УДК 517.521.7

Н. А. ДАВЫДОВ

К-МАТРИЦЫ, НЕ СУММИРУЮЩИЕ РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ С ЧЛЕНАМИ, СТРЕМЯЩИМИСЯ К НУЛЮ

1. Пусть дана матрица $A = \|a_{nk}\|$ (n и $k = 0, 1, 2, \cdots$) и последовательность комплексных чисел S_n ($n = 0, 1, 2 \ldots$). Матрица A [2, с. 73] суммирует последовательность $\{S_n\}$ (или ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ с частными суммами $S_n = \sum_{k=0}^{\pm n} a_k$) к числу $S \neq \infty$, если ряды $t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k$ сходятся для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $\lim_{n\to\infty} t_n = S$.

Матрица A называется K-матрицей (T-матрицей), если она суммирует каждую сходящуюся последовательность (к ее пределу). Матрица $A = \|a_{nk}\|$ называется нижней треугольной, если $a_{nk} = 0$ для $k > n$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$.

Теорема 1. *K-матрица (T-матрица) $A = \|a_{nk}\|$, для которой существует натуральное число $p \geqslant 1$:*

$$\varliminf_{n\to\infty} \left(\left| \sum_{\nu=0}^{2p} a_{nn-p+\nu} \right| - \sum_{\substack{0 \leqslant k < n-p \\ k > n+p}} |a_{nk}| \right) > 0, \tag{1}$$

не суммирует ни одной расходящейся ограниченной последовательности $\{S_n\}$, удовлетворяющей условию $a_n \equiv S_n - S_{n-1} = 0\,(1)$ $(n \to \infty)$ (2).

Теорема 2. *Нижняя треугольная K-матрица (T-матрица) $A = \|a_{nk}\|$, для которой существует натуральное число $p \geqslant 1$:*

$$\varliminf_{n\to\infty} \left(\left| \sum_{\nu=0}^{p} a_{nn-p+\nu} \right| - \sum_{\nu=0}^{n-p-1} |a_{n\nu}| \right) > 0, \tag{3}$$

не суммирует ни одной расходящейся последовательности $\{S_n\}$, удовлетворяющей условию (2) *и ни одной неограниченной последовательности $\{S_n\}$, для которой $a_n \equiv S_n - S_{n-1} = 0\,(1)\,(n \to \infty)$* (4).

2. Доказательство теоремы 1. Построим матрицу $B = \|b_{nk}\|$ (n и $k = 0, 1, 2, \ldots$), элементы b_{nk} которой для всех достаточно больших $n\,(n \geqslant n_0)$ определяются следующим образом: $b_{nn} = \sum\limits_{n-p<k<n+p} a_{nk}$, $b_{nk} = 0$ для $n - p < k < n + p$ $(k \neq n)$, $b_{nk} = a_{nk}$ для $k = 0, 1, 2 \ldots, n - p - 1$, $k \geqslant n + p + 1$. Элементы b_{nk} для $0 \leqslant n < n_0$ и $k = 0, 1, 2, \ldots$ можно считать, например, равными нулю.

Негрудно убедиться в том, что матрица $B = \|b_{nk}\|$ является K-матрицей (T-матрицей). Действительно, для каждого фиксированного $k = 0, 1, 2, \ldots$ при достаточно большом n справедливо равенство $b_{nk} = a_{nk}$. Так как $A = \|a_{nk}\|$ — K-матрица (T-матрица), то существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} b_{nk} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{nk}$ (для T-матрицы $A = \|a_{nk}\|$ этот предел равен нулю). Далее справедливо равенство $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_{nk} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk}$ для всех достаточно больших $n\,(n \geqslant n_0)$. Если $A = \|a_{nk}\|$ K-матрица (T-матрица), то существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_{nk} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk}$ (для T-матрицы A этот предел равен 1). Наконец $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |b_{nk}| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \leqslant H < +\infty$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$, где H, в силу консервативности (регулярности) матрицы $A = \|a_{nk}\|$, не зависит от n. Следовательно, $B=\|b_{nk}\|$ — консервативная (регулярная) матрица. Для $n \geqslant n_0$ имеем $\sum_{k=0}^{\infty}(a_{nk}-b_{nk})S_k = \sum_{k=n-p}^{n+p}(a_{nk}-$ $-b_{nk})S_k = \sum_{k=n-p}^{n-1} a_{nk}S_k + (a_{nn}-b_{nn})S_n + \sum_{k=n+1}^{n+p} a_{nk}S_k = \sum_{k=n-p}^{n-1} \times$ $\times\, a_{nk}S_k - \left(\sum_{n-p<k<n+p} a_{nk}\right)S_n + \sum_{k=n+1}^{n+p} a_{nk}S_k = \sum_{k=n-p}^{n-1} a_{nk}(S_k-S_n)+$ $+\sum_{k=n+1}^{n+p} a_{nk}(S_k-S_n)$.

