УДК 517.514

М. И. ГАНЗБУРГ

ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ВОЗРАСТАЮЩЕЙ ПЕРЕСТАНОВКИ МНОГОЧЛЕНА m ПЕРЕМЕННЫХ

1. Пусть P — многочлен m переменных степени $\leqslant n$ и $V \subset R^m$ — выпуклое ограниченное тело. Обозначим через P^* возрастающую перестановку (см. [12, с. 332]) следа многочлена P на множество V. Основной результат статьи

Теорема 1. *Для* $0 < \tau \leqslant \xi \leqslant |V|_m$ *имеет место неравенство*

$$P^*(\xi) \leqslant T_n\left(\frac{1+\sqrt[m]{1-\frac{\tau}{\xi}}}{1-\sqrt[m]{1-\frac{\tau}{\xi}}}\right) P^*(\tau), \qquad (1)$$

где $T_n(z) = \frac{1}{2}\left\{(z+\sqrt{z^2-1})^n + (z-\sqrt{z^2-1})^n\right\}$ *— многочлен Чебышева степени* n.

Неравенство (1) неулучшаемо для $\xi = |V|_m$. При $\xi = |V|_m$ неравенство (1) является следствием неравенства теоремы 2 из работы Ю. А. Брудного и автора [2], однако при $\xi < |V|_m$ это уже не так.

Как следствие (1) получаем неравенства между симметричными нормами алгебраических многочленов m переменных.

2. Примем следующие обозначения: R^m — m-мерное евклидово пространство; $|\Omega|_k$ — k-мерная мера Лебега измеримого множества $\Omega \subset R^m$; $\chi_\Omega(t)$ — характеристическая функция множества Ω; $\lambda_\Psi(\Omega)$ —

пространство Лоренца; $M_\Psi(\Omega)$ — пространство Марцинкевича [10]; $P_{n,m}$ — пространство алгебраических многочленов m переменных степени $\leqslant n$.

Определение (см. [10]). Банахово пространство $F(\Omega)$ измеримых функций, заданных на измеримом множестве $\Omega \subset R^m$, называется симметричным, если выполняются следующие условия:

1) Если $f \in F(\Omega)$, g — измеримая на Ω функция и $|g(x)| \leqslant |f(x)|$, $x \in \Omega$, то $g \in F(\Omega)$ и $\|g\|_{F(\Omega)} \leqslant \|f\|_{F(\Omega)}$;

2) Если $f \in F(\Omega)$ и функция g равноизмерима с f, то $g \in F(\Omega)$ и $\|g\|_{F(\Omega)} = \|f\|_{F(\Omega)}$.

Функция $\Psi_F(t) = \|\chi_E\|_{F(\Omega)}, E \subseteq \Omega, |E|_m = t, 0 \leqslant t \leqslant |\Omega|_m$ называется фундаментальной функцией симметричного пространства $F(\Omega)$ (можно считать ее вогнутой [10]).

С каждым симметричным пространством $F(\Omega)$ связано симметричное пространство $\widetilde{F}(0|\Omega|_m)$, определяемое как $\{f(Rx) : f \in F(\Omega)\}$, где R — сохраняющее меру почти взаимооднозначное отображение Ω на отрезок $[0, |\Omega|_m]$. Норма в ней задается формулой $\|f\|_{\widetilde{F}(0, |\Omega|_m)} = \|f \circ R^{-1}\|_{F(\Omega)}$.

3. Доказательство теоремы 1. Неулучшаемость неравенства (1) для $\xi = |V|_m$ следует из результатов работы [3].

Для доказательства неравенства (1) используем несколько лемм.

Лемма 1. (См. [8], а также [2]). *Пусть $P \in \boldsymbol{P}_{n,1}$ и $[a, b]$ — произвольный отрезок на R^1. Тогда для любого измеримого множества $E \subset [a, b]$, $|E|_1 > 0$ имеет место неравенство*

$$\max_{[a,b]} |P| \leqslant T_n\left(\frac{2(b-a)}{|E|_1} - 1\right) \max_E |P|.$$

Пусть теперь $P \in \boldsymbol{P}_{n,1}$, а P^* — возрастающая перестановка P на отрезке $[a, b] \subset R$.

