УДК 519.81

М. Б. БАЛК, Н. Ф. МАНУИЛОВ

О ФАКТОРИЗАЦИИ ЦЕЛОЙ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ, ИМЕЮЩЕЙ ОГРАНИЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО НУЛЕЙ

В статье [1] было доказано следующее

Утверждение 1. *Если целая полианалитическая функция $f(z)$ одного комплексного переменного z имеет ограниченное множество нулей, то она представима в виде*

$$f(z) = P(z, \bar{z}) \exp g(z), \tag{1}$$

где $g(z)$ — целая аналитическая функция, а $P(z, \bar{z})$ — полином от сопряженных переменных z и $\bar{z}$.

Оказывается, что аналогичное утверждение верно и для целых полианалитических функций любого числа (p) переменных. Ограничимся ради упрощения выкладок случаем $p = 2$. Приведем необходимые определения (ср. [2]).

Функция $f(z) = f(z_1, z_2)$ комплексных переменных z_1, z_2 называется полианалитической векторного порядка $n = (n_1, n_2)$, если она представляет собой полином относительно $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$ бистепени $n - 1 = (n_1 - 1, n_2 - 1)$ с коэффициентами $a_{k_1, k_2}(z_1, z_2)$, являющимися целыми функциями переменных z_1, z_2; иначе говоря, $f(z)$ — это функция вида

$$f(z) = \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} a_{k_1, k_2}(z_1, z_2) \bar{z}_1^{k_1} \bar{z}_2^{k_2}, \tag{2}$$

где все $a_{k_1, k_2}(z_1, z_2)$ — целые функции. Короче, можно $f(z)$ записать так (употребляя векторные символы):

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z) \bar{z}^k$$

(здесь k, n, 0, 1 — двумерные векторные индексы, z — двумерный комплексный вектор).

Теорема 1. *Если целая полианалитическая функция $f(z)$ двух комплексных переменных z_1, z_2 имеет ограниченное множество нулей, то она представима в виде*

$$f(z_1, z_2) = P(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) \exp g(z_1, z_2), \tag{3}$$

где $g(z_1, z_2)$ — *целая аналитическая функция от* z_1, z_2, *а* $P(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ — *полином относительно четырех переменных* $z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2$.

Понятно, что (3) можно короче записать так:

$$f(z) = P(z, \bar{z}) \exp g(z), \tag{4}$$

где $z = (z_1, z_2)$ $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$.

В ходе доказательства мы воспользуемся двумя предложениями, ранее установленными Л. И. Ронкиным и Н. Ф. Мануиловым.

Утверждение 2 (см. [3, теорема 7]). Пусть $f(z, w)$ — целая функция в пространстве $C^{n+m} = C^n_{(z)} \times C^m_{(w)}$; а E ($E \subset C^n_{(z)}$ — некоторое множество положительной Γ-емкости *. Если при каждом $z \in E$ множество $\{w : f(z, w) = 0\}$ полиномиальное, то функция $f(z, w)$ представима в виде

$$f(z, w) \equiv P(z, w) \exp h(z, w), \tag{5}$$

где $h(z, w)$ — целая функция, а $P(z, w)$ — полином от переменных $w_1, .., w_m$, коэффициенты которого — целые функции переменных $z_1, .., z_n$.

Утверждение 3 (см. [4]). Пусть целая функция $P_1(z, w)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_m)$ — целый псевдополином по z (его коэффициенты — целые функции относительно $w_1, \ldots, w_m$), а целая функция $P_2(z, w)$ — целый псевдополином по w (его коэффициенты — целые функции относительно $z_1, \ldots, z_n$). Если существует такая целая функция $G(z, w)$, что справедливо тождество $P_1(z, w) \equiv Z_2(z, w) \exp G(z, w)$, то существует такой полином $P(z, w)$ относительно переменных $z_1, \ldots, z_n$; $w_1, \ldots, w_m$ и такие целые функции $g_1(z)$ и $g_2(z)$, что справедливы тождества

$$P_1 \equiv P \exp g_1; \; P_2 \equiv P \exp g_2. \tag{6}$$

Воспользуемся предложением, равносильным утверждению 1.

Утверждение 4. Если целый псевдополином (по w, $w \in C$)

$$F(z, w) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z) w^k$$

имеет в неаналитической плоскости $w = \bar{z}$ лишь ограниченное множество нулей, то $F(z, w)$ представима в виде

$$F(z, w) = P(z, w) \exp g(z), \tag{7}$$

где $P(z, w)$ — полином относительно пары переменных z и w, а $g(z)$ — целая функция переменного z.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим целый псевдополином

$$F = F(z_1, z_2, z_3, z_4) = \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} a_{k_1 k_2}(z_1, z_2) z_3^{k_1} z_4^{k_2}. \tag{8}$$

* О понятии Г-емкости [см. 5, с. 149].

