УДК 513.88

С. М. ГУТМАН

# О ГОМЕОМОРФИЗМАХ НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫХ B-ПРОСТРАНСТВ. II

## 6. Гомеоморфизм пространств с базисом

Напомним, что мы рассматриваем локально равномерно выпуклое пространство $X$ с монотонным проекционным базисом $\{S_\alpha\}_{\alpha<\xi}$ и соответствующим ему базисом Шаудера $\{e_\alpha\}_{\alpha<\xi}$.

Пусть $Q=\{\alpha_\mu\}_{\mu\in M}$ — замкнутое, не более чем счетное подмножество отрезка $[0,1]$, вполне упорядоченное по убыванию на $[0,1]$.

Определение. *Диадическим приближением множества $Q$ (порядка $n$, $n\in N$) называется множество*

$$Q_n=\left\{d_\mu\in Q:\ \bigcup_m\left\{d_\nu\in Q:\frac{m}{2^n}\leqslant d_\nu<d_\mu\right\}=\varnothing,\ 0\leqslant m\leqslant 2^n-1\right\}.$$

Так как $Q$ — вполне упорядочено, то $Q=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}Q_n$, $|Q_n|\leqslant 2^n$.

Пусть каждому такому множеству $Q$ однозначно сопоставлен функционал $B(x,Q)$, заданный и непрерывный на шаре $W(X)$ пространства $X$ с четырьмя группами свойств. (Конструкция функционала $B$ приведена в следующем параграфе).

I группа: а) $B(0,Q)=1$, $B(x,Q)=0$, при $x\in U(X)$;

в) $B\in D[W(X)]$ (см. ч. I, § 3 [1])*, т. е. $B(S_\alpha x+te_\alpha)$ строго убывает с ростом модуля $t$;

с) на поверхности уровня $B(x,Q)=d_\mu$ $(d_\mu\in Q)$ выполнено индикаторное свойство [1, § 3], т. е. из $B(s_\alpha,Q)\to d_\mu$ при $\alpha\to\mu$, $s_\alpha=\sum\limits_{\beta<\alpha}a_\beta e_\beta$ следует, что направленность $\{s_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ сходится. Эти

* Гутман С. М. О гомеоморфизмах несепарабельных $B$-пространств. Ч. I. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 30. Харьков, 1977, с. 37—43.

свойства позволяют однозначно сопоставить с каждым $y \in l_1[A]$, $\|y\| = 1$ элемент $x \in U(X)$.

Определим множество $Q_y = \{1 - \|S_\alpha y\|\}_{\alpha \in A} = \{d_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Пусть $S_1 = 0$ и построены $s_\gamma \in X$ для $\gamma < \alpha$: а) $\alpha = \mu + 1$. Положим $s_\alpha = s_\mu \pm t_\alpha e_\alpha$, где $t_\alpha \geqslant 0$, знак $t_\alpha$ совпадает со знаком $f_\alpha(y)$; $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ и $t_\alpha$ найдено из условия $B(s_\mu \pm t_\alpha e_\alpha) = 1 - \|S_\alpha y\|$; в) $\alpha$ — предельный. Поскольку $B(s_\gamma, Q_y) = 1 - \|S_\gamma y\|$, то $B(s_\gamma, Q_y) \to 1 - \|S_\alpha y\|$ при $\gamma \to \alpha$. По свойству 1 (c), $\{s_\gamma\}_{\gamma < \alpha}$ сходится (к $s_\alpha$). При $\alpha = \xi$ получим искомый элемент $x$.

Таким образом определено однозначное отображение $H: U \times [l_1[1, \xi)] \to U(X)$.

II группа: а) Пусть $x \in U(X)$, тогда ему однозначно соответствует множество $Q_x \subset [0,1]$, такое, что $\{B(S_\alpha x, Q_x)\}_{\alpha \in A} = Q_x$. Это свойство обеспечивает взаимную однозначность отображения $H$. Пусть $x \in U(X)$ и $Q_x$ — соответствующее ему множество. Определим $y \in U[l_1[1, \xi)]$; $y = \sum\limits_{\alpha < \xi} sign f_\alpha(x) [B(S_\alpha x, Q_x) - B(S_{\alpha+1}x, Q_x)]$.

