УДК 513.881

В. А. ГРАЧЕВ, М. М. ДРАГИЛЕВ

О МАКСИМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ КЁТЕ С ПРАВИЛЬНЫМ БАЗИСОМ

Пусть E — класс всех F-пространств с непрерывной нормой, имеющих правильный* абсолютный базис, и пусть $X \in E$ и $Y \in E$. Две последовательности элементов $(x_n) \subset X$ и $(y_n) \subset Y$ назовем эквивалентными ($(x_n) \sim (y_n)$), если выполнено следующее условие: для любой последовательности чисел (t_n) ряд $\sum\limits_n t_n x_n$ тогда и только тогда абсолютно сходится в X, когда ряд $\sum\limits_n t_n y_n$ абсолютно сходится в Y.

Положим $X \leqslant Y$, если для любой хотя бы одной пары правильных базисов (x_n) в X и (y_n) в Y существуют а) последовательность положительных чисел (λ_n) и б) неубывающая функция $k(n)$, такие, что $(x_n) \sim (\lambda_n y_{k(n)})$. Тем самым, как легко видеть, вводится отношение квазиупорядоченности в E. Пространство $X \in E$ назовем максимальным, если для любого $Y \in E$ из того, что $X \leqslant Y$, следует $Y \leqslant X$. Если $X \in E$ — максимальное пространство, то множество всех тех $Y \in E$, для которых $Y \leqslant X$, называют классом Рисса (ср. [1]). Таковы, в частности [1], классы всех пространств степенных рядов конечного или бесконечного типа (или, что то же, соответственно, классы всех конечных и всех бесконечных центров шкал Рисса).

Условимся через X^1 обозначать подпространство единичной коразмерности в X. В работе [1] показано, что условие $X^1 \cong X$ необходимо и достаточно для того, чтобы X было максимальным пространством в некотором классе, более узком, чем E. Недавний результат В. Кондакова [2] и Крона-Робинсона [3] позволяет распространить это утверждение также на класс E (см. теорему), причем доказательство значительно упрощается.

Введем необходимые обозначения. Пусть

$$\delta((x_n)) = \left\{(t_n) : \exists_p \forall_q t_n \frac{|x_n|_q}{|x_n|_p} \to 0\right\}.$$

Заметим, что $\delta((x_n)) \supset \delta((x_{n+1}))$. Если $(y_n) \subset Y$ — еще одна правильная последовательность, то равенство $\delta((x_n)) = \delta((y_n))$ эквивалентно следующему: найдутся числа $\lambda_n > 0$ $(n = 1, \ldots)$, такие, что $(x_n) \sim (\lambda_n y_n)$ (см. [2], [3]). Если (x_n) — правильный базис в X, то $\delta((x_n)) = \delta(X)$, где $\delta(X)$ — диаметральная размерность пространства X.

---

* Последовательность $(x_n) \subset X$ называют правильной, если найдется определяющая система норм $(|\cdot|_p)$ в X, такая, что $|x_n|_p / |x_n|_{p+1} \downarrow 0$ $(p = 1, 2, \ldots)$.

Лемма 1. Если $X \cong X^1$ и $X \leqslant Y$, то $Y \simeq Y^1$ и $Y \leqslant X$.

Доказательство. Пусть (x_n) — правильный базис в X. Без ограничения общности можно считать, что X^1 — подпространство с базисом $x_2, \ldots, x_{n+1}$. Так как $X \simeq X^1$, то $\delta((x_n)) = \delta((x_{n+1}))$. Так как $X \leqslant Y$, то для правильного базиса (y_n) в Y найдется неубывающая функция $k(n)$, такая, что $\delta((x_n)) = \delta((y_{k(n)}))$. Пусть $k(n) = k_1\ (1 \leqslant n < n_1)$, $k(n) = k_{i+1}\ (n_i \leqslant n < n_{i+1})$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Тогда имеем

$$\delta((y_{k_i})) = \delta((x_{n_i-1})) = \delta((x_{n_i})) = \delta((y_{k_{i+1}})). \tag{1}$$

Построим три последовательности элементов: (y_n^1), (y_n^2) и (x_n^1), положив соответственно $y_n^1 = y_1\ (1 \leqslant n \leqslant k_1)$, $y_n^1 = y_{k_i}\ (k_i < n \leqslant k_{i+1})$; $y_n^2 = y_{k_1}\ (1 \leqslant n \leqslant k_1)$, $y_n^2 = y_{k_{i+1}}\ (k_i < n \leqslant k_{i+1})$; $x_n^1 = x_1\ (1 \leqslant n \leqslant k_1)$, $x_n^1 = x_{n_i}\ (k_i < n \leqslant k_{i+1})\ (i = 1, 2, \ldots)$.

Как вытекает из (1), $\delta((y_n^1)) = \delta((y_n^2)) = \delta((x_n^1))$. Но очевидно, $\delta((y_n^1)) \supset \delta((y_n)) \supset \delta((y_n^2))$. Следовательно, $\delta((y_n)) = \delta((x_n^1))$ или, что то же, $(y_n) \sim (\lambda_n x_{k'(n)})$ для некоторых $\lambda_n\ (n = 1, \ldots)$ и для функции $k^1(n)$, такой, что $x_{k^1(n)} = x_n^1$, другими словами, $k^1(n) = 1\ (1 \leqslant n \leqslant k_1)$ и $k^1(n) = n_i\ (k_i \leqslant n \leqslant k_{i+1})$, $(i = 1, 2, \ldots)$. Тем самым доказано, что $Y \leqslant X$. Заметим, далее, что в последовательностях (y_n^1) и (y_{n+1}^1) все соответственные элементы совпадают, кроме следующих:

$$y_{k_1}^1 = y_1 \text{ и } y_{k_1+1}^1 = y_{k_1};\ y_{k_i}^1 = y_{k_{i-1}} \text{ и } y_{k_i+1}^1 = y_{k_i}\ (i = 2, 3 \ldots).$$

Так как в силу (1) $\delta((y_{k_{i-1}})) = \delta((y_{k_i}))$, то $\delta((y_n^1)) = \delta((y_{n+1}^1))$, а, поскольку $\delta((y_n)) = \delta((y_n^1))$, то и $\delta((y_n)) = \delta((y_{n+1}))$. Этим доказано, что $Y \simeq Y^1$.

