УДК 517.55

Ф. И. ГЕЧЕ

ДИАГРАММА НЬЮТОНА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИЗУЧЕНИЮ МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА КРАТНОГО РЯДА ЛОРАНА. II

Первая часть работы изложена в [17]. Здесь исследуются функции максимального члена и центрального индекса. Основные теоремы 10 и 11 будут доказаны в следующей части. Сохраняем прежние обозначения и продолжаем нумерацию параграфов, формул и литературных ссылок.

§ 4. Максимальный член и центральная индексная система ряда

В доказательстве теоремы 4 мы ввели понятие r-логарифмического следа c_k точки представления P_k коэффициента ряда (1) (или ряда (3)) равенствами (25) и (26). Очевидно, c_k будет наибольшим для тех значений k, для которых гиперплоскость с уравнением $\xi = s_k + \langle \ln r, x - k \rangle$ совпадает с $H_A(r)$ $(r \in \overset{*}{\Lambda}_A)$.

Определение. *Функцией следа ряда A называется функция* $C_A : \boldsymbol{R}^n \to \overline{R}$, $C_A(\ln r) = \sup\limits_{k \in K} c_k = \sup\limits_{k \in K} \ln(a_k r^k)$, $\ln r \in R^n$.

Легко видеть, что $C_A = C_{T_A}$ и $C_A(\ln r) \in R$ тогда и только тогда, когда $r \in \Lambda_A^*$.

Определение. *Диаграммной функцией ряда A называется функция* $\Delta_A : R^n \to \overline{R}$, *для которой множество* W_A *из § 1 является надграфиком, т. е.* $W_A = \operatorname{epi} \Delta_A$ *(см. [15]).*

Лемма 8. *Функции* C_A *и* Δ_A *сопряжены.*

Это непосредственное следствие определений. В частности, $\Delta_A(x) > -\infty$, $\Delta_A(x) \not\equiv \infty$ и справедливо равенство

$$C_A(x) = -\inf\{\Delta_A(y) - \langle x, y \rangle : y \in R^n\}. \tag{32}$$

Определение. *Функцией максимального члена ряда A называется функция* $m_A : \overline{\boldsymbol{R}}^n_+ \to \overline{\boldsymbol{R}}_+$, *определенная равенством* $m_A(r) = \sup\limits_{k \in K} a_k r^k$.

При этом $a_k r^k = m_A(r)$ *называется максимальным членом ряда A при* $|z_i| = r_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Обозначим через D_A^+ изображение области D_A в пространстве $\overline{\boldsymbol{R}}^n_+$ по Рейнхардту (см., например, [18, с. 267]). Тогда на множестве D_A^+ можно пользоваться равенством

$$m_A(r) = \max_{k \in K} a_k r^k. \tag{33}$$

Из сказанного выше следуют равенства

$$\exp C_A(\ln r) = m_A(r) = m_{T_A}(r), \quad r \in \hat{\boldsymbol{R}}^n. \tag{34}$$

Замечание. Если $m_A(r) = 0$ при некотором $r \in \hat{R}^n$, то $m_A(r) \equiv 0$.

С максимальным членом обыкновенного степенного ряда неразрывно связан центральный индекс. Это понятие можно обобщить на случай кратных рядов разными способами. Нам удобно будет пользоваться следующим определением (ср. [12, 14]).

Определение. *Положим* $\Gamma_A \overset{\text{df}}{=} \{r \in D_A^+ : m_A(r) \neq 0\}$. *Центральной индексной системой называется вектор-функция* $\nu_A : \Gamma_A \to \boldsymbol{Z}^n$, *j-я координатная функция* ν_j, *которая определяется равенством*

$$\nu_j(r) = \max\{k_j \in \boldsymbol{Z} : a_k r^k = m_A(r)\}, \quad r \in \Gamma_A. \tag{35}$$

Это определение корректно, так как множество $\{k_j \in \boldsymbol{Z} : a_k r^k = m_A(r)\}$ конечно при любом $r \in \Gamma_A$. Очевидно,

$$\Gamma_A \cap \hat{\boldsymbol{R}}^n = \mathring{\Lambda}_A. \tag{36}$$

Если $n > 1$, то, вообще говоря, $m_A(r) \neq a_{\nu_A(r)} r^{\nu_A(r)}$ $\Big($примером может служить разложение функции $1 - n + \sum_{i=1}^{n} \exp z_i$ в окрестности начала координат$\Big)$. Но как вытекает из теоремы 7, равенство $m_A(r) = a_{\nu_A(r)} r^{\nu_A(r)}$ может нарушаться только на некотором нигде не плотном в $\mathring{\Lambda}_A$ множестве.

