УДК 517.43

В. С. АБРАМОВИЧ

О ПОЛУГРУППАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ М. М. ДЖРБАШЯНА

Известно [1], что множество операторов интегрирования в смысле Римана — Лиувилля

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt \; (0 < a < +\infty); \tag{1}$$

$$D^0 f(x) \equiv \lim_{\alpha \to +0} D^{-\alpha} f(x) = f(x), \tag{2}$$

действующих в классе $L(0, 1)$, обладает полугрупповым свойством: для $\forall\, \alpha_1,\ \alpha_2 \in [0, +\infty)$ имеет место формула

$$(D^{-\alpha_1} \cdot D^{-\alpha_2}) f = D^{-(\alpha_1+\alpha_2)} f. \tag{3}$$

В 1968 г. М. М. Джрбашян ввел в рассмотрение и существенно использовал в ряде исследований операторы $L^{(\omega)}$ [2], являющиеся широким обобщением операторов дробного интегрирования в смысле Римана — Лиувилля. Как выяснилось, в ряде вопросов представляет интерес выделение полугрупп интегральных операторов М. М. Джрбашяна.

Рассмотрим множество Ω_0 функций $\omega(x)$, удовлетворяющих условиям:

1⁰ $\omega(x)$ определена, положительна и непрерывна на $(0, 1)$;

2⁰ $\omega(0) = 1$, $\omega\, 1 - 0 = 0$;

3⁰ $\omega'(x) \in L(0, 1)$ и почти всюду непрерывна на $(0, 1)$;

4⁰ для некоторого $m \geqslant 0$ $\omega'(x) = 0\ (\ln^m x)\ \ (x \downarrow 0)$*.

Пусть дана функция $\omega(x) \in \Omega_0$. Образуем оператор

$$L^{(\omega)}\{\varphi(x)\} = -\int_0^1 \varphi(x\tau)\,\omega'(\tau)\,d\tau, \tag{4}$$

рассматривая его в классе кусочно-непрерывных функций $\varphi(x)$. В частности, если $\varphi(x) = x^\lambda\ (\lambda \geqslant 0)$, то

$$L^{\omega}\{x^\lambda\} = \Delta(\omega; \lambda)\, x^\lambda, \tag{5}$$

---

* В сравнении с (2) мы рассматриваем подкласс вводимого там класса Ω, для которого $\omega(1-0) = 0$. Кроме того, условие $|\omega(x) - 1| = 0(x)$ заменено менее ограничительным условием 4⁰, что не отражается на применениях операторов М. М. Джрбашяна.

где

$$\Delta(\omega, 0) = 1;\ \Delta(\omega; \lambda) = \lambda \int_0^1 \omega(x)\, x^{\lambda-1} dx \quad (0 < \lambda < +\infty). \tag{6}$$

В специальном случае, когда

$$\omega_\alpha(x) = (1-x)^\alpha \ (0 < \alpha < +\infty), \tag{7}$$

наблюдается тождество

$$L^{(\omega_\alpha)} \{\varphi(x)\} \equiv \Gamma(1+\alpha)\, x^{-\alpha} D^{-\alpha} \varphi(x). \tag{8}$$

Таким образом, если $\omega_\alpha(x)$ имеет вид (7), то множество операторов $\{(\Gamma(1+\alpha))^{-1} x^\alpha L^{(\omega_\alpha)}\}$ является полугруппой.