В силу условия (2)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(a_{nk}-b_{nk})S_k = 0.$$

Таким образом, матрицы $A=\|a_{nk}\|$ и $B=\|b_{nk}\|$ одновременно суммируют или нет ограниченную последовательность $\{S_n\}$, удовлетворяющую условию (2). Но по теореме Виланского и Целлера [1] для K-матриц и по теореме Агнью [2, с. 379] для T-матриц, матрица $B=\|b_{nk}\|$, которая в силу (1) удовлетворяет неравенству $\varliminf_{n\to\infty}\left(|b_{nn}| - \sum_{k\neq n}|b_{nk}|\right) > 0$, не суммирует ни одной расходящейся ограниченной последовательности. Следовательно, K-матрица (T-матрица) $A=\|a_{nk}\|$, удовлетворяющая условию (1), не суммирует ни одной расходящейся ограниченной последовательности $\{S_n\}$, для которой выполнено условие (2). Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Построим матрицу $B=$ $=\|b_{nk}\|$, элементы b_{nk} которой для $n\geqslant n_0$ определим следующим образом: $b_{nn}=\sum_{\nu=0}^{p} a_{n\,n-p+\nu}$, $b_{nk}=0$ для $k=n-p,\ n-p+1,\dots,$ $n-1$, $b_{nk}=a_{nk}$ для $k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n-p-1$. Элементы b_{nk} для $0\leqslant n<n_0$ и $k=0,\ 1,\ 2,\cdots n$ можем считать равными, например, нулю.

Матрица $B=\|b_{nk}\|$ является нижней треугольной K-матрицей (T-матрицей). Для $n\geqslant n_0$ имеем $\sum_{k=0}^{n}(a_{nk}-b_{nk})S_k = \sum_{k=n-p}^{n-1} a_{nk}S_k +$ $+(a_{nn}-b_{nn})S_n = \sum_{k=n-p}^{n-1} a_{nk}S_k - \left(\sum_{k=n-p}^{n-1} a_{nk}\right)S_n = \sum_{k=n-p}^{n-1} a_{nk}(S_k-S_n)$.

Отсюда и из (2), (4) получаем

$$\sum_{k=0}^{n}(a_{nk}-b_{nk})S_k = \begin{cases} o(1), & \text{если выполнено условие (2)} \\ O(1), & \text{если выполнено условие (4),} \end{cases} \qquad (5)$$

и, значит, матрицы A и B одновременно суммируют или нет последовательность $\{S_n\}$, удовлетворяющую условию (2). Но по тео реме Виланского и Целлера [1], нижняя треугольная матрица $B = \| b_{nk} \|$, которая в силу (3) удовлетворяет неравенству

$$\varliminf_{n \to \infty} \left(| b_{nn} | - \sum_{k=0}^{n-1} | b_{nk} | \right) > 0, \tag{6}$$

не суммирует ни одной расходящейся последовательности. Следовательно, матрица A не суммирует ни одной расходящейся последовательности $\{S_n\}$, удовлетворяющей условию (2). Первая часть утверждения теоремы 2 доказана. Пусть последовательность $\{S_n\}$ удовлетворяет условию (4). Если эта последовательность не ограничена, то последовательность $t_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{n} b_{nk} S_k$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, в силу условия (6) по лемме 5 [3] также не ограничена.

Тогда, согласно (5), будет не ограничена и последовательность $t_n^{(2)} = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} S_k$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Этим доказана вторая часть утверждения теоремы 2.

Список литературы: 1. *Wilansky A., Zeller K.* Summation of bounded divergent seguences, topological methods. — Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 78, № 2, p. 501—509. 2. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. — М.: Физматгиз, 1960. — 471 с. 3. *Давыдов Н. А.* О включении и равносильности методов Кожима суммирования рядов. — Укр. мат. журн., 1967, **19**, с. 29—47.

Поступила в редколлегию 02.10.80.