УДК 517.9

Р. Н. ДАВЫДОВ

S-МАТРИЦА УРАВНЕНИЯ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С МЕДЛЕННО УБЫВАЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Обозначим через $M(a, b)$ множество вещественных измеримых функций $f(x)$, удовлетворяющих неравенству $\int\limits_a^b |f(x)|^2 e^{\varepsilon|x|}dx<\infty$, где ε — положительное число, свое для каждой функции $f(x)$.

Рассмотрим уравнение Штурма—Лиувилля на оси $L[y] = -y'' + q(x)y = z^2y$, $-\infty < x < \infty$ (1) с вещественным потенциалом

$$q(x) = q_0(x) + p_k^+(x) + p_k^-(x), \quad q_0(x) \in M(-\infty, \infty);$$

$$p_k^+ = \begin{cases} \dfrac{k^+(k^+ + 1)}{x^2}, & x > 1, \\ 0, & x \leqslant 1, \end{cases} \quad p_k^- = \begin{cases} 0, & x > -1; \\ \dfrac{k^-(k^- + 1)}{x^2}, & x \leqslant -1. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть $e^{\pm}(z, x)$ — решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям

$$\lim_{x\to\infty} e^+(z, x)e^{-izx} = \lim_{x\to-\infty} e^-(z,x)e^{-izx} = 1. \tag{3}$$

В работе [1] показано, что такие решения допускают представление

$$e^{\pm}(z, x) = e_k^{\pm}(z, x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} K^{++}(x, t) e_k^{\pm}(z, t) dt, \quad K^{\pm}(x, t) \equiv 0 \ (\pm t < < \pm x) \text{ и } \forall x \ K^{\pm}(x, t) \in M(-\infty, \infty), \tag{4}$$

а функции $e_k^{\pm}(z, x)$ суть решения уравнения (1) с $q(x) = p_k^{\pm}(x)$, удовлетворяющие условию (3). Из представления (4) ясно, что пары аналитических в полосе $\Pi \setminus \{0\} = \{z : |\operatorname{Im} z| < \varepsilon\} \setminus \{0\}$ функций $e^+(z, x)$, $e^+(-z, x)$ и $e^-(z, x)$, $e^-(-z, x)$ образуют фундаментальные системы решений уравнения (1). Значит, $e^+(z, x) = a(z)e^-(z,x) + b(z)e^-(-z, x)$; $e^-(-z, x) = a(z)e^+(-z, x) - b(-z)e^+(z, x)$; $2iza(z) = -W(e^+(z, x), e^-(-z, x))$; $2izb(z) = W(e^+(z, x), e^-(z, x))$, где $W(f(x), g(x)) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$. Функции $a(z)$ и $b(z)$ также аналитичны в области $\Pi \setminus \{0\}$, а функция $a(z)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость.

Матрица $S(z) = \| s_{ij}(z) \|_{i, j=1, 2}$, где $s_{11}(z) = s_{22}(z) = \frac{1}{a(z)}$, $s_{12}(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$, $s_{21}(z) = -\frac{b(-z)}{a(z)}$, называется S-матрицей уравнения (1). Нашей целью является вывод необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять матрица $S(z)$, чтобы быть S-матрицей уравнения (1) с потенциалом вида (2) в случае $k^+ = k^- = 1$. Случай произвольных k^+, k^- будет рассмотрен в следующей работе.

Решение этой задачи для потенциалов $q(x) = q_0(x)$, удовлетворяющих условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)|q(x)| dx < \infty$, было получено Л. Д. Фаддеевым [2] (см. также [3]).

