УДК 517.944

Г. А. ДЕРФЕЛЬ, Я. И. ЖИТОМИРСКИЙ

О ПОВЕДЕНИИ В НУЛЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работах [1, 2] описано поведение при $|x| \to \infty$ решений однородной задачи Коши для уравнений вида

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t} = \sum_{r=1}^{R} [P_r(D)\,u](\Lambda_r xt) = Lu(x,\ t) \quad x \in R^m,\ t \in [0,\ T], \tag{1}$$

$$P_r(D) = \sum_{k=0}^{p} \sum_{|\alpha|=k} A_{r(\alpha)} D^{(\alpha)}, \quad (\alpha) = (\alpha^1,\ \ldots,\ \alpha^m),$$

$A_{r(\alpha)}$ — (комплексные) постоянные; Λ_r — неособая матрица $(m \times m)$. При этом предполагалось, что преобразующие пространственный аргумент матрицы Λ_r являются «несжимающими», т. е. для любого $x \in R^m,\ x \neq 0$,

$$\|\Lambda_r x\| \geqslant \|x\|,\ r = 1,\ \ldots,\ R.$$

Оказывается, что методы, примененные в [1, 2], могут быть использованы для исследования поведения при $x \to 0$ решений той же задачи в случае «сжимающих» преобразований Λ_r, т. е. при условии

$$\|\Lambda_r x\| < \|x\|,\ x \in R^m,\ x \neq 0,\ r = 1,\ \ldots,\ R. \tag{2}$$

Теорема. *Пусть* $u(x,\ t) \not\equiv 0$ — *решение* (1), *удовлетворяющее условию*

$$u(x,\ 0) \equiv 0. \tag{1'}$$

Тогда

$$\overline{\lim_{x \to 0}}\, |u(x,\ t)| \exp\{a \ln^2 \|x\|\} = \infty \tag{3}$$

при

$$a > \frac{p}{2}\frac{\ln\lambda}{\ln^2\Lambda}, \tag{4}$$

где

$$\Lambda = \max_r \|\Lambda_r\|, \quad \lambda = \max_r \|\Lambda_r^{-1}\|. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in S_0^\beta$, $\beta > 1$ [3], т. е. существуют положительные постоянные A_φ, B_φ, C_φ, такие, что при любом $x \in R^m$ и любом мультииндексе (γ) справедливы оценки

$$|D^{(\gamma)}\varphi(x)| \leqslant C_\varphi B_\varphi^{|\gamma|}|\gamma|^{\beta|\gamma|}\begin{cases}1, & \|x\| \leqslant A_\varphi,\\ 0, & \|x\| > A_\varphi.\end{cases} \tag{6}$$

Обозначим

$$F(t) = \int_{R^m} u(x, t)\varphi(x)\,dx, \quad t \in [0, T].$$

Легко видеть, что

$$F^{(n)}(t) = \int_{R^m} u(x, t) L^{*n}\varphi(x)\,dx, \tag{7}$$

где

$$L^*\varphi(x) = \sum_{r=1}^{R} P_r^*(D)\left[\varphi(\Lambda_r^{-1}x)\right]|\det\Lambda_r|^{-1},$$

$P_r^*(D)$ — сопряженное к $P_r(D)$ дифференциальное выражение.

Из (1′) и (7) следует, что

$$F^{(n)}(0) = 0, \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Оценим $F^{(n)}(t)$ при $t \in [0, T]$. В силу основной леммы из работы [2] имеем:

$$L^{*n}\varphi(x) = \sum_{r_1, \ldots, r_n=1}^{R} \sum_{\substack{(\alpha_1)\cdots(\alpha_n)\\ |\alpha_i| \leqslant P}} M_{r_1\ldots r_n}^{(\alpha_1)\cdots(\alpha_n)} S_{r_1\ldots r_n}^{(\alpha_1)\cdots(\alpha_n)}(x), \tag{9}$$

$$M_{r_1,\ldots,r_n}^{(\alpha_1)\cdots(\alpha_n)} = \prod_{i=1}^{n}(-1)^{|\alpha_i|}A_{r_i(\alpha_i)}|\det\Lambda_{r_i}|^{-1},$$

$$S_{r_1\ldots r_n}^{(\alpha_1)\cdots(\alpha_n)}(x) = \sum_{(\alpha):|\alpha| = \Sigma|\alpha_i|}(D_\varphi^{(\alpha)})(\Lambda_{r_1}^{-1}\ldots\Lambda_{r_n}^{-1}x)$$

$$\prod_{i=1}^{n} B_{(\alpha),|\alpha_i|}\left(\Lambda_{r_i}^{-1}\ldots\Lambda_{r_1}^{-1}\right).$$

Здесь $B_{(\alpha),k}(\Lambda)$ — произведение k множителей, каждый из которых является элементом матрицы Λ. Отсюда видно, что

$$\left|M_{r_1\ldots r_n}^{(\alpha_1)\cdots(\alpha_n)}\right| \leqslant M^n; \tag{10}$$

$$\left|\prod_{i=1}^{n} B_{(\alpha),\,|\alpha_i|}(\Lambda_{r_i}^{-1}\ldots\Lambda_{r_1}^{-1})\right| \leqslant \lambda^{\sum_{i=1}^{n} i|\alpha_i|} \leqslant \lambda^{\frac{p}{2}n(n+1)}, \tag{11}$$

так как из (2) и (5) следует, что $\Lambda < 1$, $\lambda > 1$.