Теорема 7. *Пусть* $\{P_k, k \in K^*\}$ — *множество вершин диаграммы* δ_A *с* $\mathring{\Lambda}_A \neq \varnothing$. *Каждой вершине* P_k $(k \in K^*)$ *соответствует подмножество* Ω_k *множества* $\mathring{\Lambda}_A$, *такое, что*

1) Ω_k — *непустое открытое множество,* $\Omega_k \cap \Omega_{k'} = \varnothing$, *если* $k \neq k'$; $\mathring{\Lambda}_A \subset \bigcup_{k \in K^*} \overline{\Omega}_k$;

2) $\delta_A \cap H_A(r) = \{P_k\}$ *тогда и только тогда, когда* $r \in \Omega_k$;

3) если $r \in \Omega_k$, *то* $\nu_A(r) = k$; *если* $r \in \mathring{\Lambda}_A \cap \overline{\Omega}_k$, *то* $m_A(r) = a_k r^k$;

4) Ω_k — *логарифмически выпуклое множество*;

5) какой бы ни был открытый n*-мерный выпуклый многогранник* $U \Subset \ln(\mathring{\Lambda}_A)$, *множество* $U \cap \ln(\Omega_k)$ *либо пусто, либо является открытым* n*-мерным выпуклым многогранником*;

6) если $M \Subset \ln(\mathring{\Lambda}_A)$, *то существует конечное множество* $K_M \subset K^*$, *такое, что* $M \subset \bigcup_{k \in K_M} \Omega_k$; $M \cap \Omega_k = \varnothing$, *если* $k \bar{\in} K_M$;

7) если $r \in \mathring{\Lambda} \cap \partial\Omega_k$, *то* r *является точкой разрыва вектор-функции* ν_A *и существуют, по крайней мере, две точки* $k', k'' \in K^*$, *такие, что* $m_A(r) = a_{k'} r^{k'} = a_{k''} r^{k''}$;

8) функция m_A *непрерывна на множестве* $\mathring{\Lambda}_A$.

Доказательство. Большинство утверждений этой теоремы следует из теоремы 3. Действительно, согласно определению вершина P_k диаграммы δ_A есть элемент одноточечного множества $H_A(r) \cap \delta_A$ при определенном $r \in \mathring{\Lambda}_A$. Положим в теореме 3 $\Pi_A(r) = \Gamma = \{P_k\}$ $(k \in K^*)$. Множество Ω_k определим так, что $\ln(\Omega_k) = \Delta_\Gamma$ (см. равенство (18)). Тогда утверждения 1), 2), 4) и 5) непосредственно следуют из теоремы 3, объяснение требует только включение $\mathring{\Lambda}_A \subset \bigcup_{k \in K^*} \overline{\Omega}_k$. Итак, пусть $r \in \mathring{\Lambda}_A$. Если множество $\Pi_A(r) = \delta_A \cap H_A(r)$ одноточечно, то r входит в некоторое множество Ω_k, $k \in K^*$. Если же многогранник $\Pi_A(r)$ имеет положительную размерность, то любой вершине $P_k \in \Pi_A(r)$ соответствует множество $\Delta_\Gamma = \ln(\Omega_k)$ $(\Gamma = \{P_k\})$, для которого $\ln r$ является граничной точкой. Поэтому $r \in \overline{\Omega}_k$ и требуемое включение обосновано. Отсюда следует утверждение 8) (см. также (34)).

Третье утверждение теоремы следует из соответствующих определений и равенств (25), (34).

Утверждение 6) легко доказать на основании леммы 7, так как множество $\ln(M) \subset\subset \ln(\mathring{\Lambda}_A)$ можно покрыть конечным числом n-мерных многогранников, лежащих в $\ln(\mathring{\Lambda}_A)$.

