УДК 517.948.35+517.948.5

ДО КОНГ ХАНЬ

О ВПОЛНЕ НЕУНИТАРНОСТИ СЖАТИЙ

Вопрос о вполне неунитарности сжатий и вполне несамосопряженности диссипативных операторов рассматривается в [1—6]. Недавно Т. Крите [4] получил довольно простой критерий вполне несамосопряженности некоторого класса операторов с рангом неэрмитовости, равным единице. Подобный критерий для сжатий с единичным рангом неунитарности был получен А. Лубином [5]. В этой работе мы распространяем их результаты на некоторый класс сжатий с произвольным рангом неунитарности.

1. Пусть σ — любое гильбертово пространство, а функция $P(t)$, $0 \leqslant t \leqslant l$, значения которых являются операторами в σ, удовлетворяет условию

$$\int_0^l \| P(t) \|^2 dt < \infty.$$

Рассмотрим оператор

$$Tf = e^{i\varphi(x)} f(x) - 2e^{i\varphi(x)} P^*_{(x)} \Pi^{-1}(x) \int_x^l \Pi(t) P(t) f(t)\, dt, \quad f \in L^2(\sigma), \tag{1}$$

где

$$\Pi(x) = \int_0^{\overrightarrow{x}} \exp\{-P(t) P^*(t)\, dt\}, \tag{2}$$

$\varphi(x)$ — любая вещественная функция. К оператору вида (1) приводят, например, операторы класса K ([см. 2]).

Введем в рассмотрение также операторы F и G, отображающие из σ в $L^2(\sigma)$, и оператор T_0, действующий в σ, полагая

$$Fg = \sqrt{2}\, e^{i\varphi(x)} P^*(x)\, \Pi^{-1}(x)\, \Pi(l)\, g; \tag{3}$$

$$Gg = \sqrt{2}\, P^*(x)\, \Pi^*(x)\, g; \tag{4}$$

$$T_0 g = \Pi^*(e)\, g, \quad g \in \sigma: \tag{5}$$

Предложение. Совокупность

$$\theta = \begin{pmatrix} L^2(\sigma) & T & L^2(\sigma) \\ F & & G \\ \sigma & T_0 & \sigma \end{pmatrix}$$

образует сжимающий узел, т. е. имеют место соотношения

$$I - TT^* = FF^*, \quad I - T^*T = GG^*, \quad TG = FT_0, \quad I - T_0T_0^* = F^*F,$$
$$I - T_0^*T_0 = G^*G.$$

Характеристическая функция узла θ по определению

$$\theta(\zeta) = T_0 - \zeta F^*(I - \zeta T^*)^{-1}G =$$
$$= \overset{\leftarrow}{\int_0^l} \exp\left\{-\frac{1+\zeta e^{-i\varphi(x)}}{1-\zeta e^{-i\varphi(x)}} P(x)P^*(x)\,dx\right\}. \tag{6}$$

Обозначим

$$Y_{\zeta, g} = (I - \zeta T^*)^{-1}Gg; \tag{7}$$
$$X_{\zeta, f} = (I - \zeta T)^{-1}Ff. \tag{8}$$

Тогда справедлива

Лемма 1.

$$Y_{\zeta, g} = \frac{\sqrt{2}}{1-\zeta e^{-i\varphi(x)}} P^*(x)\,\theta(x;\ \zeta)\,g; \tag{9}$$

$$X_{\zeta, f} = \frac{\sqrt{2}\,e^{i\varphi(x)}}{1-\zeta e^{i\varphi(x)}} P^*(x)\,\theta^{-1*}(x;\ \bar{\zeta})\,\theta^*(e)\,f, \tag{10}$$

где

$$\theta(x;\ \zeta) = \overset{\leftarrow}{\int_0^x} \exp\left\{-\frac{1+\zeta e^{i\varphi(t)}}{1-\zeta e^{-i\varphi(t)}} P(t)P^*(t)\,dt\right\}. \tag{11}$$

Из (6), (11) следует, что характеристическая функция узла θ допускает факторизацию.