Обозначим

$$\Omega^{\varphi}_{r_1\ldots r_n} = \{x \in R^m : \|\Lambda_{r_1}^{-1}\ldots\Lambda_{r_n}^{-1}x\| \leqslant A_{\varphi}\}.$$

Тогда из (6) и (11) заключаем, что

$$\left|S^{(\alpha_1)\ldots(\alpha_n)}_{r_1,\ldots,r_n}(x)\right| \leqslant C_{\varphi}\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\right)^{m+\beta\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|} B_{\varphi}^{\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|}\lambda^{\frac{p}{2}n(n+1)} g^{\varphi}_{r_1,\ldots,r_n}(x), \tag{12}$$

$$g^{\varphi}_{r_1,\ldots,r_n}(x) = \begin{cases}1, & x \in \Omega^{\varphi}_{r_1,\ldots,r_n},\\ 0, & x \overline{\in} \Omega^{\varphi}_{r_1,\ldots,r_n}.\end{cases}$$

Подставляя оценки (10) и (12) в (9), имеем

$$|L^{*n}\varphi(x)| \leqslant C_{\varphi}\lambda^{\frac{p}{2}n(n+1)} B_1^n n^{P\beta n} \sum_{r_1,\ldots,r_n=1}^{R} g^{\varphi}_{r_1,\ldots,r_n}(x). \tag{13}$$

Предположим теперь, что соотношение (3) не имеет места. Тогда при некотором a, удовлетворяющем условию (4), и при некоторых $C > 0$ и $\delta > 0$ справедлива оценка

$$|u(x,t)| \leqslant C\exp\{-a\ln^2\|x\|\},\quad \|x\| \leqslant \delta. \tag{14}$$

Из (7), используя (13), получим

$$|F^{(n)}(t)| \leqslant C_{\varphi}\lambda^{\frac{p}{2}n^2} B_1^n n^{P\beta n} \sum_{r_1,\ldots,r_n=1}^{R} \int\limits_{\Omega^{\varphi}_{r_1,\ldots,r_n}} |u(x,t)|\,dx. \tag{15}$$

Из определения $\Omega^{\varphi}_{r_1,\ldots,r_n}$ следует, что

$$\Omega^{\varphi}_{r_1,\ldots,r_n} \subset \{x \in R^m = \|x\| \leqslant \Lambda^n A_{\varphi}\}.$$

Отсюда, поскольку $\Lambda < 1$, можно при достаточно большом n продолжить оценку (15), воспользовавшись (14):

$$|F^{(n)}(t)| \leqslant C_1\lambda^{\frac{p}{2}n^2} B_2^n n^{p\beta n}\exp\{-a\ln^2(\Lambda^n A_{\varphi})\} = C_2\exp\{-a\ln^2\Lambda + \\ + \tfrac{p}{2}\ln\lambda)n^2 - 2an\ln\Lambda\ln A_{\varphi} + n\ln B_2 + p\beta n\ln n\} \leqslant C_3, \tag{16}$$

так как в силу (4) $-a\ln^2\Lambda + \frac{p}{2}\ln\lambda < 0$.

Отсюда, учитывая (8), заключаем, что $F(t) \equiv 0$. Поскольку пространство S_0^{β}, $\beta > 1$ достаточно богато функциями [3], то из (7) при $n = 0$ получаем $u(x,t) \equiv 0$, что противоречит условию теоремы.

Как показывает оценка (16), условие (3) можно уточнить, например, заменив его следующим:

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\, |u(x, t)| \exp\{a \ln^2 \|x\| + b\, |\ln \|x\||\, \ln |\ln \|x\||\} = \infty$$

при

$$a = \frac{p}{2} \frac{\ln \lambda}{\ln^2 \Lambda},\ b > \frac{p}{|\ln \Lambda|}.$$

Покажем, однако, что результат теоремы перестает, вообще говоря, быть верным при $a < \frac{p}{2} \frac{\ln \lambda}{\ln^2 \Lambda}$. А именно, построим решение $u(x, t) \not\equiv 0$ уравнения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u\left(\frac{x}{2},\ t\right)}{\partial x}, \tag{17}$$

удовлетворяющее условию (1_0) и оценке (14) с $a < \frac{1}{2 \ln 2}$ (в этом случае $p = 1$, $\Lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 2$).