С помощью оператора $L^{(\omega)}$ М. М. Джрбашян построил полную теорию факторизации мероморфных в круге функций [3]. Однако до настоящего времени полностью не решена проблема вложения введенных в статье [3] классов мероморфных (и, в частности, аналитических) функций. Так, до сих пор неизвестно [3, с. 594], будет ли

$$A_{\omega_1} = \{f(z) : \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} (L^{(\omega_1)} \ln |f(re^{i\Theta})|)^+ d\Theta < +\infty\} \subset A_{\omega_2} \tag{9}$$

$$\text{для } \omega_j(x) \downarrow 0,\ j = 1,2 \text{ и } \frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)} \downarrow 0 \text{ при } x \uparrow 1.$$

Легко, однако, показать (ср. [1]), что если при подходящем выборе функции $\chi(\alpha)$ множество операторов $\{\chi(\alpha)\, x^\alpha L^{(\omega_\alpha)}\}$ составляет полугруппу, то проблема вложения соответствующих классов $\{A_{\omega_\alpha}\}$ решается максимально просто — эти классы оказываются упорядоченными по вложению

$$A_{\omega_\alpha} \subset A_{\omega_\beta}, \text{ если } \alpha < \beta. \tag{10}$$

В теории интегральных уравнений для полугруппы операторов $\{\chi(\alpha)\, x^\alpha L^{(\omega_\alpha)}\}$ имеет место аналог [5] известной теоремы Хилле и Тамаркина [4].

В связи с этими и многими другими приложениями полугрупп интегральных операторов М. М. Джрбашяна представляется важным описание однопараметрических семейств функций $\{\omega_\alpha(x)\}$ $(0 < \alpha < +\infty)$ из класса Ω_0, для которых существует вещественная функция параметра $\chi(\alpha)$ (своя для каждого семейства), такая, что соответствующее множество операторов $\{\chi(\alpha)\, x^\alpha L^{(\omega_\alpha)}\}$ является полугруппой. Ясно, что такая функция параметра не всегда существует. Например, как следует из результатов § 2, ее заведомо не существует, если $\Delta(\omega_\alpha; \lambda) \neq \Delta(\omega_\lambda; \alpha)$.

В том случае, когда в указанном смысле функция параметра α существует, будем говорить, что семейство функций $\{\omega_\alpha(x)\}$ принадлежит классу R и называть его *R-семейством* (см. определение 1 § 2).

Таким образом, простейшим примером R-семейства функций является семейство (7), приводящее к классическим интегральным операторам Римана-Лиувилля.

Настоящая статья посвящена построению (§ 3) широких множеств семейств функций $\{\omega_\alpha\}$, принадлежащих классу R.

§ 1. *Некоторые определения и леммы*

1°. Назовем сверткой адамаровского типа двух функций $f(x)$ и $g(x)$ из класса $L_1(0, 1)$ свертку вида [5]

$$(f*g)(x)=\int_x^1 f\left(\frac{x}{v}\right)g(v)\frac{dv}{v},\ x\in(0,1). \tag{1.1}$$

С помощью теоремы Фубини легко устанавливается неравенство

$$\|f*g\|_1\leqslant\|f\|_1\cdot\|g\|_1, \tag{1.2}$$

из которого следует, что $(f*g)(x)\in L_1(0, 1)$.

Легко проверить коммутативность и ассоциативность введенной операции. Таким образом, сверточное «произведение»

$$(\prod_{j=1}^{n}{}^{*} f_j)(x)=(f_1*f_2*\ldots*f_n)(x),\ x\in(0,1) \tag{1.3}$$

имеет однозначный смысл.

Заметим, что если $f_j(x)\in L_1(0, 1)$, $1\leqslant j\leqslant n$ и почти всюду непрерывны на $(0, 1)$, то таким же будет и «произведение» (1.3).

2°. Будем говорить, что $f(x)\in B^{(k)}(0, 1)$, где $k\geqslant 0$ — целое число, если для $\forall\,\delta\in(0, 1)$ функции $f(x)$ и

$$f_k(x)=f(x)\ln^{-k}x \tag{1.4}$$

ограничены в интервалах: первая в $(\delta, 1)$, вторая в $(0, \delta)$.