По I, в) выражение в квадратных скобках неотрицательно. По II, а) $\{1 - \|S_\alpha y\|\}_{\alpha \in A} = Q_y = Q_x$ и, следовательно, $Hy = x$.

III группа: а) если $\|y_i - y_0\| \xrightarrow[i]{} 0$, $\|y_i\| = 1$, то $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x_0 \in W(X)$, $\exists j$, $\exists \delta$: $\forall i > j$, $\forall x: \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |B(x, Q_{y_i}) - B(x_0, Q_{y_0})| < \varepsilon$; в) если $\|y_i - y_0\| \xrightarrow[i]{} 0$, $\|y_i\| = 1$, то семейство функционалов $B(x, Q_{y_i})$ непрерывно в точке $y_0$. Это означает (§ 5, (1)), что $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta: \|y_i - y_0\| < \delta \Rightarrow B((1+\varepsilon)x, Q_{y_i}) \leqslant B(x, Q_{y_0}) \leqslant B((1-\varepsilon)x, Q_{y_i})$, $\forall x \in W(X)$ и $\exists T > 0$, такое, что $B(t_1 x, Q) - B(t_2 x, Q) \geqslant T \times (t_2 - t_1)$ для $t_1 \leqslant t_2$; с) каждая поверхность уровня $B(z, Q_x) = d_\mu$, где $d_\mu \in Q_x$, $z \in W(X)$ порождает локально равномерную выпуклую норму.

Докажем непрерывность $H$. Пусть $y_n \xrightarrow[n]{} y_0$, $\|y_n\| = 1$, $x_n = Hy_n$ (тогда, конечно, $Q_{x_n} = Q_{y_n}$). Следовательно, выполнено (1), $B(S_\alpha X_n, Q_{x_n}) = 1 - \|S_\alpha y_n\| \xrightarrow[n]{} 1 - \|S_\alpha y_0\| = B(S_\alpha x_0, Q_{x_0})$.

Установим по индукции, что $S_\tau x_n \to S_\tau x_0$, $\forall \tau < \alpha$. $S_1 x = 0 \times$ $\times$ а) $\tau = \alpha + 1$. Рассмотрим $\psi_n(t) = B(S_\alpha x_n + te_\alpha, Q_{yn})$. По III, а) $\psi_n(t) \to \psi_0(t)$ поточечно. Все $\psi_n$ строго убывают по $t$ (свойство I, в) и $|t| \leqslant c$, так как $S_\alpha x_n + te_\alpha \in W(X)$. Следовательно, $\psi_n(t) \to \psi_0(t)$ равномерно по $t$, а так как (1) означает, что $\psi_n(t_n) \to \psi_0(t_0)$, то $t_n \to t_0$ и $S_\alpha x_n \to S_\alpha x_0$; в) $\tau$ — предельный. Пусть $S_\alpha x_n \to S_\alpha x_0$, $\forall \alpha < \tau$, по III в) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N: \forall n > N$, $\forall x \in W(X)$ $B((1+\varepsilon)x, Q_{y_n}) \leqslant B(x, Q_{y_0}) \leqslant B((1-\varepsilon)x, Q_{y_n})$.

Отметим следующее:

$$1) \quad B\left(\frac{S_\tau x_n + S_\tau x_0}{2}, Q_{y_0}\right) \leqslant B\left(\frac{S_\alpha x_n + S_\alpha x_0}{2}, Q_{y_0}\right) \xrightarrow[n]{} B(S_\alpha x_0, Q_{y_0}) \leqslant B(S_\tau x_0, Q_{y_0}) + \varepsilon, \text{ (при } \alpha > \alpha_0);$$

2) $B(S_\tau x_n,\ Q_{y_0}) \leqslant B(S_\alpha x_n,\ Q_{y_0}) \underset{n}{\to} B(S_\alpha x_0,\ Q_{y_0})$;

3) $B\left(\frac{1}{1-\varepsilon} S_\tau x_n,\ Q_{y_0}\right) \leqslant B\left(S_\tau x_n,\ Q_{y_n}\right) \underset{n}{\to} B(S_\alpha x_0,\ Q_{y_0})$.