$$\theta(\zeta) = \tilde{\theta}(x,\ \zeta)\,\theta(x,\ \zeta), \tag{12}$$

где

$$\tilde{\theta}(x;\ \zeta) = \theta(\zeta)\,\theta^{-1}(x;\ \zeta). \tag{13}$$

По характеристической функции $\theta(\zeta)$ строим функциональную модель [8]:

$$\hat{H} = [H^2(\sigma) \oplus \Delta L^2(\sigma)] \ominus \{\theta u \oplus \Delta u;\ u \in H^2(\sigma)\};$$

$$\hat{T}\{\varphi,\ \psi\} = \{e^{it}\varphi(e^{it}) - \theta(e^{it})\,C_{\varphi, \psi};\ \psi(e^{it}) - \Delta(e^{it})\,C_{\varphi, \psi}\};$$

$$C_{\varphi, \psi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{it}\{\theta^*(e^{it})\,\varphi(e^{it}) + \Delta(e^{it})\,\psi(e^{it})\}\,dt;$$

$$\hat{G}g = \{e^{-it}(\theta(e^{it}) - T_0)\,g,\ \ e^{-it}\Delta(e^{it})\,g\};$$

$$\widehat{F}f = \{ (\theta(e^{it}) T_0^* - I) f, \quad \Delta(e^{it}) T_0^* f \},$$

где

$$\Delta(e^{it}) = (I - \theta^*(e^{it})\,\theta(e^{it}))^{1/2}.$$

В. М. Бродский и Я. С. Шварцман [8] показали, что простая часть узла θ унитарно эквивалентна модельному узлу

$$\widehat{\theta} = \begin{pmatrix} \widehat{H} & \widehat{T} & \widehat{H} \\ \widehat{F} & & \widehat{G} \\ \sigma & T_0 & \sigma \end{pmatrix},$$

причем оператор преобразования U определяется следующими соотношениями:

$$UX_{\zeta, f} = \widehat{X}_{\zeta, f}; \tag{14}$$

$$UY_{\zeta, g} = \widehat{Y}_{\zeta, g}, \tag{15}$$

где

$$\widehat{X}_{\zeta, f} = \left\{ \frac{\theta(e^{it})\,\theta^*(\bar{\zeta}) - I}{1 - e^{it}\zeta} f, \quad \frac{\Delta(e^{it})\,\theta^*(\bar{\zeta})}{1 - e^{it}\zeta} f \right\}; \tag{16}$$

$$\widehat{Y}_{\zeta, g} = \left\{ \frac{\theta(e^{it}) - \theta(\zeta)}{e^{it} - \zeta} g, \quad \frac{\Delta(e^{it})}{e^{it} - \zeta} g \right\}. \tag{17}$$

Теорема 1. *Для того чтобы оператор T вида (1), (2) был вполне неунитарным, необходимо и достаточно, чтобы: 1) факторизация (12) характеристической функции $\theta(\zeta)$ узла была регулярной для любой $x \in (0, l)$; 2) уравнение $P(x) f(x) = 0$ имело единственное решение $f(x) = 0$.*

Доказательство. *Достаточность.* Поскольку вполне неунитарность оператора T и простота узла θ (сжимающего) эквивалентны, нам достаточно доказать, что при выполнении условий теоремы 1, совокупность векторов $X_{\zeta, f}$ и $Y_{\zeta, g}$, когда ζ пробегает открытый единичный круг, а f и g пробегают пространство σ, будет полной в $L^2(\sigma)$.

Так как факторизация (12) регулярна, то модельное пространство $\widehat{H}$ допускает разложение $\widehat{H} = \widehat{H}_1 \oplus \widehat{H}_2$ (теорема Надя — Фояша [9]), где

$$\widehat{H}_1 = \{\theta_2 u \oplus Z^{-1}(\Delta_2 u \oplus v);\ u \in H^2(\sigma),\ v \in \overline{\Delta_1 L^2(\sigma)}\} \ominus \{\theta w \oplus \Delta w;\ w \in H^2(\sigma)\};$$

$$\widehat{H}_2 = [H^2(\sigma) \oplus Z^{-1}\,\overline{(\Delta_2 L^2)} \oplus \{0\}] \ominus \{\theta_2 u \oplus Z^{-1}(\Delta_2 u \oplus 0);\ u \in H^2(\sigma)\},$$

где Z — унитарное (с силу регулярности факторизации) отображение из $\Delta L^2(\sigma)$ в $\Delta_2 L^2(\sigma) \oplus \Delta_1 L^2(\sigma)$, задаваемое формулой

$$Z: \Delta v \to \Delta_2 \theta v \oplus \Delta_1 v, \quad v \in L^2(\sigma), \quad \theta_1(\zeta) = \theta(x; \zeta); \quad \theta_2(\zeta) = \tilde{\theta}(x; \zeta).$$