Далее, пусть τ, ξ, $0 < \tau \leqslant \xi \leqslant b - a$ — фиксированные числа, а $E_\theta = \{x \in [a, b] : |P|(x) \leqslant P^*(\theta)\}$. Тогда $E_\tau \subseteq E_\xi = \bigcup\limits_{s=1}^{r} [c_s, d_s]$, где $[c_s, d_s] = \Delta_s$, $1 \leqslant s \leqslant r \leqslant n$, попарно непересекающиеся сегменты. Обозначив $\mu_s = E_\tau \cap \Delta_s 1 \leqslant s \leqslant r$ и применяя лемму 1 к каждому Δ_s, $1 \leqslant s \leqslant r$, получаем

$$P^*(\xi) = \max_{\Delta_s} |P| \leqslant T_n\left(\frac{2|\Delta_s|_1}{|\mu_s|_1} - 1\right) \max_{\mu_s} |P| = T_n\left(\frac{2|\Delta_s|_1}{|\mu_s|_1} - 1\right) P^*(\tau).$$

Из этого неравенства следует

Лемма 2. *Пусть $P \in \boldsymbol{P}_{n,1}$. Тогда для любого отрезка $[a, b] \subset R^1$ и фиксированных τ, ξ, $0 < \tau \leqslant \xi \leqslant b - a$ имеет место неравенство $P^*(\xi) \leqslant T_n\left(2 \min\limits_s \frac{|\Delta_s|_1}{|\mu_s|_1} - 1\right) P^*(\tau)$, где $\Delta_s, 1 \leqslant s \leqslant r$, s-я связная компонента множества $E_\xi = \{x \in [a, b] : |P(x)| \leqslant P^*(\xi)\}$, а $\mu_s = E_\tau \cap \Delta_s$.*

Пусть x_0 — произвольная точка из R^m. Обозначим через $M_n(x_0)$ класс измеримых ограниченных множеств $\Omega \cap R^m$, таких, что для любого луча l, исходящего из x_0 либо $|\Omega \cap l|_1 = 0$, либо $\Omega \cap l$ есть объединение попарно непересекающихся сегментов, число которых $\leqslant n$. Пусть, далее, ω и E — множества из класса $M_n(x_0)$, $\omega \subset E$. Для любого луча l, исходящего из x_0, обозначим через $\Delta_s(l)$, $1 \leqslant s \leqslant r(l) \leqslant n$ связные компоненты множества $E \cap l$. Рассмотрим величину

$$\gamma_m(\delta) = \sup_{|E|_m < \delta|\omega|_m} \operatorname*{Vrai\,inf}_{l} \min_{s} \frac{|\Delta_s(l)|_1}{|\Delta_s(l) \cap \omega|_1}.$$

Здесь $\delta > 1$ — фиксированное число, а верхняя грань взята по всем ω и E из $M_n(x_0)$, таким, что $\omega \subset E$, $0 < |E|_m \leqslant \delta|\omega|_m$ (в дальнейшем величину $\operatorname*{Vrai\,inf}_{l} \min_{s} \frac{|\Delta_s(l)|_1}{|\Delta_s(l) \cap \omega|_1}$ будем обозначать $S_m \times (E, \omega)$).

Лемма 3. $\gamma_m(\delta) = (1 - \sqrt[m]{1 - \delta^{-1}})^{-1}$.

Доказательство. Пусть E и ω — произвольные множества из $M_n(x_0)$, такие, что $\omega \subseteq E$, $0 < |E|_m \leqslant \delta|\omega|_m$. Проведем ряд последовательных «симметризаций» множеств E и ω.

1. Для произвольного, достаточно малого $\varepsilon > 0$ определим луч l_ε, такой, что

$$S_m(E, \omega) + \varepsilon \geqslant \min_{s} \frac{|\Delta_s(l_\varepsilon)|_1}{|\Delta_s(l_\varepsilon) \cap \omega|_1} \geqslant S_m(E, \omega). \tag{2}$$

Определим «симметризованное» множество ω^1 по сечениям $\omega^1 \cap l$, где l произвольный луч, исходящий из x_0; множество $\omega^1 \cap l$ определяется как объединение отрезков $\mu_s^1(l) \subset \Delta_s(l)$, таких, что $|\mu_s^1(l)|_1 = |\Delta_s(l) \cap \omega|_1$, причем один из концов μ_s^1 совпадает с наиболее удаленным от x_0 концом $\Delta_s(l)$, $s = 1, \ldots, r(l)$.