Имеют место следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть для функции $g(x, y)$, определенной на $(0, 1; 0, 1)$, интеграл*

$$G(x)=\int_x^1|g(x, u)|\,du\in B^{(r)}(0, 1). \tag{1.5}$$

Тогда для любой функции $\lambda(x)\in B^{(s)}(0, 1)$

$$F(x)=\int_x^1 g(x, u)\lambda(u)\,du\in B^{(r+s)}(0, 1)\ (r, s=0, 1, \ldots). \tag{1.6}$$

Лемма 2. *Если $\omega_j(x)\in\Omega_0$ и*

$$\omega_j'(x)=o(\ln^{m_j}x),\ m_j\geqslant 0\ (x\downarrow 0),\ j=1,2, \tag{1.7}$$

то

$$\omega(x)=\int_x^1(\omega_1'*\omega_2')(u)\,du\in\Omega_0. \tag{1.8}$$

Лемма 3. Если $\omega(x) \in \Omega_0$, *то*

$$\lim_{\lambda\to+0} \Delta(\omega;\lambda) = \lim_{\lambda\to+0} \lambda \int_0^1 \omega(x)\, x^{\lambda-1} dx = 1. \tag{1.9}$$

Лемма 1 доказывается индукцией по s. Лемма 2 является следствием леммы 1. Наконец, лемма 3 следует из равенств

$$\Delta(\omega;\lambda) = -\int_0^1 \omega'(x)\, x^{\lambda} dx; \ \int_0^1 \omega'(x) dx = -1 \text{ и } «\varepsilon - \delta»\text{-техники.}$$

§ 2. *Определение и критерий принадлежности семейств функций классу R*

Определение. *Будем говорить, что однопараметрическое семейство функций* $\{\omega_\alpha(x)\}$ $(\subset \Omega_0)$ $(0 < \alpha < +\infty)$ *является R-семейством* ($\{\omega_\alpha\} \in R$), *если для него существует такая функция параметра* $\chi(\alpha)$, *характеристическая функция параметра* (х. ф. п.), *что множество операторов*

$$A_\alpha = \chi(\alpha)\, x^{\alpha} L^{(\omega_\alpha)} \quad (0 < \alpha < +\infty) \tag{2.1}$$

в классе непрерывных на $[0, 1]$ *функций обладает полугрупповым свойством*

$$A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta}, \ \forall\, \alpha, \beta \in (0, +\infty). \tag{2.2}$$

Очевидно, $\chi(\alpha) \neq 0$ всюду на полуоси $(0, +\infty)$.

Установим критерий принадлежности семейства функций $\{\omega_\alpha\}$ $(\subset \Omega_0)$ классу R (*R-критерий*).

Теорема 1. 1^0. *Семейство функций* $\{\omega_\alpha(x)\}$ *тогда и только тогда будет R-семейством, когда для моментов функций семейства имеет место представление*

$$\Delta(\omega_\alpha;\lambda) = \frac{f(\alpha+\lambda)}{f(\alpha)\, f(\lambda)}, \ \forall\, \alpha, \lambda \in (0, +\infty), \tag{2.3}$$

где $f(x)$ — *некоторая вещественная функция, определенная на полуоси* $(0, +\infty)$ *и не имеющая там нулей.*

2^0. *Если имеет место представление (2.3), то х. ф. п. семейства* $\{\omega_\alpha(x)\}$ *будет функция* $f(\alpha)$, *т. е.*

$$\chi(\alpha) = f(\alpha). \tag{2.4}$$

Доказательство. Из сравнения операторов $A_\alpha \cdot A_\beta$ и $A_{\alpha+\beta}$ на степенях x (на основании полноты в $C\,[0, 1]$ множества полиномов) заключаем, что $\{\omega_\alpha\} \in R$ с х. ф. п. $\chi(\alpha)$ тогда и только тогда, когда для $\forall\, \alpha, \beta, \lambda \in (0, +\infty)$ имеет место равенство

$$\frac{\Delta(\omega_\alpha;\lambda)\,\Delta(\omega_\beta;\alpha+\lambda)}{\Delta(\omega_{\alpha+\beta};\lambda)} = \frac{\chi(\alpha+\beta)}{\chi(\alpha)\,\chi(\beta)}. \tag{2.5}$$

Пусть теперь $\{\omega_\alpha\} \in R$ (с х. ф. п. $\chi(\alpha)$). Тогда, переходя в (2.5) к пределу при $\lambda \to 0$, на основании леммы 3 имеем

$$\Delta(\omega_\beta, \alpha) = \frac{\chi(\alpha+\beta)}{\chi(\alpha)\,\chi(\beta)},$$

что эквивалентно представлению (2.3) с функцией $f(\alpha) = \chi(\alpha)$.

