УДК 517.5

А. М. ГОМБЕРГ

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ СЕМЕЙСТВ ОТНОСИТЕЛЬНО ФИЛЬТРУЮЩЕГО ДЕЙСТВИЯ ГРУППЫ

1. В работе [1] рассматривались нормальные формы формальных рядов и ростков аналитических отображений относительно действия группы, допускающего фильтрацию. В настоящей статье результаты [1] обобщаются на семейства формальных рядов и аналитических отображений.

Введем предварительно некоторые определения согласно [2].

Семейством формальных рядов из $\widehat{R}[n, p]$ (или ростков из $R[n, p]$) называется росток в начале координат отображения $F: L \to \widehat{R}[n, p]$ (соответственно $F: L \to R[n, p]$), где L — некоторое линейное топологическое пространство. Элементы $\varepsilon \in L$ играют роль параметров семейства. Семейство называется конечнопараметрическим, если $\dim L < \infty$. Всюду в дальнейшем L будет подпространством (с индуцированной топологией) пространства формальных рядов $\widehat{R}[m, q]$ при некоторых m и q.

Отображение $g: R^n \to \widehat{R}[n, p]$ называется C^k-отображением, если каждая координата принадлежит классу C^k. Семейство $F: L \to R[n, p]$ называется C^k-семейством, если для любого C^k-отображения $g: R^n \to L$ отображение $F.\, g: R^n \to \widehat{R}[n, p]$ принадлежит классу C^k. Аналогично определяется понятие C^k-семейства ростков. При этом C^k-отображения $g: R^n \to R[m, q]$—это отображения, для которых отображение $F: (R^{n+m}, 0) \to (R^q, 0)$, определенное формулой $H(x, \varepsilon) = g(\varepsilon)(x)$, $(\varepsilon \in R^n, x \in R^m)$, принадлежит классу C^k.

2. Рассмотрим C^k-семейство $F(x, \varepsilon)$ формальных рядов из $\widehat{R}[n, p]$. В [1] построена так называемая неполная нормальная форма элементов $F \in R[n, p]$ относительно действия подгрупп $\widehat{G}$ контактной группы $\widehat{G}[n, p]$, удовлетворяющей некоторому дополнительному условию. Аналогичную конструкцию построим для семейств формальных рядов.

Пусть $V(\widehat{G})$ алгебра Ли группы $\widehat{G}$, $g \in \widehat{G}$, $S_F(g) = g.\, F$. Обозначим $R^{(i)}[n, p]$ подпространство однородных полиномов степени i.

Положим, $S_F(e): V(\widehat{G}) \to \widehat{R}[n, p]$ — производная в единице орбитного отображения. Зафиксируем подгруппу $\widehat{G} \subset \widehat{G}[n, p]$.

Пусть семейство $F(\varepsilon) \in \widehat{R}[n, p]$ и целое число $m > 0$ таковы, что $P^{(k)}(\exp \lambda.\, F - F) = P^{(k)} S_F(e)\, \lambda^{(k-m+1)} + R_k[\lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(k-m)}]$ при любом $\lambda \in V(\widehat{G})$, $k = m+1, \ldots$. Здесь $P^{(k)}(H)$ — однородная проекция ряда H степени k. В этих условиях имеет место

Теорема 1. *Пусть подпространство $L \subset \widehat{R}[n, p]$ содержит при всяком значении параметра ε ядро оператора* $\operatorname{Ker}(S_{F_m}(e))^*$ *и обладает тем свойством, что* $L = \sum_{i=1}^{\infty} L \cap R^{(i)}[n, p]$. *Тогда существует такое C^k-семейство $g(\varepsilon)$ преобразований из $\widehat{G}$, что $g(\varepsilon).\, F(\varepsilon) = F_m(\varepsilon) + h(\varepsilon)$, где $h(\varepsilon) \in L$ при любом ε.*

Доказательство. Будем строить такое семейство элементов $\lambda(\varepsilon) \in V(\widehat{G})$, что семейство преобразований $g(x, \varepsilon) = \exp\lambda(\varepsilon)$ удовлетворяет нужным условиям. Пусть $\lambda(x, \varepsilon) = \sum_{k=2}^{\infty} \lambda^{(k)}(x, \varepsilon)$ — разложение в прямую сумму однородных компонент. Найдем последовательно слагаемые $\lambda^{(i)}(x, \varepsilon)$.

Пусть $Q_i: R^{(i)}[n, p] \to R^{(i)}[n, p]$—ортопроектор из подпространства $L^{(i)} = L \cap R^{(i)}[n, p]$ и $N^{(i)} = (L^{(i)})^{\perp}$. Тогда имеют место включения $L^{(i)} \supset \operatorname{Ker}(S_F(e))^* \cap R^{(i)}[n, p]$ и $N^{(i)} \subset \operatorname{Im} S_F(e) \cap R^{(i)}[n, p]$.