Аналогично определим «симметризованное» множество E^1 по сечениям $E^1 \cap l$, которые определяются как объединение отрезков $\Delta_s^1(l) \subset \Delta_s(l)$, где длина Δ_s^1 задается формулой

$$|\Delta_s^1(l)|_1 = |\mu_s^1(l)|_1 \min_{s} \frac{|\Delta_s(l_\varepsilon)|_1}{|\Delta_s(l_\varepsilon) \cap \omega|_1}, \tag{3}$$

причем один из концов $\Delta_s^1(l)$ совпадает с наиболее удаленным от x_0 концом $\Delta_s(l)$, $s = 1, \ldots, r(l)$.

Из конструкции E^1 и ω^1 следует, что $\omega^1 \subseteq E^1$. Нетрудно проверить, используя (2) и (3), что для любого луча l, исходящего из x_0, такого, что $|\omega \cap l|_1 \neq 0$, имеет место неравенство

$$\frac{\int\limits_{E \cap l} r^{m-1} dr + \varepsilon_1}{\int\limits_{\omega \cap l} r^{m-1} dr} \geqslant \frac{\int\limits_{E^1 \cap l} r^{m-1} dr}{\int\limits_{\omega^1 \cap l} r^{m-1} dr}, \tag{4}$$

где $\varepsilon_1 = \frac{D^m}{m}[1 - (1 - \varepsilon)^m]$; D — диаметр множества E.

2. Пусть $\bar{l}_\varepsilon$ такой луч, исходящий из x_0, что

$$\operatorname{V rai\,inf}_{l} \frac{\int\limits_{E^1 \cap l} r^{m-1} dr}{\int\limits_{\omega^1 \cap l} r^{m-1} dr} > \frac{\int\limits_{E^1 \cap \bar{l}_\varepsilon} r^{m-1} dr}{\int\limits_{\omega^1 \cap \bar{l}_\varepsilon} r^{m-1} dr}. \tag{5}$$

Определим, далее, множества E^2, ω^2 следующим образом. Пусть $A = \{x \in R^m : |\omega \cap l_x|_1 \neq 0\}$, где l_x — луч, исходящий из x_0 и проходящий через x. Тогда характеристические функции указанных множеств определим формулами $\chi_{E^2}(x) = \chi_{E^1 \cap \bar{l}_\varepsilon}(|x - x_0|) \times \times \chi_A(x)$; $\chi_{\omega^2}(x) = \chi_{\omega^1_1 \bar{l}_\varepsilon}(|x - x_0|)\, \chi_A(x)$.

Множества E^2, ω^2, очевидно, принадлежат $M_n(x_0)$. Далее, из неравенств (4), (5) получаем

$$\frac{|E^2|_m}{|\omega^2|_m} \leqslant \frac{|E|_m}{|\omega|_m} + \varepsilon_2 \leqslant \delta + \varepsilon_2, \tag{6}$$

где $\varepsilon_2 = \varepsilon + \varepsilon_1 V_{m-1} |\omega|_m^{-1}$; V_{m-1} — m — 1-мерная площадь поверхности единичной сферы. Кроме того, из (2), (3) и конструкции множеств E^i, ω^i, $i = 1, 2$, находим

$$S_m(E^2, \omega^2) \geqslant S_m(E, \omega). \tag{7}$$

3. Рассмотрим произвольный луч l', исходящий из x_0, такой, что $|\omega \cap l'|_1 \neq 0$. Найдем сегменты $\Delta^2_{S_0}(l') \subset E^2 \cap l'$ и $\mu^2_{S_0}(l') \subset \omega^2 \cap l'$

$$\frac{\int\limits_{\Delta^2_{S_0}(l')} r^{m-1} dr}{\int\limits_{\mu^2_{S_0}(l')} r^{m-1} dr} = \min_S \frac{\int\limits_{\Delta^2_S(l')} r^{m-1} dr}{\int\limits_{\mu^2_S(l')} r^{m-1} dr}. \tag{8}$$