Пусть $|\cdot|$ — эквивалентная, локально равномерно выпуклая норма, порожденная поверхностью $B(x,\ Q_{y_0}) = 1 - \| S_\tau y_0 \| = B \times (S_\tau x_0,\ Q_{y_0})$ свойство III, c), тогда 1), 2), 3) можно переписать в виде

$$\underline{\lim_n} \left| \frac{S_\tau x_n + S_\tau x_0}{2} \right| \geqslant 1; \ \overline{\lim_n} \, | S_\tau x_n | \leqslant 1; \quad \underline{\lim_n} \left| \frac{1}{1-\varepsilon} S_\tau x_n \right| \geqslant 1,$$

откуда

$$| S_\tau x_n | \underset{n}{\to} 1 \text{ и } \left| \frac{S_\tau x_n + S_\tau x_0}{2} \right| \underset{n}{\to} 1.$$

Следовательно,

$$| S_\tau x_n - S_\tau x_0 | \underset{n}{\to} 0 \text{ и } S_\tau x_n \underset{n}{\to} S_\tau x_0.$$

IV группа: а) (аналог III, а). Если $\| x_i - x_0 \| \underset{i}{\to} 0$, $\| x_i \| = 1$, то $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x_0 \in W(X)$, $\exists j$, $\exists \delta : \forall i > j$, $\forall x : \| x - x_0 \| < \delta \Rightarrow | B(x,\ Q_{x_i}) - B(x_0,\ Q_{x_0}) | < \varepsilon$.

Если выполнено IV, а), то $1 - \| S_\alpha y_i \| = B(S_\alpha x_i,\ Q_{x_i}) \to B \times (S_\alpha x_0,\ Q_{x_0}) = 1 - \| S_\alpha y_0 \|$, т. е. $\| S_\alpha y_i \| \to \| S_\alpha y_0 \|$ и $y_i \underset{i}{\to} y_0$ покоординатно (в $l_1[A]$). Откуда $\| y_i - y_0 \| \underset{i}{\to} 0$.

Таким образом, $H$ — гомеоморфизм единичных сфер пространств $X$ и $l_1[1,\ \xi)$. На все пространство $X$ его можно продолжить радиально: $\widetilde{H}(y) = \| y \| \cdot H(y / \| y \|)$, $H(0) = 0$.

## 7. Конструкция функционала $B$

Функционал $B(x,\ Q)$ будем строить индукцией по диадическим приближениям $Q_n$ множества $Q$ (см. § 6). Обозначим $B_0(x,\ Q) = -1/3\,[(\| x \| + 1)^2 - 4]$. Пусть построен $B_{n-1} \times (x,\ Q)$. Рассмотрим множество $Q_n = \{d_n^m\}$, где $0 \leqslant m \leqslant 2^n - 1$, $| Q_n | \leqslant 2^n$, $\frac{m}{2^n} \leqslant d_n^m < \frac{m+1}{2^n}$. Определим

$$\overline{M}_n^m = \left\{ x \in W(X) : d_n^m \leqslant B_{n-1}(x,\ Q) \leqslant \frac{m+1}{2^n} \right\};$$

$$\overline{M}_n^m = \left\{ x \in W(X) : \frac{m}{2^n} \leqslant B_{n-1}(x,\ Q) \leqslant d_n^m \right\}.$$

Определим

$$B_n(x,\ Q) = \begin{cases} \frac{m}{2^n} + E\left(x,\ \frac{m}{2^n},\ d_n^m,\ Q\right) \text{ при } x \in \underline{M}_n^m, \\ d_n^m + E\left(x,\ d_n^m,\ \frac{m+1}{2^n},\ Q\right) \text{ при } x \in \overline{M}_n^m, \end{cases}$$

где $0 \leqslant m \leqslant 2^n - 1$. Если $\left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right] \cap Q = \varnothing$, то $B_n(x, Q) = \frac{m}{2^n} + E\left(x, \frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}, Q\right)$.

Функционал $E(x, a, b, Q)$ при заданном $n$ строится так (см. I часть наст. работы), опираясь на леммы 5—10.