Теперь с помощью унитарного оператора Z переводим узел $\hat{\theta}$ в узел $\hat{\hat{\theta}}$ (значит, узел θ преобразуется в $\hat{\hat{\theta}}$ с помощью оператора $V = ZU$). Тогда разложению $\hat{H} = \hat{H}_1 \oplus \hat{H}_2$ отвечает разложение $\hat{\hat{H}} = \hat{\hat{H}}_1 \oplus \hat{\hat{H}}_2$, где

$$\hat{\hat{H}} = [H^2(\sigma) \oplus \overline{\Delta_2 L^2(\sigma)} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\sigma)}] \ominus \{\theta u \oplus \Delta_2 \theta_1 u \oplus \Delta_1 u; \; u \in H^2(\sigma)\};$$

$$\hat{\hat{H}}_1 = \{\theta_2 u \oplus \Delta_2 u \oplus v_1; \; u \in H^2(\sigma); \; v_1 \in \overline{\Delta_1 L^2(\sigma)}\} \ominus \{\theta w \oplus \Delta_2 \theta_1 w \oplus \Delta_1 w; \; w \in H^2(\sigma)\};$$

$$\hat{\hat{H}}_2 = [H^2(\sigma) \oplus \overline{\Delta_2 L^2(\sigma)} \oplus \{0\}] \ominus \{\theta_2 u \oplus \Delta_2 u \oplus 0; \; u \in H^2(\sigma)\}.$$

Векторы $\hat{X}_{\zeta, f}$, $\hat{Y}_{\zeta, g}$ при этом переводятся соответственно в

$$\hat{\hat{X}}_{\zeta, f} = \left\{ \frac{\theta(e^{it})\,\theta^*(\bar{\zeta}) - I}{1 - e^{it}\zeta} f, \; \frac{\Delta_2(e^{it})\,\theta_1(e^{it})\,\theta^*(\bar{\zeta})}{1 - e^{it}\zeta} f, \; \frac{\Delta_1(e^{ti})\,\theta^*(\bar{\zeta})}{1 - e^{it}\zeta} f \right\},$$

$$\hat{\hat{Y}}_{\zeta, g} = \left\{ \frac{\theta(e^{it}) - \theta(\zeta)}{e^{it} - \zeta} g, \; \frac{\Delta_2(e^{it})\,\theta_1(e^{it})}{e^{it} - \zeta} g, \; \frac{\Delta_1(e^{it})}{e^{it} - \zeta} g \right\}.$$

Обозначая через $\hat{\hat{P}}_1$ ортопроектор из $\hat{\hat{H}}$ на $\hat{\hat{H}}_1$, имеем следующие соотношения.

Лемма 2.

$$\hat{\hat{P}}_1 \hat{\hat{Y}}_{\zeta, g} = \left\{ \theta_2(e^{it}) \frac{\theta_1(e^{it}) - \theta_1(\zeta)}{e^{it} - \zeta} g; \; \Delta_2(e^{it}) \frac{\theta_1(e^{it}) - \theta_1(\zeta)}{e^{it} - \zeta} g, \; \frac{\Delta_1(e^{it})}{e^{it} - \zeta} g \right\}; \tag{18}$$

$$\hat{\hat{P}}_1 \hat{\hat{X}}_{\zeta, f} = \left\{ \theta_2(e^{it}) \frac{\theta_1(e^{it})\,\theta^*(\bar{\zeta}) - \theta_2^*(\zeta)}{1 - e^{it}\zeta} f; \; \Delta_2(e^{it}) \frac{\theta_1(e^{it})\,\theta^*(\bar{\zeta}) - \theta_2^*(\bar{\zeta})}{1 - e^{it}\zeta} f, \; \frac{\Delta_1(e^{it})\,\theta^*(\bar{\zeta})}{1 - e^{it}\zeta} f \right\}. \tag{19}$$

Справедливы также соотношения

$$\left(\hat{\hat{P}}_1 \hat{\hat{Y}}_{\zeta, g}, \; \hat{\hat{X}}_{z, f}\right)_{\hat{\hat{H}}} = \left(\frac{\theta(\bar{z}) - \theta_2(\bar{z})\,\theta_1(\zeta)}{\zeta - \bar{z}} g, \; f \right)_\sigma; \tag{20}$$

$$\left(\hat{\hat{P}}_1 \hat{\hat{Y}}_{\zeta, g}, \; \hat{\hat{Y}}_{z, f}\right)_{\hat{\hat{H}}} = \left(\frac{\theta_1^*(z)\,\theta_1(\zeta) - I}{\bar{z}\zeta - 1} g, \; f \right)_\sigma; \tag{21}$$

$$\left(\hat{P}_1\hat{X}_{\zeta, g},\ \hat{X}_{z, f}\right)_{\hat{H}}=\left(\frac{\theta_2(\bar{z})\,\theta_2^*(\zeta)-\theta(\bar{z})\,\theta^*(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta}g,\ f\right)_{\sigma}. \tag{22}$$

