УДК 547977.3+547974.5

Г. Н. ГЕСТРИН

К ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ В МНОГОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Ю. М. Березанский [1] показал, что в классе кусочно-аналитических функций потенциал $v(x, y, z)$ в операторе $-\Delta + v(x, y, z)$ полностью определяется, если известны значения $\theta(x, y, 0; x', y', 0; \lambda)$ его спектрального ядра $\theta(\vec{r}, \vec{r}', \lambda)$ $\vec{r} = (x, y, z)$; $\vec{r}' = (x', y', z)'$ при $z = z' = 0$ $(-\infty < \lambda < +\infty)$. Предполагается, что $v(x, y, z) = v(x, y, -z)$. Таким образом, функция трех переменных определяется по функции пяти переменных. Естественно предполагать, что на самом деле $v(x, y, z)$ должна определяться функцией $\theta(x, y, 0; x, y, 0; \lambda)$.

Рассматривая задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - v(x, y, z)\, u; \quad u|_{t=+0} = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{1}$$

и представляя решение $u(\vec{r}, \vec{r}', t)$ этой задачи интегралом по условной мере Винера

$$u(\vec{r}, \vec{r}', t) = \int\limits_{C(\vec{r},\, 0;\, \vec{r}',\, t)} e^{-\int\limits_0^t v(\vec{r}(s))ds} \, \underset{W(\vec{r},\, 0;\, \vec{r}',\, t)}{d\vec{r}(s)}. \tag{2}$$

Докажем теорему единственности.

Теорема. *В классе целых функций, ограниченных снизу (в вещественном пространстве), порядки роста которых в комплексном пространстве C^n меньше двух и четных по аргументу x_n, потенциал полностью определяется, если в сколь угодно малой окрестности точки $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ задана асимптотика при $\lambda \to +\infty$ функции $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0; x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0; \lambda)$ $(\theta(x_1, \ldots, x_n; x_1', \ldots, x_n'; \lambda))$ — спектральное ядро $H = -\Delta + v(x_1, \ldots, x_n)$, рассматриваемого во всем пространстве R_n).*

Как видно, в этой теореме разрешается рост потенциала в бесконечности. Важным моментом также является независимость применяемого метода доказательства от размерности пространства. Мы будем исходить по-прежнему из формулы (2), которая при $\vec{r'} = \vec{r}$ может быть переписана в виде

$$u(\vec{r}, \vec{r}, t) = \frac{1}{t^{3/2}} \int\limits_{C(0,\,0;\,1,\,0)} e^{-t\int\limits_0^1 v(\vec{r}+\sqrt{t}\vec{p}(s))\,ds} d\vec{P}_{w(0,\,0;\,1,\,0)}(s). \tag{3}$$

Доказательство проведем только два случая трех переменных, так как это несколько сокращает запись, не нарушая общности.

Предположение об аналитичности потенциала в R_3, очевидно, означает продолжаемость по каждому из аргументов в комплексную область и сходимость всюду в C^3 ряда Тейлора;

$$v(\vec{r} + \sqrt{t}z) = \sum_{\|k\|=0}^{\infty} a_{k_1 k_2 k_3}(\vec{r})(\sqrt{t}z_1)^{k_1}(\sqrt{t}z_2)^{k_2}(\sqrt{t}z_3)^{k_3},$$

($\|k\| = k_1 + k_2 + k_3$). Обозначая через ρ_1, ρ_2, ρ_3 ($\rho_k < 2 - \varepsilon$; $k = 1, 2, 3$) и σ_1, σ_2, σ_3 ($0 \leqslant \sigma_k$; $k = 1, 2, 3$) сопряженные порядки и соответствующие сопряженные типы, приведем оценки коэффициентов $a_{k_1 k_2 k_3}(\vec{r})$ и самой функции, обобщающие классические теоремы на случай многих переменных [2, 3]:

$$|a_{k_1 k_2 k_3}(\vec{r})| \leqslant \prod_{j=1}^{3} \left(\frac{\sigma_j e \rho_j}{k_j}\right)^{\frac{k_j}{\rho_j}}$$

$$\max |v(\vec{r} + \sqrt{t}z)| \leqslant \sum_{\|k\|=0}^{\infty} |a_{k_1 k_2 k_3}(\vec{r})| \, |\sqrt{t}R_1|^{k_1} |\sqrt{t}R_2|^{k_2} |\sqrt{t}R_3|^{k_3} \leqslant$$

$$\leqslant A_0 \exp\left(\sum_{j=1}^{3} (\sigma_j + \eta) |\sqrt{t}R_j|^{\rho_j}\right) \tag{4}$$

(A_0 — постоянная; η — как угодно мало). Оценка (4) обеспечивает суммируемость по мере Винера функционалов $F(\vec{P}(s)) = \left(\int\limits_0^1 |v(\vec{r} + \sqrt{t}\vec{P}(s))| \, ds\right)^m$. Действительно, если $|\vec{P}(s)| < Bh$, то при $h \geqslant 1$ и $0 < t < T$.

$$|F(\vec{P}(s))| \leqslant A_0 e^{3(\max \sigma_j + 1) B^2 T m h^{2-\varepsilon}} = P(h). \tag{5}$$

Существуют подмножества E_h ($h = 1, 2, \ldots$) траекторий $\vec{P}(s)$, на которых $|\vec{P}(s)| < Bh$, такие, что если $|F(\vec{P}(s))| < P(h)$ на E_h и ряд $\sum h^{-1} p(h+1) \exp(-h^2)$ сходится, то $F(\vec{P}(s))$ суммируем [4] (рассуждение, проведенное в [4] для одномерных траекторий и безусловной меры, без изменений переносится на трехмерные траектории и условную меру). Предположение о том, что сопряженные порядки роста $v(\vec{r})$ меньше двух и обеспечивает сходимость последнего ряда. Теперь можно в (4) разложить в ряд экспоненту и интегрировать по мере Винера отдельные слагаемые. Получающиеся интегралы существуют. Разложение следует брать с остаточным членом, который имеет вид

$$\frac{(-1)^{q+1}}{(q+1)!} t^{q+1} \left(\int_0^1 v(\vec{r} + \sqrt{t}\vec{P}(s))\, ds\right)^{q+1} Q(\vec{r},\ t,\ \vec{P}(s)) \tag{6}$$

$$(0 \leqslant Q(\vec{r},\ t,\ \vec{P}(s)) \leqslant e^{aT};\ -a \leqslant v(\vec{r});\ t \leqslant T).$$

Будем считать, что вектор $\vec{r}$ лежит в плоскости $x_3 = 0$ и как угодно мал. Мы должны проследить возможность последовательного определения коэффициентов Тейлора. Очевидно,

$$t^{3/2}(u(\vec{r},\ \vec{r},\ t) - (2\pi t)^{-3/2}) =$$

$$= -t \int\limits_{C(0,\ 0;\ 1,\ 0)} \sum_{\|k\|=0}^{\infty} a_{k_1k_2k_3}(\vec{r}) \sqrt{t}^{\|k\|} \int_0^1 x_1^{k_1}(s)\, x_2^{k_2}(s)\, x_3^{k_3}(s)\, ds\, \underset{W(0,\ 0;\ 1, 0)}{d\vec{P}(s)} +$$

$$+ \sum_{m=2}^{q} (-1)^m \frac{t^m}{m!} \int\limits_{C(0,\ 0;\ 1,\ 0)} \left(\sum_{\|k\|=0}^{\infty} a_{k_1k_2k_3}(\vec{r}) \sqrt{t}^{\|k\|} \times \right. \tag{7}$$