Наконец, седьмое утверждение теоремы является следствием предыдущих утверждений. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что каждой вершине P_k диаграммы δ_A соответствует значение центральной индексной системы, равное k. Обратное утверждение при $n > 1$, вообще говоря, не имеет места. Именно, если $r \in \mathring{\Lambda}_A \cap \partial\Omega_{k_0}$ $(k_0 \in K^*)$, то в множестве K^* (или даже в K) может не существовать такого k, что $\nu(r) = k$. Но возможно следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть* $\nu(A) = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — *центральная индексная система ряда* A *с* $\mathring{\Lambda}_A \neq \varnothing$. *Для любых* $r \in \Gamma_A$ *и* $j = 1, \ldots, n$ *существует вершина* P_k *диаграммы* δ_A $(k = k(j, r))$, *такая, что* $\nu_j(r) = k_j$.

Доказательство. Пусть сначала $r \in \mathring{\Lambda}_A$ (см. равенство (36)). Согласно теореме 3 множество $\Pi_A(r) = \delta_A \cap H_A(r)$ является выпуклым многогранником. Любая вершина многогранника $\Pi_A(r)$ является также вершиной диаграммы δ_A в силу той же теоремы. Очевидно, r-логарифмический след любой точки из $\Pi_A(r)$ (и только таких точек) равен $\ln m_A(r)$. Каково бы ни было $j = 1, \ldots, n$, среди точек $P_k \in \Pi_A(r)$ имеется одна вершинная точка, индекс k которой обладает наибольшей j-й координатой k_j. Ясно, что $k_j = \nu_j(r)$.

Пусть теперь $r \in \Gamma_A \setminus \mathring{\Lambda}_A$. Тогда некоторые координаты r_j точки r равны 0 или $+\infty$. Разобьем множество $\{1, \ldots, n\}$ на три класса J_1, J_2, J_3 так, что $0 < r_j < \infty$, если $j \in J_1$; $r_j = 0$, если $j \in J_2$ и $r_j = +\infty$, если $j \in J_3$. Положим в ряде (3) $z_j = 0$ при $j \in J_2$ и $z_j = \infty$ при $j \in J_3$. Тогда получим ряд $\widetilde{T}$:

$$\sum_{k \in K} T_k z^k \big|_{z_i = 0,\, z_j = \infty,\, i \in J_2,\, j \in J_3}. \tag{37}$$

Очевидно, ряд $\widetilde{T}$ имеет диаграмму Ньютона $\delta_{\widetilde{T}} = \delta_A \cap F$, где $F = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n : x_j = 0, \text{ если } j \in J_2 \cup J_3\}$.

Если $J_1 = \varnothing$, то ряд $\widetilde{T}$ вырождается в одночлен T_0, причем $T_0 \neq 0$, так как $m_A(r) \neq 0$ при $r \in \Gamma_A$. Соответствующая коэффициенту T_0 точка представления P_0, очевидно, является вершиной диаграммы δ_A и $\nu_A(r) = 0$.

Пусть множество $J_1 = \{i_1, \ldots, i_m\}$ содержит m точек $(m > 0)$. Для ряда $\tilde{T}$ введем множество $\Lambda_{\tilde{T}}$ $\left(\Lambda_{\tilde{T}} \subset \hat{\boldsymbol{R}}^m\right)$ и центральную индексную систему $\nu_{\tilde{T}} = (\tilde{\nu}_1, \ldots, \tilde{\nu}_m)$. Очевидно, $\overline{\Lambda}_{\tilde{T}} = \overline{\Lambda}_A \cap F$, $\tilde{\nu}_j(\tilde{r}) = \nu_{i_j}(r)$ $(j = 1, \ldots, m)$, где $\tilde{r} = (r_{i_1}, \ldots, r_{i_m}) \in \mathring{\Lambda}_{\tilde{T}}$, $r_s = 0$ при $s \in J_2$, $r_t = \infty$ при $t \in J_3$. По первой части доказательства теоремы для любого $j = 1, \ldots, m$ существует точка $k = (k_1, \ldots, k_n) \in K$, такая, что $k_{i_j} = \tilde{\nu}_j(\tilde{r}) = \nu_{i_j}(r)$ и $k_l = 0$ при $l \in J_2 \cup J_3$. При этом точка представления P_k является вершиной диаграммы $\delta_{\tilde{T}} = \delta_A \cap F$. В силу теоремы 11.2 из [15] через точку P_k можно провести гиперплоскость с уравнением вида $\xi = \xi_0 + \langle a, x \rangle$, $a \in \boldsymbol{R}^n$, пересекающуюся с множеством W_A в единственной точке P_k. Следовательно, P_k — вершинная точка диаграммы δ_A. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* $\bar{r} \in \Gamma_A$. *Тогда существует* $k \in K^*$, *такое, что* $m_A(\bar{r}) = a_k \bar{r}^k$ *и* $m_A(r) = a_k r^k$ *при* $r \in \Omega_k$ (см. теорему 7).