Определим множества E^3, ω^3 следующим образом.
Пусть $\chi_{E^3}(x) = \chi_{\Delta^2_{S_0}(l')}(|x - x_0|)\, \chi_A(x)$; $\chi_{\omega^3}(x) = \chi_{\mu^2_{S_0}(l')}(|x - x_0|) \times \times \chi_A(x)$.
Множества E^3, ω^3, очевидно, принадлежат $M_n(x_0)$, причем $\omega^3 \subset E^3$. Далее, из неравенства (7) и конструкции множеств E^3, ω^3 получаем

$$S_m(E^3, \omega^3) \geqslant S_m(E, \omega). \tag{9}$$

Кроме того, из (8) имеем

$$\frac{|E^3|_m}{|\omega^3|_m} \leqslant \frac{|E^2|_m}{|\omega^2|_m} \leqslant \delta + \varepsilon_2. \tag{10}$$

Следовательно, мы получили

$$S_m(E, \omega) \leqslant S_m(E^3, \omega^3) \leqslant \left(1 - \sqrt[m]{1 - \frac{|\omega^3|_m}{|E^3|_m}}\right)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 - \sqrt[m]{1 - (\delta + \varepsilon_2)^{-1}}\right)^{-1}.$$

В силу произвольности выбора множеств E, ω, $\omega \subset E$, $\omega \in M_n \times \times (x_0)$, $E \subset M_n(x_0)$ и числа $\varepsilon > 0$ окончательно имеем

$$\gamma_m(\delta) \leqslant \left(1 - \sqrt[m]{1 - \delta^{-1}}\right)^{-1}. \tag{11}$$

Рассматривая множества $E_0 = \{x \in R^m : |x - x_0| \leqslant 1\}$, $\omega_0 = \left\{x \in R^m : \sqrt[m]{1 - \delta^{1}} \leqslant |x - x_0| \leqslant 1\right\}$, получаем

$$\gamma_m(\delta) \geqslant S_m(E_0, \omega_0) = \frac{1}{1 - \sqrt[m]{1 - \delta^{-1}}}. \tag{12}$$

Из равенств (11), (12) вытекает справедливость леммы 3. Докажем неравенство (1). В случае $m - 1$ неравенство (1) следует из леммы 2. Пусть P — многочлен m переменных ($m > 1$, степени $\leqslant n$; V — выпуклое ограниченное тело из R^m; ξ, τ, $0 < \tau < \xi \leqslant \leqslant |V|_m$ — фиксированные числа. Далее, пусть $E_\theta = \{x \in V : |P(x)| \leqslant \leqslant P^*(\theta)\}$, а x_0 — точка из E_ξ, такая, что $|P(x_0)| = P^*(\xi)$.

Служение многочлена P на произвольный луч l, исходящий из x_0, есть многочлен от одной переменной степени $\leqslant n$. Обозначив связные компоненты множества E_ξ через $\Delta_s(l)$, $1 \leqslant S \leqslant \leqslant r(l)$ и применяя лемму 2, имеем

$$|P(x_0)| = P^*(\xi) \leqslant T_n\left(2 \min_s \frac{|\Delta_s(l)|_1}{|E_\tau \cap \Delta_s(l)|_1} - 1\right) P^*(\tau) \tag{13}$$

Взяв в правой части неравенства (13) Vrai inf по l, затем sup по всем E_ξ, E_τ, $E_\tau \subset E_\xi$, $|E_\xi|_m = \frac{\xi}{\tau}|E_\tau|_m$, $E_\xi \in M_n(x_0)$, $E_\tau \in M_n(x_0)$, получим, учитывая монотонность $T_n(x)$ при $x \geqslant 1$, $P^*(\xi) \leqslant T_n \times \times \left(2\gamma_m\left(\frac{\xi}{\tau}\right) - 1\right) P^*(\tau)$.

Применим лемму 3 и теорема полностью доказана.