$$\left. \times \int_0^1 x_1^{k_1}(s)\, x_2^{k_2}(s)\, x_3^{k_3}(s)\, ds\right)^m \underset{W(0,\ 0;\ 1,\ 0)}{d\vec{P}(s)} +$$

$$+ \frac{(-1)^{q+1}}{(q+1)!} t^{q+1} \int\limits_{C(0,\ 0;\ 1,\ 0)} \left(\int_0^1 v(\vec{r} + \sqrt{t}\vec{P}(s)\, ds\right)^{q+1} Q(\vec{r},\ t,\ \vec{P}(s)) \underset{W(0;\ 1,\ 0,\ 0)}{d\vec{P}(s)}.$$

Положим

$$R_\alpha(\vec{r},\ t,\ \vec{P}(s)) = \sum_{\|k\|=\alpha+1}^{\infty} a_{k_1k_2k_3}(\vec{r}) \sqrt{t}^{\|k\|} \int_0^1 x_1^{k_1}(s)\, x_2^{k_2}(s)\, x_3^{k_3}(s)\, ds. \tag{8}$$

Тогда для малых t с учетом (4) найдем

$$|R_\alpha(\vec{r},\ t,\ \vec{P}(s))| \leqslant A_0 \int_0^1 e^{\sum\limits_{j=1}^{3} (\sigma_j+\eta)|x_j(s)\sqrt{T}|^{2-\varepsilon}} ds \sqrt{t}^{\alpha+1}. \tag{8'}$$

Возьмем сначала $\alpha = 0$, разделим обе части (7) на t и устремим t к нулю. Получим

$$\mu a_{000}(\vec{r}) = \mu v(x_1,\ x_2,\ 0) = -\lim_{t\to 0} \sqrt{t}(u(\vec{r},\ \vec{r},\ t) - (2\pi t)^{-3/2}), \tag{9}$$

где

$$\mu = \int\limits_{C(0,\ 0,\ 1,\ 0)} \underset{w(0;\ 0;\ 1,\ 0)}{d\vec{P}(s)} = (2\pi)^{-3/2},$$

откуда немедленно определяется коэффициент $a_{000}(\vec{r})$. Возможность предельного перехода при $t \to +0$ под знаком интеграла Винера оправдывается при помощи оценки (8').

Найдя $a_{000}(\vec{r})$, немедленно находим $a_{k_1k_20}(\vec{r})$ по формуле

$$a_{k_1k_20}(\vec{r}) = \frac{1}{k_1!k_2!}\frac{\partial^{k_1+k_2}v(\vec{r})}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\bigg|_{x_3=0} = \frac{1}{k_1!k_2!}\frac{\partial^{k_1+k_2}a_{000}(\vec{r})}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\bigg|_{x_3=0}.$$

И вообще, если $a_{00\alpha}(\vec{r})$ при каком-нибудь α уже определено, то при любых k_1 и k_2 $a_{k_1k_2\alpha}(\vec{r})$ находится по

$$a_{k_1k_2\alpha}(\vec{r}) = \frac{1}{k_1!k_2!}\frac{\partial^{k_1+k_2}a_{00\alpha}(\vec{r})}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}. \tag{10}$$

Предположение о четности потенциала сразу дает $a_{00\alpha}(\vec{r}) = 0$ при нечетных α. Выбирая $q = \alpha + 2$, перепишем (7) в виде

$$t^{3/2}(u(\vec{r}, \vec{r}, t) - (2\pi t)^{-3/2}) =$$

$$= -t \int\limits_{C(0,\,0;\,1,\,0)} \Bigg[\sum_{\|k\|=0}^{\alpha} + \sum_{\|k\|=\alpha+1} a_{k_1k_2k_3}(\vec{r}) \times$$

$$\times \int_0^1 x_1^{k_1}(s)\, x_2^{k_2}(s)\, x_3^{k_3}(s)\, ds \sqrt{t}^{\alpha+1} + R_{\alpha+2}(\vec{r}, t, \vec{P}(s))\Bigg] \underset{W(0;\,0;\,1,\,0)}{d\vec{P}(s)} +$$