Зафиксируем z_2 и z_4 следующим образом: $z_2 = z_2^0$, $z_4 = \bar{z}_2^0$. Тогда F превращается в целый псевдополином (по z_3) с коэффициентами, являющимися целыми функциями относительно z_1; в силу условия теоремы этот псевдополином имеет в плоскости лишь ограниченное множество нулей. Поэтому он (в силу утверждения 4) представим в виде

$$F(z_1, z_2^0, z_3, \bar{z}_2^0) = \pi(z_1, z_3; z_2^0, \bar{z}_2^0) \times \exp g(z_1; z_2^0, z_2^0), \tag{9}$$

где $g(z_1, z_2^0, \bar{z}_2^0)$ — целая функция относительно переменного z_1, а $\pi(z_1, z_3, z_2^0, \bar{z}_2^0)$ — полином от z_1, z_3. Обозначим через E расположенный в пространстве двух комплексных переменных z_2, z_4 единичный круг плоскости $z_4 = \bar{z}_2$. Из (9) видим, что при каждом выборе точки z_2, z_4 в E множество нулей целой функции $F(z_1, z_2, z_3, z_4)$ является полиномиальным. Нетрудно проверить, что E имеет в C^2 положительную Γ-емкость. Поэтому в силу утверждения 2 получаем

$$F(z_1, z_2, z_3, z_4) \equiv P_{13}(z_1, z_2, z_3, z_4) \times \exp\varphi(z_1, z_2, z_3, z_4), \tag{10}$$

где $\varphi(z_1, z_3, z_3, z_4)$ — целая функция своих аргументов, а $P_{13}, (z_1, z_2, z_3, z_4)$ — полином относительно (z_1, z_3) с коэффициентами, являющимися целыми функциями относительно z_2 и z_4. Аналогично убеждаемся, что F допускает и такое представление:

$$F(z_1, z_2, z_3, z_4) \equiv P_{24}(z_1, z_2, z_3, z_4) \times \exp\psi(z_1, z_2, z_3, z_4), \tag{11}$$

где $\psi(z_1, z_2, z_3, z_4)$ — целая функция, а $P_{24} \times (z_1, z_2, z_3, z_4)$ — целый псевдополином относительно z_2, z_4 (с коэффициентами, являющимися целыми функциями относительно z_1, z_3).

Из (10) — (11) видно, что

$$P_{24} = P_{13}\exp E \quad (E = \varphi - \psi). \tag{12}$$

Поэтому в силу утверждения 3 должен существовать такой полином $P(z_1, z_2, z_3, z_4)$ $(P \equiv 0)$ от четырех переменных z_1, z_2, z_3, z_4 и такие целые функции $\varphi_1(z_2, z_4)$ и $\varphi_1(z_1, z_3)$, что

$$P_{13} = P\exp\varphi_1, \quad P_{24} \equiv P\exp\psi_1. \tag{13}$$

Но тогда $F \equiv P\exp\Phi$,
где $\Phi = \varphi + \psi$. Из сопоставления роста функций F/P и $\exp\Phi$ легко видеть, Φ не зависит от z_3, z_4. Теорема 1 доказана.

Аналогично теореме 1 доказываются следующие утверждения:

1. Пусть целая полианалитическая функция двух комплексных переменных $f(z_1, z_2)$ (см. (2)) имеет ограниченное множество нулей, если $z_1 = z_1^0 = \text{const}$ (z_1^0 может быть любым фиксированным из некоторого множества E положительной емкости), и имеет ограниченное множество нулей, если $z_2 = z_2^0 = \text{const}$ (z_2^0 может быть любым фиксированным числом из некоторого множества E_2 положительной емкости); тогда $f(z_1, z_2)$ представима в виде (3).

2. Пусть $f(z_1, z_2)$ — целая полианалитическая функция и пусть при каждом фиксированном $z_1 = z_1^0$ из некоторой области D_1 пло-

скости переменного z_1 функция $f(z_1^0, z_2)$ имеет (как функция от z_2) ограниченное множество a-точек, а при каждом фиксированном $z_1 = z'$ из некоторой области D_1' плоскости переменного z_1 — ограниченное множество b-точек (a, b-константы, $a \neq b$). Тогда $f(z_1, z_2)$ — полином по z_2, у которого коэффициенты — полианалитические функции от $\overset{*}{z_1}$.

Список литературы: 1. *Балк М. Б.* Целые полианалитические функции с ограниченным множеством нулей.— Изв. АН Арм. ССР. «Математика», 1 (1966), № 5, с. 341—357. 2. *Балк М. Б.* Об одной теореме единственности для полианалитических функций двух комплексных переменных.— «Смолен. мат. сб.», 2, 1969, с 8—12. 3. *Ронкин И. Л.* Некоторые вопросы распределения нулевых точек целых функций многих переменных.— «Мат. сб.», 1972, 87 (129): 3, с. 351—368. 4. *Мануилов Н. Ф.* О приводимости в кольце псевдополиномов.— В кн.: Полианалитические и регулярные кватернионные функции, 1973. 120 с. 5. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. М., «Наука», 1971.

Поступила 4 октября 1975 г.

* В этом утверждении области D_1, D_1' могут быть заменены любыми множествами положительной Г-емкости.