Наоборот, если для семейства функций $\{\omega_\alpha(x)\}$ выполнено условие (2.3), то для него, очевидно, имеет место и равенство (2.5) при $\chi(\alpha) = f(\alpha)$, из которого следует, что $\{\omega_\alpha(x)\} \in R$ с х. ф. п. $f(\alpha)$.

Приводимые ниже теоремы единственности, непосредственно вытекающие из представления (2.3), в значительной степени оправдывают название функции $\chi(\alpha)$ характеристической.

Теорема 2. *Если* $\{\omega_{j,\alpha}\}$ $(\subset \Omega_0) \in R$, $j = 1,2$, *с одной и той же х. ф. п.* $\chi(\alpha)$ *для обоих семейств, то* $\omega_{1,\alpha}(x) \equiv \omega_{2,\alpha}(x)$.

Действительно, на основании (2,3) для $\forall\, \alpha \in (0, +\infty)$ функции $\omega_{j,\alpha}(x)$, $j = 1,2$ имеют одинаковые моменты $\Delta(\omega_{j,\alpha}; \lambda)$ $(0 < \lambda < \infty)$ и, следовательно, совпадают.

Теорема 3. *Если х. ф. п.* $\chi(\alpha)$ *семейства* $\{\omega_\alpha\}$ $(\in R)$ *непрерывна на полуоси* $(0, +\infty)$, *то для данного семейства она определяется однозначно с точностью до множителя* $e^{c\alpha}$, *где* c*-произвольная постоянная.*

Действительно, из (2.3) следует, что отношение $h(\alpha)$ двух х. ф. п. семейства $\{\omega_\alpha\}$ $\chi(\alpha)$ и $\chi_1(\alpha)$ должно удовлетворять функциональному уравнению $h(\alpha+\lambda) = h(\alpha)\,h(\lambda)$, все непрерывные решения которого, как известно, имеют вид $e^{c\alpha}$.

В заключение покажем, что не существует R-семейства функций класса Ω_0 с $\chi(\alpha) \equiv 1$.

Теорема 4. *Множество операторов* $x^\alpha L^{(\omega_\alpha)}$ $(0 < \alpha < +\infty)$ *ни для одного семейства функций* $\{\omega_\alpha\}$ *из класса* Ω_0 *не обладает полугрупповым свойством (2.2).*

В самом деле, на основании R-критерия в случае выполнения соотношения (2.2) мы должны были бы иметь $\Delta(\omega_\alpha; \lambda) \equiv 1$ или $\int_0^1 \omega_\alpha(x)\, x^{\lambda-1} dx \equiv \frac{1}{\lambda}$, что верно лишь для $\omega_\alpha(x) \equiv 1 \,\overline{\in}\, \Omega_0$.

§ 3. *Квазимультипликативность R-семейств функций. Примеры*

Докажем теорему, выявляющую важное в конструктивном отношении свойство R-семейств функций.