4. Теорема 2. *Пусть V — выпуклое ограниченное тело в R^m, $P \in \boldsymbol{P}_{n,m}$.*

Тогда для симметричного пространства $F(V)$ имеет место неравенство

$$\max_V |P| \leqslant \frac{C_1}{\Psi_F\left[\frac{|V|_m}{(n+1)^{2m}}\right]} \|P\|_{F(V)}, \tag{14}$$

где $C_1 < 8$ — абсолютная постоянная. Неравенство (14) *точно по порядку при $n \to \infty$.*

Доказательство. Воспользовавшись теоремой 1 для $\xi = = |V|_m$, имеем

$$\|P\|_{F(V)} = \|P^*\|_{\tilde{F}(0)|V|_m} \geqslant \|P\|_{C(V)} \left\| \left[T_n \times \right.\right.$$

$$\times\left(\frac{1+\sqrt[m]{1-\frac{\tau}{|V|_m}}}{1-\sqrt[m]{1-\frac{\tau}{|V|_m}}}\right)\Bigg]^{-1}\Bigg\|_{\widetilde{F}(0,\,|V|_m)} \geqslant \|P\|_{C(V)}\Bigg\|\Bigg[T_n\times$$

$$\times\left(\frac{1+\sqrt[m]{1-\frac{\tau}{|V|_m}}}{1-\sqrt[m]{1-\frac{\tau}{|V|_m}}}\right)\Bigg]^{-1}\Bigg\|_{\widetilde{F}(a_n|V|_m,\,|V|_m)} \geqslant \frac{[1-(n+1)^{-2}]^{-n}}{[1+(n+1)^{-1}]^{2n}}\Psi_F\times$$

$$\times\left(\frac{|V|_m}{(n+1)^{2m}}\right)\|P\|_{C(V)} > \frac{1}{8}\Psi_F\left(\frac{|V|_m}{(n+1)^{2m}}\right)\|P\|_{C(V)}.$$

Здесь $a_n = 1-(n+1)^{-2m}$. Справедливость неравенства (14) доказана.

Для доказательства второй части теоремы рассмотрим многочлен m переменных степени $4nm$

$$P_0(x)=\left[\frac{\sin(n+1)\arccos\left(1-\sum_{i=1}^{m}x_i\right)}{(n+1)\sqrt{1-\left(1-\sum_{i=1}^{m}x_i\right)^2}}\right]^{4m}.$$

Пусть Δ есть симплекс $\left\{x\in R^m:\sum_{i=1}^{m}x_i\leqslant 1,\ x_i\geqslant 0,\ 1\leqslant i\leqslant m\right\}$, а $F(\Delta)$ — произвольное симметричное пространство. Тогда нетрудно проверить справедливость следующих неравенств:

$C_2\Psi_F\left[\frac{|\Delta|_m}{(n+1)^{2m}}\right]\leqslant\|P_0\|_{F(\Delta)}\leqslant C_3\Psi_F\left[\frac{|\Delta|_m}{(n+1)^{2m}}\right]$, где C_2, C_3 — постоянные, зависящие только от m.

Отсюда следует неулучшаемость неравенства (14) для $V=\Delta$, и теорема 2 полностью доказана.

Замечание 1. Неравенство (14) выполняется также для симметричных пространств, норма в которых не удовлетворяет неравенству треугольника, в частности, для пространств L_q, $0<q<1$. Именно, пусть P и V те же, что и в теореме 2. Тогда для $0<q\leqslant\infty$ имеет место неравенство

$$\max_V|P|\leqslant C_4\left(\frac{(n+1)^{2m}}{|V|_m}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_V|P|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{15}$$

где $C_4<8$ — абсолютная постоянная.

Доказательство этого результата аналогично доказательству теоремы 2. Из неравенства (15) непосредственно вытекает

Следствие 1. Пусть $P \subset \boldsymbol{P}_{n,m}$, V — выпуклое тело в R^m. Тогда для $0 < q \leqslant q' \leqslant \infty$ имеет место неравенство

$$\Big(\int\limits_V |P|^{q'} dx\Big)^{\frac{1}{q'}} \leqslant C_5 \left(\frac{(n+1)^{2m}}{|V|^m}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q'}} \Big(\int\limits_V |P|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}, \tag{16}$$

где $C_5 < 8^{1-\frac{q}{q'}}$ — некоторая постоянная.

Неравенство (16) точно по порядку при $n \to \infty$. При $m = 1$, $1 \leqslant q \leqslant q' \leqslant \infty$ неравенство (16) хорошо известно (см. А. Ф. Тиман [11 с. 251], М. К. Потапов [7]). Неравенство, подобное (16), для L_q-норм тригонометрических многочленов на отрезке, меньшем чем 2π, установлено Н. К. Бари [1].

Более общий вариант неравенства (16) для $m \geqslant 1$, $1 \leqslant q \leqslant q' \leqslant \infty$ доказан иным методом И. К. Даугаветом [4].