Оператор $T_i(\varepsilon) = (I - Q_i) S_F(e): V(\widehat{G}) \to N^{(i)}$ сюръективен при каждом ε. Пусть $T_i^*(\varepsilon): N^{(i)} \to V^{(i)}(G)$—сопряженный оператор. Оператор $B_i(\varepsilon) = T_i(\varepsilon) T_i^*(\varepsilon): N^{(i)} \to N^{(i)}$ обратим и $\widetilde{B}_i(\varepsilon) = T_i^*(\varepsilon) \times \times (B_i(\varepsilon))^{-1}: N^{(i)} \to V^{(i)}(\widehat{G})$ является правым обратным к $T_i(\varepsilon)$. Семейство операторов $\widetilde{B}_i(\varepsilon)$ является, очевидно, C^k-семейством. Теперь будем последовательно искать слагаемые $\lambda^{(i)}(\varepsilon)$.

Если эти слагаемые при $i \leqslant k - 1$ уже найдены, то положим

$$g_{k-1}(\varepsilon) = \exp \sum_{i=2}^{k-1} \lambda^{(i)}(\varepsilon)$$

и для $\lambda^{(k)}(\varepsilon)$ запишем уравнение

$$P^{(k+m-1)}\left(\exp \sum_{i=2}^{k} \lambda^{(i)}(\varepsilon). F\right) - P^{(k+m-1)}F = P^{(k+m-1)}S_F \times \\ \times (e)\, \lambda^{(k)}(\varepsilon) + R_k[\lambda^{(2)}, (\varepsilon), \ldots, \lambda^{(k-1)}(\varepsilon)].$$

Положим индуктивно $\lambda^{(k)}(\varepsilon) = -\widetilde{B}_k(\varepsilon)(I - Q_k)\{P^{(k+m-1)}F + + R_n[\lambda^{(2)}(\varepsilon), \ldots, \lambda^{(k-1)}(\varepsilon)]\}$.

Тогда $P^{(k-m+1)} \exp \sum_{i=1}^{k} \lambda^{(i)}(\varepsilon). F \in L$.

В результате, построив $\lambda = \sum_{2}^{\infty} \lambda^{(i)}(\varepsilon)$, получим $P^{(k-m+1)} \exp\lambda. F \in \in L^{(k)}$ $(k = m + 1, \ldots)$. Следовательно, $\exp\lambda. F = F_m(\varepsilon) + h(\varepsilon)$, $h(\varepsilon) \in L$ при любом значении параметра ε. Теорема доказана.

Рассмотрим несколько следствий и примеров.

Следствие 1. *Если «главная» часть $F_m(x)$ не зависит от ε, то всё семейство $F(\varepsilon)$ некоторым C^k-преобразованием $g(\varepsilon) \in \widehat{G}$ можно привести к неполной нормальной форме:* $g(\varepsilon). F(\varepsilon) = F_m + + h(\varepsilon)$, $h(\varepsilon) \in \operatorname{Ker}(S_{F_m}(e))^*$.

Здесь вместо постоянства семейства главных частей достаточно потребовать постоянства подпространств $\operatorname{Ker}(S_{F_m}(e))^*$.

С л е д с т в и е 2. *Пусть «главная» часть* $F_m(\varepsilon)$ *такова, что подпространство* $\mathrm{Ker}\,(S_{Fm}(e))^*$ *не зависит от* (ε). *Тогда* $F(\varepsilon)$ *некоторым* C^k*-семейством преобразований* $g(\varepsilon) \in G$ *можно привести к неполной нормальной форме:* $g(\varepsilon).F(\varepsilon) = F_m(\varepsilon) + h(\varepsilon)$, $h(\varepsilon) \in \mathrm{Ker}\,(S_{F_m}(e))^*$.

Пример. Пусть $\widehat{G} = \widehat{G}_r$, $p = 1$ и $F(x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} c_i(\varepsilon)\ \xi_i^{q_i} + h(x, \varepsilon)$, где $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$, $\sum_{i=1}^{m} q_i = m$, $c_i(0) \neq 0$ и h начинается с членов степени $\geqslant m$. Тогда подпространство $\mathrm{Ker}\,(S_{F_m}(e))^*$ не зависит от ε, поэтому семейство $F(x, \varepsilon)$ некоторым C^k-семейством $g(\varepsilon) \in \widehat{G}_r$ можно привести к виду $(g(\varepsilon).F(\varepsilon))(x) = \sum c_i(\varepsilon)\,\xi_i^{q_i} + \sum_I h_I(\varepsilon) \times x^I$, где $h_i(\varepsilon)$ для всех таких мультииндексов $I = (I_1, \ldots, I_k)$, для которых $\sum_{i=1}^{n} \frac{I_i}{q_i} > 1$, $0 \leqslant I_i \leqslant q_i - 2$, $(i = 1, \ldots, n)$.

Если $\widehat{G} = \widehat{G}_r$ группа преобразований в прообразе, то доказанная здесь теорема 1 может быть распространена на случай квазиоднородной фильтрации. А именно, пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ тип квазиоднородности, $F(x, \varepsilon) = F_m(x, \varepsilon) + \cdots$ — семейство формальных рядов, начинающихся с квазиоднородных членов обобщенной степени d_m.