Теорема 5. *Если* $\{\omega_{j,\alpha}(x)\}$ $(\subset \Omega_0) \in R$ *с х. ф. п.* $\chi_j(\alpha)$, *причем*

$$\omega'_{j,\alpha}(x) = O(\ln^{m_j} x),\ m_j \geqslant 0,\ x \downarrow 0,\ j = 1,2 \text{ и}$$

$$\omega_\alpha(x) = \int_x^1 (\omega'_{\alpha,1} * \omega'_{\alpha,2})(u)\, du \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{3.1}$$

то и $\{\omega_\alpha(x)\}$ $(\subset \Omega_0) \in R$ *с х. ф. п.*

$$\chi(\alpha) = \chi_1(\alpha)\,\chi_2(\alpha) \quad (0 < \alpha < +\infty). \tag{3.2}$$

Доказательство. Заметив (см. лемму 2), что $\omega_\alpha(x) \in \Omega_0 \times$ $\times (0 < \alpha < +\infty)$ на основании R-критерия заключение теоремы выводим из следующей цепочки равенств:

$$\Delta(\omega_\alpha; \lambda) = -\int_0^1 \omega'_\alpha(x)\, x^\lambda dx = \int_0^1 x^\lambda (\omega'_{\alpha,1} * \omega'_{\alpha,2})(x)\, dx = \int_0^1 x^\lambda \left\{\int_x^1 \omega'_{\alpha,1} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{x}{u}\right) \omega'_{\alpha,2}(u) \frac{du}{u}\right\} dx = \int_0^1 \omega'_{\alpha,2}(u) \frac{du}{u} \int_0^u x^\lambda \omega'_{\alpha,1}\left(\frac{x}{u}\right) dx = \int_0^1 \omega'_{\alpha,2} \times$$

$$\times (u)\, u^\lambda du \int_0^1 \omega'_{\alpha,1}(v)\, v^\lambda dv = \frac{\chi_2(\alpha+\lambda)}{\chi_2(\alpha)\,\chi_2(\lambda)} \cdot \frac{\chi_1(\alpha+\lambda)}{\chi_1(\alpha)\,\chi_1(\lambda)} = \frac{\chi(\alpha+\lambda)}{\chi(\alpha)\,\chi(\lambda)}.$$

Установленное теоремой 5 свойство R-семейств $\{\omega_{\alpha, j}(x)\}$, $j = 1,2$ будем называть квазимультипликативным свойством.

Приведем теперь примеры семейств функций класса R.

Теорема 6. *Семейство функций*

$$\omega_{\alpha, p, \nu}(x) = p\left(B\left(\frac{\alpha}{p}, \nu\right)\right)^{-1} \int_x^1 (1 - x^p)^{\frac{\alpha}{p} - 1} x^{\nu p - 1} dx \; (0 < \alpha < +\infty) \qquad (3.3)$$

при любых значениях параметров $p, \nu > 0$ является R-семейством класса Ω_0 с х. ф. п.

$$\chi_{\nu, p}(\alpha) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\nu + \frac{\alpha}{p}\right)}. \qquad (3.4)$$

Доказательство. Легко проверить, что $\omega_{\alpha, p, \nu}(x) \in \Omega_0$, в частности, $\omega_{\alpha, p, \nu}(0) = 1$, $\omega_{\alpha, p, \nu}(1) = 0$. Кроме того, непосредственно проверяется тождество

$$\Delta(\omega_{\alpha, p, \nu}; \lambda) = -\int_0^1 \omega'_{\alpha, p, \nu}(x)\, x^\lambda dx = p\left(B\left(\frac{\alpha}{p}, \nu\right)\right)^{-1} \int_0^1 (1 - x^p)^{\frac{\alpha}{p} - 1} \times$$

$$\times x^{\nu p + \lambda - 1} dx = (\Gamma(\nu))^{-1} \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{\lambda}{p}\right)}{\Gamma\left(\nu + \frac{\alpha+\lambda}{p}\right)} = \frac{\chi_{\alpha, p}(\alpha+\lambda)}{\chi_{\alpha, p}(\alpha)\,\chi_{\alpha, p}(\alpha)}, \qquad (3.5)$$

где $\chi_{\nu, p}(\alpha)$ определяется формулой (3.4).

Отсюда на основании R-критерия вытекает утверждение теоремы.