Рассмотрим сначала уравнение

$$y'\left(\frac{x}{2},\ \lambda\right) = \lambda y(x, \lambda). \tag{18}$$

Нетрудно видеть, что функция

$$y_+(x, \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left\{-2^{-n-1}\lambda x - \frac{\ln 2}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

удовлетворяет уравнению (18) при $x > 0$ и аналитична по λ при $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$. Кроме того, при тех же значениях x и λ

$$|y_+(x, \lambda)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\ln 2}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right\} = C_0 < \infty.$$

Отсюда и из уравнения (18) заключаем, что

$$\left|y_+^{(m)}(x, \lambda)\right| \leqslant 2^{\frac{m(m+1)}{2}} |\lambda|^m \cdot C_0,\quad m = 0, 1, \ldots;\ x > 0. \tag{19}$$

Записав $y_+(x, \lambda)$ в виде

$$y_+(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp\left\{-\frac{\ln 2}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right\} \times$$
$$\times \left[\exp\left\{-\frac{\lambda x}{2^{n+1}}\right\} - \exp\{-2^n \lambda x\}\right],$$

убеждаемся, что $\lim\limits_{x\to+0} y_+(x, \lambda) = 0$. Отсюда и из (18) видно, что

$$\lim_{x\to+0} y_+^{(m)}(x, \lambda) = 0,\quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Поэтому функция

$$y(x, \lambda) = \begin{cases} 0 & , \ x \leqslant 0, \\ y_+(x, \lambda), & x > 0 \end{cases} \tag{20}$$

удовлетворяет уравнению (18) при всех x и при каждом $\lambda > 0$ $y(x, \lambda) \in C^\infty(-\infty, \infty)$. Из формулы Тэйлора с учетом (19) и (20) заключаем:

$$|y(x, \lambda)| \leqslant C_0 2^{\frac{m(m+1)}{2}} |\lambda x|^m \cdot \frac{1}{m!}, \ m = 0, 1, 2, \ldots,$$

откуда

$$|y(x, \lambda)| \leqslant C_1 \inf_{m \geqslant 0} 2^{\frac{m^2}{2}} |\lambda x|^m \leqslant C_2 \exp\left\{-\frac{\ln^2 |\lambda x|}{2 \ln 2}\right\}, \ |\lambda x| < 1, \tag{21}$$

$$|y(x, \lambda)| \leqslant C_2, \quad |\lambda x| \geqslant 1. \tag{22}$$

Далее, при $|\lambda x| < 1$, $|x| < 1$ из (21) получаем

$$|y(x, \lambda)| \leqslant C_2 \exp\left\{-\frac{2}{2 \ln 2}(\ln^2|\lambda| + \ln^2|x| + 2\ln|\lambda|\ln|x|\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \exp\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\frac{\ln^2|\lambda|}{2 \ln 2} - (1 - \varepsilon)\frac{\ln^2|x|}{2 \ln 2}\right\}, \tag{23}$$

$\varepsilon > 0$ — любое. При $|\lambda x| \geqslant 1$, $|x| < 1$ имеем при любом ε, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$,

$$|y(x, \lambda)| \leqslant C_2 \leqslant C_2 \exp\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\frac{\ln^2|\lambda|}{2 \ln 2} - (1 - \varepsilon)\frac{\ln^2|x|}{2 \ln 2}\right\}. \tag{24}$$

Наконец, при $|x| \geqslant 1$, считая $|\lambda| > 1$, имеем (22). Итак, в силу (22), (23), (24)

$$|y(x, \lambda)| \leqslant C_2 \exp\{C_3 \ln^2|\lambda|\} g(x), \quad \mathrm{Re}\,\lambda > 1, \tag{25}$$

где

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \leqslant 0, \\ \exp\left\{-(1 - \varepsilon)\frac{\ln^2|x|}{2 \ln 2}\right\}, & 0 < x < 1, \\ 1 & , \ x \geqslant 1. \end{cases}$$

При этом $y(x, \lambda)$ — аналитическая при $\mathrm{Re}\,\lambda > 1$ функция; из оценки (25) вытекает существование аналитической при $\mathrm{Re}\,\lambda > 1$ функции $h(\lambda) \not\equiv 0$, такой, что

$$|h(\lambda) y(x, \lambda)| \leqslant \frac{C_2 g(x)}{1 + |\lambda|^2}.$$

Поскольку функция $h(\lambda) y(x, \lambda)$ также удовлетворяет уравнению (18), то, обозначив $u(x, t)$ ее обратное преобразование Лапласа, получим, что $u(x, t) \not\equiv 0$ удовлетворяет уравнению (17), условию (1_0) и оценке $|u(x, t)| \leqslant C_4 g(x)$, что и требовалось.

Список литературы: 1. *Борок В. М., Житомирский Я. И.* О задаче Коши для линейных уравнений в частных производных с линейно преобразованным аргументом.— ДАН СССР, 1972, 200, 3, с. 515—518. 2. *Борок В. М., Житомирский Я. И.* О единственности решения задачи Коши для линейных уравнений в частных производных с линейно преобразованным аргументом.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 18. Харьков, 1973, с. 50—63. 3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1958.

Поступила 29 января 1977 г.