Лемма 2. *Для каждого пространства $X \in E$ найдется пространство $Y \in E$, такое, что $Y \simeq Y^1$ и $Y \geqslant X$.*

Доказательство. Пусть (x_n) — правильный базис в X. Тогда для некоторой системы норм $(|\cdot|_p)$, определяющей топологию X, выполнено соотношение

$$\frac{|x_n|_p}{|x_n|_{p+1}} \downarrow 0\ (n \to \infty,\ p = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$|x_n|_p \leqslant |x_{n+1}|_p \tag{3}$$

при любых n и p (это достигается нормировкой элементов базиса). Пусть натуральные числа m_n таковы, что выполняются неравенства

$$\frac{|x_1|_1 (m_1 - 1) + |x_2|_1}{m_1 |x_1|_2} \leqslant 2;$$

$$\frac{|x_n|_p (m_n - 1) + |x_{n+1}|_p}{m_n |x_n|_{p+1}} \leqslant 2\ (p = 1, \ldots, n).$$

Положим

$$|y_1|_p = |x_1|_p; \ |y_{1+i}|_p = \frac{1}{m_1}[|x_1|_p (m_1 - i) + |x_2|_p i] \ (1 \leqslant i \leqslant m_1);$$

$$|y_{m_1+\dots+m_{n-1}+1+i}|_p = \frac{1}{m_n}[|x_n|_p (m_n - i) + |x_{n+1}|_p i] \ (n = 2, 3, \dots; \ p = 1, 2 \dots), \quad (1 \leqslant i \leqslant m_n).$$

Как вытекает из (2) и (3), числа $|y_j|_p \, (p = 1, \dots)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\text{а)} \ \frac{|y_j|_p}{|y_j|_{p+1}} \downarrow 0 \ (j \to \infty, \ p = 1, 2, \dots);$$

$$\text{б)} \ \frac{|y_j|_p}{|y_{j+1}|_{p+1}} \leqslant 1 \quad (j, \ p = 1, 2 \dots); \tag{4}$$

$$\text{в)} \ \frac{|y_{j+1}|_1}{|y_j|_2} \leqslant 2 \quad (j = 1, 2 \dots), \ \frac{|y_{j+1}|_p}{|y_j|_{p+1}} \leqslant 2 \, (j > m_1 + m_{p-1}, \ p = 2 \dots).$$

Докажем, например, в). Пусть для простоты $p = 1$ и $1 \leqslant j \leqslant m_1$. По построению имеем

$$\frac{|y_{j+1}|_1}{|y_j|_1} \leqslant \frac{|y_{j+1}|_2}{|y_j|_2} \leqslant \frac{|y_j|_2}{|y_{j-1}|_2}.$$

Следовательно,

$$\frac{|y_{j+1}|_1}{|y_j|_2} \leqslant \frac{|y_j|_1}{|y_{j-1}|_2} \leqslant \dots \leqslant \frac{|y_2|_1}{|y_1|_2} = \frac{|x_1|_1 (m_1 - 1) + |x_2|_1}{m_1 |x_1|_2} \leqslant 2.$$

При других значениях j и p доказательство вполне аналогично. Возьмем теперь в качестве Y пространство Кете всех числовых последовательностей (t_n), для которых $|(t_n)|_p = \sum_n |t_n| \, |y_n|_p < \infty$ при любом $p = 1, 2, \dots$ (с топологией, задаваемой системой норм $(|\cdot|_p)_{p=1}^{\infty}$. Абсолютный базис этого пространства (y_n), $y_n = (\delta_{in})_{i=1}^{\infty}$ $(n = 1, \dots)$ является правильным в силу первого соотношения (4). Два других соотношения (4) означают, что $Y \simeq Y^1$. Наконец, так как $|x_1|_p = |y_1|_p$ и $|x_n|_p = |y_{m_1+\dots+1}|_p$ для всех $p = 1, 2, \dots$, то $X \leqslant Y$.

Теорема. *Пространство $X \in E$ тогда и только тогда является максимальным, когда $X \simeq X^1$*

В самом деле, если $X \simeq X^1$, то пространство X максимально в силу леммы 1. Если же $X \neq X^1$, то по лемме 2 найдем такое Y, что $Y \simeq Y^1$ и $Y \geqslant X$. Так как X максимально, то $Y \leqslant X$ и по лемме 1 $X \simeq X^1$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Из нее и из леммы 2, в частности, вытекает

Следствие. Каждое пространство с правильным базисом принадлежит некоторому классу Рисса.

Список литературы: **1.** *Драгилев М. М.* Классы Рисса и кратные правильные базисы. В кн.: Теория функций, функц. анализ и их приложения. Вып. 15. Харьков, 1972, с. 55—78. **2.** *Кондаков В. П.* Оквазиэквивалентности правильных базисов пространств Кете.— В кн.: Мат. анализ и его приложения. Ростов-на-Дону, 1974, т. 5, с. 210—213. **3.** Crone L., Robinson W. B. Every nuclear Frechet spaces with a regular basis the quasi — equivalence property. Studia math, 1975, 52, N 3, p. 203—207.

Поступила 9 июня 1975.