Следствие 2. Пусть P и V те же, что и в следствии 1, а E — измеримое подмножество V, $|E|_m > 0$. Тогда для $0 < q \leqslant q' \leqslant \infty$ справедливо неравенство

$$\left(\int\limits_V |P|^{q'} dx\right)^{\frac{1}{q'}} \leqslant C_6 \frac{|V|_m^{\frac{1}{q'}}}{|E|_m^{\frac{1}{q}}} (n+1)^{2m\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{q'}\right)} \delta\left(\frac{|E|_m}{|V|_m}\right) \times$$

$$\times \left(\int\limits_E |P|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{17}$$

где $\delta(t) = T_n\left(\dfrac{1+\sqrt[m]{1-t}}{1-\sqrt[m]{1-t}}\right)$, а $C_6 < 8^{1-\frac{q}{q'}}$ — некоторая постоянная.

Доказательство. Применяя теорему 1 для $0 < \tau \leqslant |V|_m$, имеем

$$P^*(\tau) \leqslant T_n\left(\frac{1+\sqrt[m]{1-\frac{|E|_m}{|V|_m}}}{1-\sqrt[m]{1-\frac{|E|_m}{|V|_m}}}\right) P^*\left(\frac{|E|_m}{|V|_m}\tau\right). \tag{18}$$

Из этого неравенства получаем для $0 < q \leqslant \infty$

$$\left(\int\limits_V |P|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int\limits_0^{|V|_m} |P^*|^q d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \delta\left(\frac{|E|_m}{|V|_m}\right)\left(\int\limits_0^{|V|_m}\left(P^*\left(\frac{|E|_m}{|V|_m}\tau\right)\right)^q d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{|V|_m}{|E|_m}\right)^{\frac{1}{q}} \delta\left(\frac{|E|_m}{|V|_m}\right)\left(\int\limits_E |P|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{19}$$

Из неравенств (19) и (16) получаем требуемое.

5. Распространим теперь неравенство следствия 1 на симметричные пространства F и H.

Введем обозначение

$$\alpha_{n,m}(t,\ a)=T_n\left(\frac{1+\sqrt[m]{1-t}}{1-\sqrt[m]{1-t}}\right)\left\{\frac{\Psi_H(a)}{\Psi_F(at)}+\int\limits_a^{|V|_m}\left(\frac{u}{\Psi_F(ut)}\right)' d\Psi_H(u)\right\}. \quad (20)$$

Имеет место

Теорема 3. *Пусть P, V те же, что и в теореме 2. Тогда для симметричных пространств $F(V)$ и $H(V)$ справедливо неравенство*

$$\|P\|_{H(V)}\leqslant C_7\alpha_{n,m}\left(1,\ \frac{|V|_m}{(n+1)^{2m}}\right)\|P\|_{F(V)}, \quad (21)$$

где $C_7<9$ — абсолютная постоянная.

Теорема доказывается аналогично теореме 2 работы [9], в которой получено обобщение известных неравенств Д. Джексона [5] и С. М. Никольского [6] (для тригонометрических многочленов одной переменной) на симметричные пространства.

Замечание 2. Положив в теореме 3 $F=L_q$, $H=L_{q'}$, получаем из (21) неравенство (16) для $1\leqslant q<q'\leqslant\infty$.

6. Приведем, наконец, локализацию неравенства теоремы 3 на измеримые множества $E\subset V$ положительной меры.

Теорема 4. *Пусть $P\subset \boldsymbol{P}_{n,m}$, V — выпуклое ограниченное тело в R^m, а $E\subset V$ — измеримое множество положительной меры. Тогда для симметричных пространств $F(V)$, $H(V)$ имеет место неравенство*

$$\|P\|_{H(V)}\leqslant C_8\alpha_{n,m}\left(\frac{|E|_m}{|V|_m},\ \frac{|V|_m}{(n+1)^{2m}}\right)\|P\|_{F(E)}, \quad (22)$$

где $C_8<9$ — абсолютная постоянная, а функция $\alpha_{n,m}(t,\ a)$ определена (20).