Свойства S-матрицы. Из определения функций $a(z)$ и $b(z)$ вытекает справедливость соотношений $\overline{a(z)} = a(-\bar{z})$, $\overline{b(z)} = b(-\bar{z})$, $1 = a(z)a(-z) - b(z)b(-z) = |a(\lambda)|^2 - |b(\lambda)|^2$ $(\operatorname{Im}\lambda = 0)$ (5), что влечет унитарность S-матрицы на вещественной оси

Пусть $k^+ = k^- = 1$. Тогда

$$e_1^+(z, x) = \begin{cases} e^{izx}\left(1 - \frac{1}{izx}\right), & x > 1, \\ \frac{2z^2 + 2iz - 1}{2z^2} e^{izx} + \frac{e^{2iz}}{2z^2} e^{-izx}, & x \leqslant 1, \end{cases} \quad e_1^-(z, x) = e_1^+(-z, -x)$$

Мы будем рассматривать случай отсутствия у оператора l дискретного спектра. (Общий случай может быть приведен к этом с помощью преобразований Крума [4]). Тогда $a(z)$ не обращаетс в нуль в верхней полуплоскости. В силу равенства (5) на веще ственной оси $|a(\lambda)| \geqslant 1$, значит, $a(z) \neq 0$ и в некоторой боле широкой полуплоскости $\operatorname{Im} z > -\varepsilon$.

Лемма 1. Функции $a(z)$, $b(z)$ *имеют вид* $a(z)=1+$ $+\sum_{j=1}^{3}(iz)^{-j}(a_j+\int\limits_0^\infty A_j(t)e^{izt}dt)$, $b(z)=\frac{1}{iz}\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_1(t)e^{izt}dt+$ $+\sum_{j=2}^{3}(iz)^{-j}(b_j+\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_j(t)e^{izt}dt)$, *где* a_j, b_j *— постоянные числа,* $A_j(t)\in M(0,\ \infty)$, $B_j(t)\in M(-\infty,\ \infty)$.

Следствие. *В любой замкнутой полосе* $\overline{\Pi}_1=\{z:|\operatorname{Im}z|\leqslant\leqslant\varepsilon_1<\varepsilon\}$ *функции* $zs_{21}(z)$ и $zs_{12}(z)$ *убывают равномерно и суммируемы с квадратами модулей на любой прямой. Функция* $s_{11}(z)$ *допускает аналитическое продолжение в полуплоскость* $\operatorname{Im}z>-\varepsilon$, *где* $s_{11}(z)=1+O(|z|^{-1})$, *когда* $|z|\to\infty$.

В дальнейшем рассмотрение часто будет разветвляться на два варианта *а*) и *б*) в зависимости от того, как ведет себя в нуле аналитическая функция $a_1(z)=2iz^3a(z)$:

а) $a_1(0)\neq 0$, *б*) $a_1(0)=0$.

Лемма 2. В случае а) функции $a(z)$ *и* $b(z)$ *имеют в точке* $z=0$ *полюс третьего порядка, а их разложения в ряд Лорана имеют вид* $a(z)=z^{-3}(i\alpha_0+i\alpha_2z^2+\alpha_3z^3+i\alpha_4z^4+\dots)$, $b(z)=$ $=z^{-3}(i\alpha_0+i\alpha_2z^2+\beta_3z^3+i\alpha_4z^4+\dots)$.

Лемма 3. В случае б) функции $a(z)$ *и* $b(z)$ *имеют в точке* $z=0$ *полюс первого порядка, а их разложения в ряд Лорана имеют вид* $a(z)=z^{-1}[i\alpha_0-\alpha_0(m_+^2+m_-^2)z+\dots]$; $b(z)=z^{-1}\times$ $\times[i\alpha_0-\alpha_0(m_+^2-m_-^2)z+\dots]$, *причем*, $\alpha_0^2=4(m_+^{-2}m_-^{-2})$.

Изложенное выше позволяет утверждать, что S-матрица уравнения (1) с потенциалом (2) обладает следующими свойствами.

I. Аналитичность: матрица $S(z)$ аналитична в некоторой полосе $\Pi=\{z:|\operatorname{Im}z|<\varepsilon\}$. Функция $s_{11}(z)$ продолжается аналитически в верхнюю полуплоскость, где она нигде не обращается в нуль.