В частности, при $p = \nu = 1$ мы имеем семейство функций

$$\omega_{\alpha, 1, 1}(x) = (1 - x)^\alpha \; (0 < \alpha < +\infty), \qquad (3.6)$$

порождающее полугруппу операторов интегрирования дробного порядка в смысле Римана — Лиувилля.

На основании квазимультипликативного свойства R-семейств функций класса Ω_0 имеет место более общая

Теорема 7. *Семейство функций*

$$\omega_{\alpha, \overline{p}, \overline{\nu}}(x) = \prod_{j=1}^{n} p_j \left(B\left(\frac{\alpha}{p_j}, \nu_j\right)\right)^{-1} \int_x^1 \prod_{j=1}^{n}{}^{*} (1-u^{p_j})^{\frac{\alpha}{p_j}-1} u^{\nu_j p_j - 1} \times$$
$$\times du \quad (0 < \alpha < \infty), \tag{3.7}$$

где $\overline{p} = \{p_1, \ldots, p_n\}$, $\overline{\nu} = \{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$ для любых значений параметров $p_j \nu_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ является R-семейством с х. ф. п.

$$\chi_{\overline{p}, \overline{\nu}}(\alpha) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(\nu_j)}{\Gamma\left(\nu_j + \frac{\alpha}{p_j}\right)}. \tag{3.8}$$

Как и в случае операторов Римана — Лиувилля для операторов $L^{(\omega_{\alpha}, \overline{p}, \overline{\nu})}$ имеет место предельная формула

$$\lim_{\alpha \to +0} L^{(\omega_{\alpha}, \overline{p}, \overline{\nu})} \psi(x) = \psi(x), \ \nu_j, p_j > 0, \ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.9}$$

Для суммируемой функции $\psi(x)$ (3.9) имеет место в каждой ее точке Лебега.

В заключение остановимся на множествах R-семейств функций, принадлежащих классу L_q (0.1).

Так как, очевидно, $\Omega_0 \subset L_q$ (0.1) $(1 < q < +\infty)$, то вследствие полноты в L_q множества полиномов и слабой полноты пространства L_q (как рефлексивного B-пространства) из теоремы 7 и R-критерия следует, что существуют семейства функций $\{\omega_\alpha\}$ из L_q (но вообще говоря, не из Ω_0) класса R с х. ф. п. вида

$$\chi(\alpha) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu_j)}{\Gamma\left(\nu_j + \frac{\alpha}{p_j}\right)}. \tag{3.10}$$

(ср., например, формулу Кнара [6] при $\nu_j \equiv \frac{1}{2}$, $p_j = 2^j$).

Из свойств Г-функции [6] следует, что в случаях $\nu_j \to 0$, $\nu_j \to a \neq 0, \infty$, $\nu_j \to +\infty$ необходимым и достаточным условием равномерной сходимости произведения (3.10) на любой конечной части вещественной оси является сходимость соответственно рядов

$$\sum \frac{1}{p_j \nu_j}, \ \sum \frac{1}{p_j}, \ \sum \frac{\ln \nu_j}{p_j},$$

Таким образом, при выполнении указанных условий в классе L_q оказывается разрешимой соответствующая проблема моментов.

Список литературы: 1. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., «Наука», 1966. 671 с. 2. *Джрбашян М. М.* Обобщенный оператор Римана — Лиувилля и некоторые его применения. Изд. АН СССР, сер. мат., 1968, т. 32, № 5, с. 1075—1111. 3. *Джрбашян М. М.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге.— «Матем. сб.», 1969, т. 79, вып. 121, с. 517—615. 4. Hille E., Tamarkin J.

On the theory of linear integral equations. I.—«Annals of Math» (2-nd ser.), 1930, 31, № 3, p. 479—528. 5. *Абрамович В. С.* Об одном обобщении теоремы Хилле и Тамаркина. Изд. АН Арм. ССР, «Математика», 1971, т. VI, № 1, с. 35—42. 6. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М., «Наука», 1973. 294 с.

Поступила 24 сентября 1975 г.