Доказательство. Достаточно доказать теорему 4 для $F=M_{\Psi_1}$, $H=\lambda_{\Psi_2}$, где Ψ_1, Ψ_2 — вогнутые возрастающие на $[0,|V|_m]$ функции, $\Psi_1(0)=\Psi_2(0)=0$. Применяя неравенство (18), получаем

$$\|P\|_{M_{\Psi_1}(V)}=\|P^*\|_{\tilde M_{\Psi_1(0,\,|V|_m)}}\leqslant T_n\left|\frac{1+\sqrt[m]{1-\frac{|E|_m}{|V|_m}}}{1-\sqrt[m]{1-\frac{|E|_m}{|V|_m}}}\right|\times$$

$$\times\sup_{0<t<|V|_m}\frac{\int\limits_{|V|_m-t}^{|V|_m}P^*\left(\frac{|E|_m}{|V|_m}\tau\right)d\tau}{\Psi_1(|V|_m-t)}=\frac{|V|_m}{|E|_m}T_n\left|\frac{1+\sqrt[m]{1-\frac{|E|_m}{|V|_m}}}{1-\sqrt[m]{1-\frac{|E|_m}{|V|_m}}}\right|\times$$

$$\times \sup_{0 \leqslant u \leqslant |V|_m} \frac{\int\limits_{|E|_m - u}^{|E|_m} P^*(\tau)\, d\tau}{\varphi_1(|E|_m - u)} \leqslant \frac{|V|_m}{|E|_m} T_n \left| \frac{1 + \sqrt[m]{1 - \frac{|E|_m}{|V|_m}}}{1 - \sqrt[m]{1 - \frac{|E|_m}{|V|_m}}} \right| \| P \|_{M_{\varphi_1}(E)}. \tag{23}$$

Здесь $\varphi_1(y) = \Psi_1\left(\frac{|V|_m}{|E|_m} y\right)$.

Из (23) и теоремы 3 следует неравенство (22) для $F = M_{\Psi_1}$, $H = \alpha_{\Psi_2}$. Теорема доказана. Положив $F = L_q$, $H = L_{q'}$, $1 \leqslant q < q' \leqslant \infty$, получаем из теоремы 4 неравенство (17) с некоторой постоянной $C_9 < \frac{9(q'-1)}{q-q'}$, которая, очевидно, хуже C_6.

В заключение выражаю благодарность Ю. А. Брудному за постоянное внимание к работе.

Список литературы: 1. *Бари Н. К.* Обобщение неравенств С. Н. Бернштейна и *А. А. Маркова.*— «Изв. АН СССР, Сер. мат.», 1954, т. 18, № 2, с. 159—176. 2. *Брудный Ю. А., Ганзбург М. И.* Об одной экспериментальной задаче для многочленов *n* переменных.— «Изв. АН СССР. Сер. мат.», 1973, т. 37, № 2, с. 344—355. 3. *Брудный Ю. А., Ганзбург М. И.* Об одном точном неравенстве для многочленов многих переменных.— В кн.: Мат. программирование и смежн. вопросы. Теория функций и функц. анализ. М., 1976. с. 118—123. 4. *Даугавет И. К.* Некоторые неравенства для многочленов в многомерном случае.— В кн.: Методы вычислений. Вып. 10. 1976, № 10, с. 3—26. 5. Jackson D. Certain problems of closest approximation.— «Bull. Amer. Math. Soc.», 1933, т. 39, с. 889—906. 6. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных.— «Труды МИАН», 1952, т. 38, с. 244—278. 7. *Потапов М. К.* Некоторые неравенства для полиномов и их производных.— «Вестн. МГУ, 1960, № 2, с. 10—19. 8. Remes E. Sur propriete extremale des polynomes de Tchebychef.— «Зап. Харьк. мат. о-ва», сер. 4, 1936, т. 13, № 1, с. 93—95. 9. *Родин В. А.* Неравенства Джексона и Никольского для тригонометрических полиномов в симметричном пространстве.— В кн.: Мат. программирование и смежн. вопросы. Теория функций и функц. анализ. М., 1976, с. 133—140. 10. *Семенов Е. М.* Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций.— ДАН СССР, 1964, т. 156, № 6, с. 1292—1295. 11. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного. М., Физматгиз, 1960. 624 с. 12. *Харди Г., Литтльвуд Дж., Полиа Г.* Неравенства. ИЛ, 1948. 456 с.

Поступила 8 декабря 1975 г.