II. Унитарность: на вещественной оси $S^*(\lambda)\cdot S(\lambda)=E$.

III. Симметрия: $s_{11}(z)=s_{22}(z)$.

IV. Вещественность: $\overline{s_{ij}(\lambda)}=s_{ij}(-\lambda)$.

V. Поведение при $|z|\to\infty$: в любой замкнутой полосе $\overline{\Pi}_1=$ $=\{z:|\operatorname{Im}z|\leqslant\varepsilon_1<\varepsilon\}$ функции $zs_{21}(z)$ и $zs_{12}(z)$ убывают равномерно и суммируемы с квадратами модулей на любой прямой из полосы. $s_{11}(z)=1+O(|z|^{-1})$ $(\operatorname{Im}z>0)$.

VI. Поведение при $z\to 0$: $s_{12}(0)=s_{21}(0)=1$. Выполняется одна из двух возможностей — либо *а*) $s_{11}(z)=i\sigma_3z^3+O(|z|^4)$, $\sigma_3\neq 0$, $\dot{s}_{12}(0)=\dot{s}_{21}(0)=0$, либо *б*) $s_{11}(z)=j\sigma_1z+O(|z|^2)$, $\sigma_1\neq 0$, $\dot{s}_{12}(0)\dot{s}_{21}(0)=-\sigma_1^2$, $i\dot{s}_{12}(0)>0$.

VII. $|s_{12}(\lambda)|<1$ $(\lambda\neq 0,\ \operatorname{Im}\lambda=0)$.

Следствие. *S-матрица полностью определяется заданием одного элемента $s_{12}(z)$ по формулам*

$$s_{11}(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\pm\infty}\frac{\ln(1-|s_{12}(\lambda)|^2)}{\lambda - z}\,d\lambda\right\}; \qquad (6)$$

$$s_{11}(-z) = s_{11}(z)^{-1}\,[1 - s_{12}(z)\,s_{12}(-z)];$$

$$s_{21}(z) = -s_{12}(-z)\,s_{11}(z)\,[s_{11}(-z)]^{-1}.$$

Обратная задача рассеяния. Перечисленные свойства S-матрицы оказываются не только необходимыми, но и достаточными, а именно, справедлива

Теорема 1. *Для того, чтобы матрица $S(z) = \|s_{ij}(z)\|_{i,\,j=1,\,2}$ была S-матрицей некоторого уравнения Штурма—Лиувилля (1) с потенциалом вида (2) ($k^+ = k^- = 1$) необходимо и достаточно выполнения условий I—VII. Соответствие $S(z) \leftrightarrow q(x)$ взаимнооднозначно.*

Доказательство достаточности имеет конструктивный характер — мы построим по заданной матрице $S(z)$ функцию $q(x)$ вида (2) и покажем, что матрица $S(z)$ является S-матрицей уравнения (1).

Обозначим

$$R^-(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_{12}(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda,$$

$$R^+(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_{21}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda.$$

В силу свойств I и V функции $R^{\pm}(x) \in M(-\infty, \infty)$, абсолютно непрерывны и $R^{\pm}(x)' \in M(-\infty, \infty)$. Рассмотрим уравнения Марченко

$$R^+(x+y) + K^+(x, y) + \int_x^{\infty} K^+(x, t)\,R^+(t+y)\,dt = 0, \quad y > x; \qquad (7)$$

$$R^-(x+y) + K^-(x, y) + \int_{-\infty}^{x} K^-(x, t)\,R^-(t+y)\,dt = 0, \quad y < x. \qquad (8)$$

Из свойств IV, VII следует, что уравнения (7), (8) для всех $x \in (-\infty, \infty)$ имеют единственные решения $K^+(x, y) \in M(x, \infty)$, $K^-(x, y) \in M(-\infty, x)$ и при всех значениях z из полосы П функции

$$E^+(z, x) = e^{izx} + \int_x^{\infty} K^+(x, t)\,e^{izt}dt,$$

$$E^-(z, x) = e^{izx} + \int_{-\infty}^{x} K^-(x, t)\,e^{izt}dt$$

удовлетворяют уравнениям $-\frac{d^2}{dx^2}E^{\pm}(z, x)+Q^{\pm}(x)E^{\pm}(z, x)=$ $=z^2E^{\pm}(z, x)$, где $Q^{+}(x)=-2\frac{d}{dx}K^{+}(x, x)\in M(a, \infty)$, $Q^{-}(x)=$ $=2\frac{d}{dx}K^{-}(x, x)\in M(-\infty, a)$.