$$+ \sum_{m=2}^{\alpha+2} (-1)^m \frac{t^m}{m!} \int\limits_{C(0,\,0;\,1,\,0)} \Bigg[\sum_{\|k\|=0}^{\alpha} + \Bigg(\sum_{\|k\|=\alpha+1} a_{k_1k_2k_3}(\vec{r}) \times$$

$$\times \int_0^1 x_1^{k_1}(s)\, x_2^{k_2}(s)\, x_3^{k_3}(s)\, ds\Bigg)\sqrt{t}^{(\alpha+1)} +$$

$$+ R_{\alpha+1}(\vec{r}, t, \vec{P}(s))\Bigg]^m \underset{W(0,\,0;\,1,\,0)}{d\vec{P}(s)} + O(t^{\alpha+3}).$$

Будем искать в правой части последнего равенства слагаемые, содержащие множитель $(\sqrt{t})^{\alpha+3}$. При возведении в m-ую степень от интегралов Винера, стоящих под знаком суммы $\sum\limits_{m=2}^{\alpha+2}$ с этим множителем, войдут лишь $a_{k_1k_2k_3}(\vec{r})$, у которых $\|k\| \leqslant \alpha$. Перенося все слагаемые с множителями $t^p \left(p < \frac{1}{2}(\alpha+1)+1\right)$ в левую часть равенства, деля затем на $(\sqrt{t})^{\alpha+3}$ и снова устремляя t к нулю, получим в левой части уже известное по вычислениям на предыдущих шагах выражение, а в правую часть наряду с известной, вообще нелинейной комбинацией коэффициентов $a_{k_1k_2k_3}(\vec{r})$ $\|k\| \leqslant \alpha$ войдет линейно коэффициент $a_{00\alpha+1}(\vec{r})$ с множителем

$$\int\limits_{C(0,\,0;\,1,\,0)} \int_0^1 x_3^{\alpha+1}(s)\, ds \underset{W(0,\,0;\,1,\,0)}{d\vec{P}(s)} > 0, \tag{11}$$

откуда он и определится. Без труда выписывается соответствующее рекуррентное соотношение

$$-\lim_{t\to+0} t^{-\frac{\alpha+3}{2}}\Big\{t^{3/2}(u(\vec{r},\vec{r},t)-(2\pi t)^{-3/2})-$$

$$-\sum_{m=1}^{\alpha+2}(-1)^m\frac{t^m}{m!}\int_{C(0,0;1,0)}\Big(\sum_{\|k\|=0}^{\alpha}a_{k_1k_2k_3}(\vec{r})\times$$

$$\times\int_0^1 x_1^{k_1}(s)\,x_2^{k_2}(s)\,x_3^{k_3}(s)\,ds\Big)^m d\vec{P}(s)_{W(0,0;1,0)}\Big\}=$$

$$=\sum_{\|k\|=\alpha+1}a_{k_1k_2k_3}(\vec{r})\int_{C(0,0;1;0)}\int_0^1 x_1^{k_1}(s)\,x_2^{k_2}(s)\,x_3^{k_3}(s)\,ds\,d\vec{P}(s)_{W(0,0;1,0)}.$$

Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность В. А. Марченко и Ю. М. Березанскому за обсуждение работы.

Список литературы: 1. *Березанский Ю. М.* К теореме единственности в обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шредингера.— «Тр. моск. мат. о-ва», 1958, т. 7, с. 3—51. 2. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. М.— Л., ГИТТЛ, 1950. 220 с. 3. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих комплексных переменных. М., «Наука», 1971. 430 с. 4. *Шилов Г. Е.* Интегрирование в бесконечномерных пространствах и интеграл Винера. «Усп. мат. наук», 1963, т. 28, вып. 2 (110), с. 99—120.

Поступила 19 июня 1977 г.