Пусть M_x — проектор в $L^2(\sigma)$, который определяется формулой

$$M_x f(t)=\chi_{0, x}(t)\,f(t),\quad f\in L^2(\sigma),$$

где $\chi_{0, x}(t)$ — характеристическая функция интервала $(0,\ x)$. Тогда из (9), (10) следует

$$\left(M_xV^*\hat{Y}_{\zeta, g},\ V^*\hat{X}_{z, f}\right)=\left(\frac{\theta(\bar{z})-\tilde{\theta}(x,\ \bar{z})\,\theta(x,\ \zeta)}{\zeta-\bar{z}}g,\ f\right); \tag{23}$$

$$\left(M_xV^*\hat{Y}_{\zeta, g},\ V^*\hat{Y}_{z, f}\right)=\left(\frac{\theta^*(x,\ z)\,\theta(x,\ \zeta)-I}{\bar{z}\zeta-1}g,\ f\right); \tag{24}$$

$$\left(M_xV^*\hat{X}_{\zeta, g},\ V^*\hat{X}_{z, f}\right)=\left(\frac{\tilde{\theta}(x,\ \bar{z})\,\tilde{\theta}^*(x,\ \bar{\zeta})-\theta(\bar{z})\,\theta^*(\bar{\zeta})}{1-\bar{z}\zeta}g,\ f\right). \tag{25}$$

Пользуясь тем, что $\theta_1(z)=\theta(x,\ z)$; $\theta_2(z)=\tilde{\theta}(x,\ z)$ уравнения (20) — (22) и (23) — (25), и в силу плотности векторов $\hat{X}_{z, f}$, $\hat{Y}_{\zeta, g}$ в $\hat{H}$, получим $\hat{P}_1=VM_xV^*\Rightarrow\hat{P}_1=UM_xU^*$.

При условии, если $B: H_1\to H_2$ — некоторая изометрия, E — проектор в H_2, B^*EB — есть проектор в H_1, VH_1 инвариантно относительно E (см. [4]), мы можем заключить, что $U^*\hat{H}$ инвариантно относительно M_x для любого x из интервала $(0,\ l)$, так как $Y_{\zeta, g}\in U^*\hat{H}$, то

$$\chi_{s, x}(t)\,Y_{\zeta, g}=M_xY_{\zeta, g}-M_sY_{\zeta, g}\in U^*\hat{H}.$$

Последнее в свою очередь означает, что для любой ступенчатой функции $m(t)$

$$m(t)\,Y_{\zeta, g}\in U^*\hat{H}. \tag{26}$$

Пусть $f(t)\in L^2(\sigma)$ и ортогональна $U^*\hat{H}$, согласно (26) имеем

$$\int_0^l m(t)\,(Y_{\zeta, g}(t), f(t))_\sigma dt=0,$$

откуда следует $(Y_{\zeta, g}(t),\ f(t))=0$ для почти всех $t\in[0,\ l]$. Последнее вместе с (9) дает $P(t)\,f(t)=0$ почти всюду, таким образом, по условию теоремы $f(t)=0$ почти для всех $t\in[0,\ l]$ это означает, что $U^*\hat{H}=L^2(\sigma)$, т. е. T вполне неунитарен.

Необходимость теоремы следует из того, что факторизация (12) для любой точки x является правильной (см. определение правильной факторизации в [8]) и из теоремы 2[8]. Теорема доказана.

Следствие. *Если $\varphi(t)$ — монотонная функция, то дополнительная компонента оператора T состоит из тех и только тех* *векторов* $f(t) \in L^2(\sigma)$, *для которых выполняется почти при всех* x *равенство* $P(x) f(x) = 0$.