Введем функции

$$H^{+}(z, x)=s_{11}(z)^{-1}e^{izx}[1-\lim_{N\to\infty}\int_x^N\Phi^{-}(x, y)e^{iz(y-x)}dy];$$

$$H^{-}(z, x)=s_{11}(z)^{-1}e^{-izx}[1-\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^x\Phi^{+}(x, y)e^{iz(x-y)}dy],$$

где $\Phi^{-}(x, y)=R^{-}(x+y)+\int_{-\infty}^x K^{-}(x, t)R^{-}(t+y)\,dt$, $\Phi^{+}(x, y)=$ $=R^{+}(x+y)+\int_x^\infty K^{+}(x, t)R^{+}(t+y)\,dt$.

Нетрудно убедиться, что справедливы равенства ($z\in\Pi$)

$$s_{12}(z)E^{-}(-z, x)+E^{-}(z, x)=s_{11}(z)H^{+}(z, x), \tag{9}$$
$$s_{21}(z)E^{+}(z, x)+E^{+}(-z, x)=s_{11}(z)H^{-}(-z, x). \tag{10}$$

Так как функция $s_{11}(z)$, ввиду (6), не обращается в нуль в верхней полуплоскости, то и функции $H^{+}(z, x)$, $H^{-}(-z, x)$ продолжаются аналитически в эту полуплоскость, причем, они обладают следующими свойствами

$$W(E^{+}(z, x), H^{-}(-z, x))=W(H^{+}(z, x), E^{-}(-z, x))=2izs_{11}(z)^{-1};$$
$$\overline{H^{+}(\lambda, x)}=H^{+}(-\lambda, x),\ \overline{H^{-}(-\lambda, x)}=H^{-}(\lambda, x)\ (\operatorname{Im}\lambda=0);$$
$$\lim_{|z|\to\infty}e^{izx}H^{-}(-z, x)=\lim_{|z|\to\infty}e^{-izx}H^{+}(z, x)=1.$$

Рассмотрим преобразования T_+, $T_-T_{\pm}(F)=F(x)-z^{-2}E^{\pm}(x)\times$ $\times\mathcal{I}_{\pm}^{-1}(x)W(E^{\pm}(x), F(x))$, где $\mathcal{I}_{\pm}(x)=\frac{1}{2}W(E^{\pm}(x), \ddot{E}^{\pm}(x))$, и для краткости положено $E^{\pm}(x)\equiv E^{\pm}(0, x)$, $\dot{E}^{\pm}(x)\equiv\frac{\partial}{\partial z}E^{\pm}(z, x)|_{z=0}$ и т. д.

Так как функции $\ddot{E}^{\pm}(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$-\frac{d^2}{dx^2}\ddot{E}^{\pm}(x)+Q^{\pm}(x)\ddot{E}^{\pm}(x)=2E^{\pm}(x),$$

то $\mathcal{I}'_{\pm}(x)=[E^{\pm}(x)]^2$, значит, функции $e^{\pm}(z, x)=T_{\pm}[E^{\pm}(z, x)]$ удовлетворяют уравнениям Штурма—Лиувилля с потенциалами соответственно $q^{\pm}(x)=Q^{\pm}(x)-2\frac{d}{dx}(\mathcal{I}'_{\pm}(x)\mathcal{I}_{\pm}^{-1}(x))\underset{x\to\pm\infty}{\sim}\frac{2}{x^2}+O(e^{-\varepsilon|x|})$.

Преобразования $T_\pm$ определены для всех x, что вытекает из следующего утверждения.