Следствие 2. *Функция* m_A *непрерывна на множестве* Γ_A.

Следствие 3. *Ряды (1) и (3) имеют одинаковые системы центральных индексов.*

В самом деле, ряды (1) и (3) обладают одной и той же диаграммой Ньютона, но системы центральных индексов определяются вершинами диаграммы.

Замечание. Центральную индексную систему ряда A можно было бы определить на множестве, возможно, более широком, чем Γ_A (ведь ряд A может сходиться также вне D_A). Но после этого утверждение предыдущего следствия перестало бы выполняться (см. теорему 6).

Теорема 9. *Пусть сумма ряда (1) представляет целую функцию f. Для того чтобы функция f была многочленом относительно z_j, необходимо и достаточно, чтобы j-я координатная функция ν_j центральной индексной системы ν была ограниченной.*

Доказательство. Если f многочлен степени p_j относительно z_j, то, очевидно, $\nu_j(r) \leqslant p_j$. Наоборот, если f трансцендентная целая функция относительно z_j, то имеется вершина P_k диаграммы δ_A с каким угодно большим k_j. Действительно, если c — произвольное положительное число, то существует точка $(x, s_x) \in \delta_A$, такая, что $x_j > c$. Проведем через точку (x, s_x) опорную гиперплоскость $H_A(r)$. Существует вершина P_k выпуклого многогранника $\delta_A \cap H_A(r)$, такая, что $k_j \geqslant x_j > c$. Но точка P_k является вершиной также диаграммы δ_A. В силу теоремы 7 $\nu_A(r') = k$ при $r' \in \Omega_k$ и, следовательно, $\nu_j(r') = k_j > c$. Теорема доказана.

Замечание. Эта теорема тривиальна в одномерном случае ($n=1$). Но при $n>1$ центральная индексная система не обладает такими простыми свойствами, как центральный индекс одинарного степенного ряда. Например, как отмечено в [14], координатные функции центральной индексной системы не обладают свойством монотонности. Интересен также пример 2, приведенный в конце § 2. Ряд в этом примере является разложением Тейлора целой трансцендентной функции двух переменных. Тем не менее, существует последовательность $\{(r_1^{(m)}, r_2^{(m)})\}$ точек из $\mathring{\Lambda}_A = \hat{R}^2$ с $r_1^{(m)} \underset{m\to\infty}{\to} \infty$, такая, что $\nu_A(r_1^{(m)}, r_2^{(m)}) = (0, 0)$.

В следующей теореме дается полная характеристика функции максимального члена. Положим $S_{i_1\ldots i_\alpha}^{j_1\ldots j_\beta} = \{x \in \overline{R}_+^n : x_{i_1} = \ldots = x_{i_\alpha} = 0,\ x_{j_1} = \ldots = x_{j_\beta} = \infty\}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\alpha \leqslant n$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_\beta \leqslant n$, причем $i_s \neq j_t$, когда $s = 1, \ldots, \alpha$; $t = 1, \ldots, \beta$.