Теорема 2. *Пусть подпространство* $L \subset R[n, p]$ *содержит при каждом значении параметра* ε *ядро оператора* $(S_{F_m}(\varepsilon)(e))^*$ и $L = \sum_i L \cap R^{(i)}[n, p]$. Тогда существует такое C^k-семейство преобразований $g(\varepsilon) \in \widehat{G}_r(\alpha)$, что $g(\varepsilon).F(\varepsilon) = F_m(\varepsilon) + h(\varepsilon)$, где $h(\varepsilon) \in L$ при любом ε.

3. Перейдем к рассмотрению нормальных форм семейств аналитических отображений.

Рассмотрим семейство $F(\varepsilon) \in R[n, p]$ аналитических отображений и поставим вопрос о приводимости его к неполной нормальной форме сходящимися преобразованиями. Как и в теореме 1 для существования семейства сходящихся преобразований нам понадобится ввести дополнительные условия. Пусть $m > 1$ и $F_m(\varepsilon)$ — семейство главных частей. Будем по-прежнему предполагать, что $P^{(k)}(\exp\lambda.F - F) = P^{(k)}S_F'(e)\,\lambda^{(k-m+1)} + R_k[\lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(k-m)}]$ при $\lambda \in V(G)$. Тогда $P^{(i)}S_F(e) : V^{(i-m+1)}(G) \to R^{(i)}[n, p]$.

Рассмотрим естественные включения $V^{(i-m+1)}(G) \subset V^{(i)}(G) \otimes R^{(i-m-1)}[n, 1]$, $R^{(i)}[n, p] \subset R^{(m+1)}[n, p] \otimes R^{(i-m-1)}[n, 1]$. Допустим, что существует подпространство $\widetilde{L} \subset R^{(m+1)}[n, p] \otimes R^{(i-m-1)}[n, 1]$, обладающее тем свойством, что $\widetilde{L} = L_1 \otimes R^{(i-m-1)}[n, 1]$, где $L_1 \subset R^{(m+1)}[n, p]$ — некоторое подпространство, причем $\operatorname{Ker}(P^{(m+1)}S_F(\varepsilon))^* \subset L_1$ при каждом ε. Положим $L = \tilde{L} \cap R[n, p]$.

Теорема 3. *Существует C^k-семейство сходящихся преобразований $g(\varepsilon) \in G$, приводящих $F(\varepsilon)$ к виду $g(\varepsilon)$. $F(\varepsilon) = F_m(\varepsilon) + h(\varepsilon)$, $h(\varepsilon) \in L$.*

Доказательство. *Пусть $N^{(m+1)}$ — прямое дополнение к подпространству L_1,* т. е. $R^{(m+1)} = L_1 \dotplus N^{(m+1)}$. Обозначим через $Q: R^{(m+1)}[n, p] \to N^{(m+1)}$ проектор вдоль L_1. Его можно продолжить до проектора $Q_i: R^{(m+1)}[n, p] \otimes R^{(i-m-1)}[n, 1] \to N^{(m+1)} \otimes \otimes R^{(i-m-1)}[n, 1]$.

Положим $Q_i = Q \otimes E$, где E—единичный оператор. Для преобразования $g(\varepsilon) = \exp \lambda(\varepsilon)$ запишем уравнение $P^{(i)}S_F(e)\, \lambda^{(i-m+1)}(\varepsilon) = h^{(i)}(\varepsilon) + R_k[\lambda^{(2)}(\varepsilon), \ldots, \lambda^{(i-m)}(\varepsilon)]$.

Рассуждая теперь как при доказательстве теоремы 1, заметим, что оператор $T_i(\varepsilon) = (I - \tilde{Q}_i) S_F(e)$ можно записать в виде $T_i(\varepsilon) = T_{m+1}(\varepsilon) \otimes E$. Следовательно, $B_i(\varepsilon) = T_{m+1}(\varepsilon)\, T^*_{m+1}(\varepsilon) \otimes E$.

Поэтому, полагая $\lambda^{(i)}(\varepsilon) = -B_i^{-1}(\varepsilon)(I - Q_i)\{P^{(i-m+1)}F + R_i \times \times [\lambda^{(2)}(\varepsilon), \ldots, \lambda^{(i-1)}(\varepsilon)]\}$, получим рекуррентную формулу для определения слагаемых $\lambda^{(i)}(\varepsilon)$. Применяя обычную технику [1] и [3], получим $\|\lambda^{(i)}(\varepsilon)\| \leqslant r^i$, $(i = m+1, \ldots)$ для некоторого $r > 0$. Следовательно, $\lambda(\varepsilon)$ — сходящееся преобразование.

Если $G = G_r$, то рассмотренная теорема может быть распространена на случай квазиоднородной фильтрации.

Список литературы: 1. *Белицкий Г. Р.* Нормальные формы относительно фильтрующего действия группы. — Тр. Моск. мат. о-ва, 1979, **40**, с. 3—46. 2. *Белицкий Г. Р.* Эквивалентность и нормальные формы ростков гладких отображений. — Усп. мат. наук, 1978, **32**, вып. 1 (199), с. 95—155. 3. *Зигель К. Л.* Лекции по небесной механике. — М.: Мир, 1969. — 264 с.

Поступила в редколлегию 10.02.79