Лемма 4. *Если матрица $S(z)$ удовлетворяет условиям I—VII, то $E^+(x) \in L^2(-\infty, a)$, причем, в случае а) $\mathcal{J}_+(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} [E^+(x)]^2 dx > 0$ $(x > -\infty)$, в случае б) $J_+(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} [E^+(x)]^2 dx + \frac{c^2}{i\dot{s}_{12}(0)} > 0$.*

Применяя преобразование T_- к равенству (9), а T_+ к (10) получаем $s_{21}(z) e^+(z, x) + e^+(-z, x) = s_{11}(z) h^-(-z, x)$ **(11)**; $s_{12}(z) \times e^-(-z, x) + e^-(z, x) = s_{11}(z) h^+(z, x)$ **(12)**. Подставляя в (11) $z_1 = -z$, несложно определить, что $s_{12}(z) h^-(-z, x) + h^-(z, x) = s_{11}(z) e^+(z, x)$ **(13)**. Наконец, исключая из (12) и (13) $s_{12}(z)$, находим $e^-(z, x) h^-(-z, x) - h^-(z, x) e^-(-z, x) = s_{11}(z) [h^+(z, x) \times h^-(-z, x) - e^+(z, x) e^-(-z, x)]$ **(14)**.

Введем функцию $G(z) = s_{11}(z) [h^+(z, x) h^-(-z, x) - e^+(z, x) \times e^-(-z, x)]$. Функция $G(z)$ продолжается в верхнюю полуплоскость, а в силу нечетности левой части (14) ее можно продолжить и в нижнюю полуплоскость. Таким образом, $G(z)$ — функция аналитическая во всей плоскости за исключением $z = 0$.

При $z \to 0$ $ze^+(z, x) = e_0^+(x) + z^2 e_2^+(x) + O(|z|^3)$; $ze^-(-z, x) = -e_0^-(x) - z^2 e_2^-(x) + O(|z|^3)$, где $e_0^\pm(x) = iJ_\pm^{-1}(x) E^\pm(x)$.

Поэтому, в случае а) $s_{11}(z) e^+(z, x) e^-(-z, x) = O(|z|^3) e^+(z, x) \times e^-(-z, x) \to 0$. Аналогично $zh^+(z, x) = O(1)$, $zh^-(-z, x) = O(1)$; $s_{11}(z) h^+(z, x) h^-(-z, x) = O(|z|)$ $(z \to 0)$.

В случае б) условия II, VI позволяют установить, что функции $s_{11}(z)$, $s_{12}(z)$ и $s_{21}(z)$ имеют такие разложения в окрестности нуля: $s_{11}(z) = i\sigma_1 z \left[1 + i\frac{\sigma_- + \sigma_+}{2} z + \dots\right]$; $s_{12}(z) = 1 + i\sigma_- z - \sigma_- \times \frac{\sigma_- + \sigma_+}{2} z^2 + \dots$; $s_{21}(z) = 1 + i\sigma_+ z - \sigma_+ \frac{\sigma_- + \sigma_+}{2} z^2 + \dots$, причем, $\sigma_1^2 = \sigma_- \sigma_+$.

Из равенств (11), (12) находим, что $h^+(z, x) = -\sigma_- \sigma_1^{-1} z^{-1} e_0^- \times [1 + O(|z|^2)]$; $h^-(-z, x) = \sigma_+ \sigma_1^{-1} z^{-1} e_0^+ [1 + O(|z|^2)]$. Следовательно,

$$s_{11}(z) [h^+(z, x) h^-(-z, x) - e^+(z, x) e^-(-z, x)] = s_{11}(z) \times \times \{-\sigma_- \sigma_+ \sigma_1^{-2} e_0^+ e_0^- z^{-2} + e_0^+ e_0^- z^{-2} + O(1)\} = O(z).$$

Значит, функция $G(z)$ целая, а так как из поведения функций $e^\pm(z, x)$, $h^\pm(z, x)$ при $|z| \to \infty$ вытекает, что $G(z) \to 0$ $(|z| \to \infty)$, то $G(z) \equiv 0$. Итак, $e^-(z, x) h^-(-z, x) \equiv h^-(z, x) e^-(-z, x)$.

Рассмотрим функцию $P(z) = \frac{h^-(-z, x)}{e^-(-z, x)}$ $(\operatorname{Im} z \geqslant 0)$. Так как $P(z) = P(-z)$ $(z \in \Pi)$, то ее можно продолжить в нижнюю полуплоскость.