Рассмотрим поверхность уровня $B_{n-1}(x, Q) = a$ и соответствующую ей локально равномерно выпуклую норму. Строим по ней функционал $F(x)$ (§ 3). Обозначим $p_1(x) = \max\left\{\frac{b-a}{2} F(x), B_{n-1}(x, Q) - a\right\}$, при $a \leqslant B_{n-1}(x, Q) \leqslant b$ и $p_1(x) = b - a$, при $B_{n-1}(x, Q) \geqslant b$, $E(x, a, b, Q) = \frac{1}{4n^2}\overline{p_1(x)} + \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)[B_{n-1} \times (x, Q) - a]$, при $a \leqslant B_{n-1}(x, Q) \leqslant b$. Наконец, $B(x, Q) = \lim\limits_n B_n(x, Q)$. Для функционала $B(x, Q)$ выполнены четыре группы свойств, указанных в предыдущем параграфе. Их доказательства основаны на том, что каждый из функционалов $B_n(x, Q)$ обладает соответствующими свойствами. При этом $B_{n+1}(x, Q) \geqslant B_n(x, Q)$, $\forall x \in W(X)$ и $B_{n+1}(x, Q) - B_n(x, Q) \leqslant \frac{1}{2^n}$.

Кроме того, для них выполнено (*) [§ 5 (1) с $T = 1/3$].

Приведем указания к доказательству некоторых свойств. I, c) следует из того, что функционалы $E$ обладают индикаторным свойством. II, a) построим $Q_x$ по индукции. Положим $Q^0 = \varnothing$ и $R^n = \{B_n(S_\alpha x, Q^n)\}_{\alpha \in A}$, $Q^{n+1} = R^n_{n+1}$ (т. е. диадическое приближение множества $R^n$ порядка $n+1$). Заметим, что функционал $B_0(x, Q)$ от $Q$ не зависит; $Q_x = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q^n$, тогда $(Q_x)_n = Q^n$ и $B_n(S_\alpha x, Q_x) = B_n(S_\alpha x, (Q_x)_n)$. III, в) докажем индукцией по диадическим приближениям множеств $Q_{y_i}$ и соответствующим функционалам $B_n$. Предположим, что семейство функционалов $B_{n-1}(x, (Q_{y_i})_n)$ непрерывно в точке $y_0$. Тогда все сводится к установлению непрерывности семейств соответствующих функционалов $E$, что, в свою очередь, определяется, используя непрерывность семейств $F$, $p_1$, $\overline{p}_1$. Этому посвящен § 5 (леммы 11—14).

Аналогично устанавливается непрерывность семейства функционалов $B(x, Q_{x_i})$ в точке $x_0$ при $x_i \underset{i}{\to} x_0$. III, a) и IV, a) — эти свойства являются следствием того, что соответствующие семейства функционалов непрерывны (см. III, в)). Пусть $\varepsilon > 0$, $x_0 \in W(X)$. Выберем $\delta_1$: $\|x - x_0\| < \delta_1 \Rightarrow |B(x, Q_{y_0}) - B(x_0, Q_{y_0})| < \varepsilon$.

Пусть $\delta_2 < 1/2\ \delta_1$ и из $\|x - x_0\| < \delta_2 \Rightarrow |B(x, Q_{y_0}) - B(x_0, Q_{y_0})| < \varepsilon/2$.

Выберем $J : \forall i > J\ B[(1 + \delta_2)x, Q_{y_0}] \leqslant B(x, Q_{y_i}) \leqslant B[(1 - \delta_2)x, Q_{y_0}]$.

Тогда $\forall x : \| x - x_0 \| < \delta_2 B(x, Q_{y_i}) \leqslant B[(1-\delta_2)x, Q_{y0}] \leqslant B \times$ $\times (x_0, Q_{y0}) + \varepsilon$, поскольку $\| (1-\delta_2)x - x_0 \| = \| x - x_0 - \delta_2 x \| \leqslant$ $\leqslant \| x - x_0 \| + \delta_2 \leqslant 2\delta_2 < \delta_1$. Аналогично $B(x, Q_{y_i}) \geqslant B[(1+\delta_2)x,$ $Q_{y0}] \geqslant B(x_0, Q_{y0}) - \varepsilon$.

Таким образом, $| B(x, Q_{y_i}) - B(x_0, Q_{y0}) | \leqslant \varepsilon$.

Автор приносит глубокую благодарность М. И. Кадецу за постоянное внимание и помощь в работе.

*Поступила 14 июля 1977 г.*