Теорема 10. *Для того чтобы функция $m : \overline{R}_+^n \to \overline{R}_+$ была функцией максимального члена некоторого ряда вида (1) с непустой областью сходимости, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) сужение функции m на множество $\operatorname{int}(\operatorname{cl}\Phi)$ *непрерывно; здесь $\Phi = \{r \in \overline{R}_+^n : m(r) < \infty\}$ и топологические понятия рассматриваются в $\overline{R}_+^n$;*

2) функция $C : R^n \to \overline{R}$, определенная равенством $C(x) = \ln m \times (\exp x)$, является замкнутой собственной выпуклой функцией и $\operatorname{int}(\operatorname{dom} C) \neq \varnothing$ в пространстве R^n;

3) $\nabla C(x) \in Z^n$ в любой точке $x \in R^n$, в которой функция C дифференцируема;

4) существует множество $K' \subset Z^n$, такое, что $\operatorname{cl}(\operatorname{conv} K') = \operatorname{cl}(\operatorname{dom} C^*)$;

5) если $\Phi \cap S_{i_1\ldots i_\alpha}^{j_1\ldots j_\beta} \neq \varnothing$, то сужение функции m на $S_{i_1\ldots i_\alpha}^{j_1\ldots j_\beta}$ либо тождественно равно нулю, либо обладает свойствами 1)—4) относительно оставшихся переменных, α, $\beta = 0, 1, \ldots, n-1$; $1 \leqslant \alpha + \beta \leqslant n-1$.

Если D — n-круговая область с центром $0 \in C^n$, то через $\hat{D}^+$ обозначаем изображение по Рейнхардту множества $\hat{D} = D \cap \hat{C}^n$.

Теорема 11. *Пусть D — полная логарифмически выпуклая n-круговая область с центром $0 \in C^n$ и множество $\ln(\hat{D}^+)$ не включает в себя ни одной прямой. Тогда существует ряд Тейлора A с единственным максимальным членом a_0. Диаграммная функция этого ряда совпадает с опорной функцией множества $\ln(\hat{D}^+)$, а надграфик диаграммной функции, т. е. множество W_A является $(n+1)$-мерным выпуклым конусом. Он является рецессивным кону-*

сом надграфика диаграммной функции любого ряда в областью сходимости D.

Замечание. Рецессивный (асимптотический) конус надграфика диаграммной функции двойного степенного ряда рассматривается в статье [9], однако там допущены неточности. В частности, ошибочно утверждение теоремы 3 из [9].

В силу теоремы 7 и равенств (34) можем написать равенства

$$\nabla C_A(x) = \nu_A(e^x) = k, \quad x \in \ln(\Omega_k). \tag{38}$$

Если же функция C_A недифференцируема в точке $x \in \ln(\mathring{\Lambda}_A)$, то (см. (35) и (36))

$$\nu_A(e^x) = \left(\left(\frac{\partial C_A(x)}{\partial x_1}\right)_+, \ \ldots, \ \left(\frac{\partial C_A(x)}{\partial x_n}\right)_+\right),$$

где $\left(\frac{\partial C_A(x)}{\partial x_i}\right)_+$ — правосторонняя частная производная по x_i.

Теорема 12. *Пусть L — ломаная линия, лежащая вместе с концами x', x'' в области $\ln(\mathring{\Lambda}_A)$. Предположим, что для всех, кроме, возможно, конечного числа, точек $x \in L$ верно равенство*

$$m_A(r) = a_{\nu_A(r)} r^{\nu_A(r)}, \quad x = \ln r. \tag{39}$$

Тогда

$$\int_L \langle \nu_A(e^x), dx \rangle = C_A(x'') - C_A(x') = \ln m_A(e^{x''}) - \ln m_A(e^{x'}). \tag{40}$$

Доказательство. В силу теоремы 7 ломаная L может быть разбита на конечное число прямолинейных отрезков $L_1, \ldots, L_s$ так, что каждый отрезок L_j лежит в некотором множестве $\overline{\Omega}_{k(j)}$, $j = 1, \ldots, n$. Из равенства (39) и утверждения 7 теоремы 7 следует, что $\operatorname{ri} L_j \subset \Omega_{k(j)}$. Следовательно,

$$\int_{L_j} \langle \nu_A(e^x), dx \rangle = \int_{\operatorname{ri} L_j} \langle \nabla C_A(x), dx \rangle = C_A(\tilde{x}^{(j)}) - C_A(x^{(j)}), \tag{41}$$

где $x^{(j)}$ и $\tilde{x}^{(j)}$ соответственно начало и конец отрезка L_j, $j = 1, \ldots, s$.

Учитывая равенства (34) и утверждение 8 теоремы 7 из (41) получаем равенства (40). Теорема доказана.

