором обобщенного дифференцирования (1) дается формулой (5) из [1].*

Совершенно аналогично находится общий вид линейных непрерывных на $K(F)$ операторов, перестановочных с $D_f$. Заметим, что в частном случае $f(z) = e^z$, $KF = \{z : |z| \leqslant r\}$. Это представление (в виде дифференциального оператора бесконечного порядка с постоянными коэффициентами) найдено еще в 1944 г. Боасом [8].

Вопрос о разрешимости неоднородного уравнения (1) и о структуре общего решения соответствующего однородного уравнения в классах $E(G)$ и $K(F)$ решен в случае $f(z) = e^z$ иным методом Диксоном [9] при условии, что $g(z) \not\equiv 0$ в $G$.

**Список литературы:** 1. *Коробейник Ю. Ф.* Об одном функциональном уравнении. I.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 30. Харьков, 1978, с. 71—82. 2. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М., ИЛ, 1961. 508 с. 3. *Привалов И. И.* Граничные свойства однозначных аналитических функций. Под ред. А. И. Маркушевича. М.— Л., 1950. 336 с. 4. *Коробейник Ю. Ф.* Критерии применимости дифференциальных операторов бесконечного порядка к некоторым классам экспоненциальных функций.— Годишник на ВТУЗ. Математика, т. VIII, кн. 3, София, 1972, с. 9—18. 5. *Коршикова Т. И.* О применимости оператора бесконечного порядка в производных Гельфонда — Леонтьева к некоторым классам целых функций.— «Мат. анализ и его приложения», Ростов/нД, 1975, изд-во РГУ, т. VII, с. 57—63. 6. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. М., «Мир», 1971. 357 с. 7. *Захарюта В. П., Царьков М. Ю.* Операторы, коммутирующие с умножением в пространствах аналитических функций одного переменного.— «Мат. заметки», 1973, т. 13, вып. 2, с. 269—277. 8. *Bcas R. P.* Functions of exponential tupe. III.— «Duke math. j», 1944, vol. 11. p. 507—511. 9. *Dickson D. J.* Convolution eq tions and harmonic analysis in spaces of entire functions.— «Transactions of the American Mathematical Society», 1973, vol. 184, p. 373—386.

*Поступила 10 февраля 1975 г.*