Пусть $e^-(-z, x) = 0$ $(z \neq 0)$, тогда и $h^-(-z, x) = 0$. Действительно, если это не так, то из определения $G(z)$ следует, что $h^+(z, x) = 0$. Преобразование, обратное T_-, имеет вид $F(x) = T_-^{-1}(f) = f(x) - z^{-2}E^-(x) W(E^-(x) J_-^{-1}(x), f(x))$, откуда $z^2 \times H^+(z, x) = J_-(x) J_-^{-1}(x) h_x^+(z, x)'$; $z^2 E^-(-z, x) = J_-(x) J_-^{-1}(x) \times e_x^-(z, x)'$, и мы приходим к противоречию

$$2iz^5 s_{11}^{-1}(z) = [J_-^{-1}(x) J_-(x)]^2 W(h_x^{+\prime}(z, x), e_x^{-\prime}(-z, x)) =$$
$$= [J_-^{-1}(x) J_-(x)]^2 (q^-(x) - z^2) W(e^-(-z, x), h^+(z, x)) = 0.$$

Вследствие простоты нулей $e^-(-z, x)$ функция $P(z)$ может иметь полюс только в точке $z = 0$.

Пусть x таково, что $e^-(0, x) \neq 0$ и $E^-(0, x) \neq 0$. Из асимптотик (21), (22) следует, что $\lim\limits_{z \to 0} zP(z) = \lim\limits_{z \to 0} \frac{z^2 h^-(-z, x)}{ze^-(-z, x)} = 0$. Значит, $P(z)$ — целая функция, а так как $\lim\limits_{|z| \to \infty} P(z) = 1$, то $P(z) \equiv 1$, т. е. $h^-(-z, x) \equiv e^-(-z, x)$, $h^+(z, x) \equiv e^+(z, x)$. По непрерывности последние равенства распространяются на все x.

Завершая доказательство теоремы 1, установим однозначность соответствия $S(z) \to q(x)$. Нетрудно проверить, что преобразование $\psi(x) = \varphi(x) - z^{-2} v(x) J_{(x)}^{-1} W(v(x), \varphi(x))$, где $v(x) = z \times e^-(z, x)|_{z=0}$, $J(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} v^2(t)\, dt$, переводит решение уравнения (1) в решение уравнения $-y'' + Q^+ y = z^2 y$ $(-\infty < x < \infty)$ **(15)** с потенциалом $Q^+(x) = q(x) - 2\frac{d}{dx}(J'(x) J^{-1}(x))$, экспоненциально убывающим при $x \to +\infty$. Причем, S-матрица уравнения (15) совпадает с S-матрицей уравнения (1).

Пусть $K^+(x, y)$ ядро правого оператора преобразования Левина [5] для уравнения (15). Обычным образом устанавливается, что функции $R^+(x)$ и $K^+(x, y)$ связаны интегральным уравнением Марченко $R^+(x + y) + K^+(x, y) + \int\limits_x^{\infty} K^+(x, t) R^+(t + y)\, dt = 0$ $(y > x)$.

Как следствие единственности решения это уравнения и того факта, что $Q^+(x) = -2\frac{d}{dx} K^+(x, x)$, мы получаем единственность потенциала $q(x)$.

Список литературы: 1. *Сохин А. С.* Об операторах преобразования для уравнения с особенностью одного вида. — Математика и механика, 1974, вып. 39, с. 36—42. 2. *Фаддеев Л. Д.* Обратная задача квантовой теории рассеяния. II. — Современные проблемы математики. — М.: ВИНИТИ, 1974, 3, с. 93—180. 3. *Марченко В. А.* Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1977. — 369 с. 4. *Crum M. M.* Associated Sturm — Liouville Systems. — The Quart. J. of Math. Oxford (2), 1955, **6**, № 2, с. 121—128. 5. *Левин Б. Я.* Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка. — Докл. АН СССР, 1956, **106**, № 2, с. 187—190.

Поступила в редколлегию 14.01.81.