Следствие. *Пусть L — произвольная ломаная линия, лежащая вместе с концами x', x'' в области $\ln(\mathring{\Lambda}_A)$, и каждое звено которой параллельно некоторой из координатных осей. Тогда справедливы равенства (40).*

Для рядов Тейлора это следствие доказано в [14] (теорема (2.1).

Замечание. Для произвольной ломаной $L \subset \ln(\mathring{\Lambda}_A)$, вообще говоря, равенства (40) несправедливы. Действительно, пусть L —

прямолинейный отрезок с концами x' и x'', лежащий в множестве $\ln(\Omega_k) \cap \ln(\Omega_{k'})$. На основании теоремы 7 легко получить соотношения $C_A(x'') - C_A(x') = \langle k, \quad x'' - x' \rangle = \langle k', \quad x'' - x' \rangle \neq \neq \int_L \langle \nu_A(e^x), dx \rangle$.

§ 5. Ряды с заданной функцией максимального члена

В работе [14] доказана теорема 3.7, согласно которой множество рядов Тейлора с фиксированной функцией максимального члена обладает наименьшим элементом (коэффициенты ряда — неотрицательные числа). Это утверждение требует уточнения. В самом деле, функция максимального члена ряда A $1 + \sum_{l=1}^{\infty} \exp(1 - l) z_1^l z_2^l$ удовлетворяет равенствам $m_A(r) = 1$ при $r_1 r_2 \leqslant e$ и $m_A(r) = \infty$ в остальных случаях $(r = (r_2, \ r_2))$. Очевидно нельзя построить такой ряд B с функцией максимального члена $m_B = m_A$, коэффициенты которого были бы минимальными. Ряд B_0 с единственным отличным от нуля коэффициентом $b_{00} = 1$ удовлетворяет условию $m_{B_0}(r) = m_A(r)$ при $r_1 r_2 \leqslant 1$, но $m_{B_0}(r) = = 1$ при всех $r \in \overline{R}_{+}^2$. Итак, теорему 3.7 из [14] уточним следующим образом.

Теорема 13. *Пусть A — произвольный ряд вида (1) с непустой областью сходимости D_A. Существует ряд A' вида (1), такой, что*

1) $m_{A'}(r) = m_A(r), \ r \in D_A^{+}$;

2) *из равенства $m_B(r) = m_A(r)$ при $r \in D_A^{+}$ следует, что ряд B мажорирует ряд A'.*

Доказательство. Пусть $\{P_k, \ k \in K^*\}$ — множество всех вершин диаграммы δ_A. Ряд $\sum_{k \in K^*} A_k z^k$ является искомым рядом. Действительно, из теоремы 7 следует утверждение 2) и равенство $m_{A'}(r) = m_A(r)$ при $r \in \mathring{\Lambda}_A$. Но это равенство сохраняется также на множестве D_A^{+} (см. теоремы 4, 10). Теорема доказана.

Пусть $C: \hat{R}^n \to \overline{R}$ — функция следа некоторого ряда вида (1) с непустой областью сходимости D. Любой ряд A, функция следа которого совпадает с функцией C, называется производящим рядом функции следа C (ср. [2, с. 14]). Вообще говоря, такой ряд неединственный. Аналогом теоремы 3.1 из [14] является

Теорема 14. *Среди всех производящих рядов одной и той же функции следа C есть такой, который мажорирует все производящие ряды. Этот ряд является мажорантой Ньютона любого производящего ряда функции C и его коэффициенты определяются равенствами*

$$T_k = \inf\{\exp[C(x) - \langle k, \ x \rangle] : e^x \in \hat{D}+\}, \quad k \in Z^n, \ e^{-\infty} = 0. \tag{42}$$

Доказательство. Согласно лемме 8 диаграммная функция Δ_A любого производящего ряда A функции следа C определяется равенством $\Delta_A(y) = -\inf\{[C(x) - \langle y, x\rangle] : x \in R^n\}$. Следовательно, ряд $\Sigma T_k z^k$ с коэффициентами (42) является мажорантой Ньютона ряда A. Теорема доказана.

Список литературы: 17. *Гече Ф. И.* Диаграмма Ньютона и ее применение к изучению максимального члена кратного ряда Лорана. I.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 30. Харьков, 1978. с. 14—29. 18. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М., «Наука», 1969. 576 с.

Поступила 28 января 1974 г.