2. Рассмотрим диссипативный оператор:

$$Af = \alpha(x) f(x) + i\Pi^*(x) \int_a^x \Pi(t) f(t)\, dt, \; f \in L^2(\sigma) = L^2_\sigma[a, b], \tag{27}$$

$\alpha(x)$ — ограниченная функция, а $\Pi(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b \| \Pi(t) \|^2\, dt < \infty.$$

Характеристическая функция $S(\lambda)$ оператора A допускает факторизацию

$$S(\lambda) = \overset{\rightarrow}{\int_a^b} \exp\left\{- i\, \frac{\Pi(x)\Pi^*(x)}{\alpha(x) - \lambda}\, dx\right\} = \overset{\rightarrow}{\int_a^t} \exp\left\{- i\, \frac{\Pi(x)\Pi^*(x)}{\alpha(x) - \lambda}\, dx\right\} \times$$
$$\times \overset{\rightarrow}{\int_t^b} \exp\left\{- i\, \frac{\Pi(x)\Pi^*(x)}{\alpha(x) - \lambda}\, dx\right\}. \tag{28}$$

Пользуясь функциональной моделью диссипативного оператора Я. С. Шварцмана [7], получим следующую теорему.

Теорема 2. *Для того чтобы ограниченный диссипативный оператор* A *вида (27) был вполне несамосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы 1) факторизация (28) была регулярной* ($\forall t$)*; 2) из* $\Pi(x) f(x) = 0$ *п. в. следует* $f(x) = 0$ *п. в.* Аналогично случаю сжатий можно сформулировать следствие, когда $\alpha(x)$ — монотонная функция.

3. Если функция $\alpha(x)$ из (27) неограничена, мы можем рассматривать его преобразование Кэли $T = (A - iI)(A + iI)^{-1}$, которое является сжатием, определенным на всем пространстве. Так как оператор A вполне несамосопряженный, тогда и только тогда, когда его преобразование Кэли вполне неунитарен, то, применяя метод пункта 1, мы получим следующее предложение.

Теорема 3. *Для того чтобы оператор* A *был вполне несамосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы 1) факторизация*

$$\overset{\rightarrow}{\int_a^b} \exp\left\{\frac{(\zeta - 1)(1 - \beta(x))}{2(\beta(x) - \zeta)}\, \Pi(x)\Pi^*(x)\, dx\right\} = \overset{\rightarrow}{\int_a^t} \ldots \overset{\rightarrow}{\int_t^b} \ldots, \; \forall t \in (a, b)$$

была регулярной $\left(\text{где } \beta(x) = \dfrac{\alpha(x) - i}{\alpha(x) + i}\right)$*; 2) из* $\Pi(x) f(x) = 0$ *п. в. следует* $f(x) = 0$ *п. в.*

Теорема 3 для случая, когда $\dim \sigma = 1$ была доказана Т. Крите в [4]. Теорема 2 в известном смысле обобщает результаты М. С. Лившица [1,6], Л. А. Сахновича [3], Ю. П. Гинзбурга и

Могилевской [10] о дополнительной компоненте оператора вида (27). Следует отметить, что рассмотренный метод можно применить для изучения операторов класса $i\Omega$ (или K) с дискретным спектром.

Список литературы: 1. *Бродский М. С., Лившиц М. С.* Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы.— «Усп. мат. наук», 1958, 13, № 1, с. 3—85. 2. *Поляцкий В. Т.* О приведении к треугольному виду операторов класса K.— «Науч. зап. кафедр математики, физики и естествознания». Одесса, 1959, 27, № 1, с. 13—15. 3. *Сахнович Л. А.* Диссипативные операторы с абсолютно непрерывным сектором.— «Труды Моск. мат. о-ва», 1968, 19, с. 211—270. 4. *Kriete T. L.* Complete nonselfadjointness of almost selfadjoint operators.— «Pacific J. Math», 1972, 62, с. 413—437. 5. *Lubin A.* Concrete model Theory for a klass of operators with uninary part.— «J. Funct. analysis», 1974, 17, с. 388—394. 6. *Лившиц М. С.* О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов.— «Мат. сб.», 1954, 34, № 1, с. 145—199. 7. *Шварцман Я. С.* Функциональная модель диссипативного узла. В кн.: Мат. исследования. Вып. 2. Кишинев. 1972. 8. *Бродский В. М., Шварцман Я. С.* Об инвариантных подпространсгвах сжатий.— ДАН СССР, 1971, 201, № 3, с. 519—522. 9. *Сенефальви — Надь Б., Фаяш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М., «Мир», 1970, 31 с. 10. *Гинзбург Ю. П., Могилевская Р. Л.* Об одном классе диссипативных операторов с медленно растущей револьвентной.— «Функц. анализ и его приложения», 1969, 3, вып. 4, с. 83—84.

Поступила 16 октября 1975 г.