УДК 517.946.9

Ю. В. ГАНДЕЛЬ

О ПАРНЫХ РЯДАХ ФУРЬЕ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Ряд смешанных краевых задач математической физики сводится к нахождению коэффициентов X_0, X_n, Y_n, $n=1, 2, \ldots$ так называемых парных рядов Фурье

$$aX_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos n\varphi + Y_n \sin n\varphi = 0, \quad \varphi \in CE \tag{1}$$

$$bX_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_n)(nX_n \cos n\varphi + nY_n \sin n\varphi) = f(\varphi), \quad \varphi \in E \tag{2}$$

где $E = \bigcup_{k=1}^{m} (\alpha_k, \ \beta_k)$, $-\pi < \alpha_1 < \beta_1 < \ldots < \alpha_m < \beta_m < \pi$, $CE = [-\pi, \ \pi] \setminus E$, а последовательность ε_n стремится к нулю не медленнее, чем $\frac{1}{n^2}$.

Метод решения таких парных сумматорных уравнений был разработан в связи с задачами о дифракции электромагнитных волн на плоских решетках [1], а затем широко применялся для решения разнообразных задач о дифракции волн на периодических структурах (см., например, [2], где можно найти дальнейшие ссылки).

В настоящей статье предлагается другой способ приближенного решения парного уравнения (1) — (2), основанный на сведении к сингулярному интегральному уравнению и последующем решении его так называемым численным методом «дискретных вихрей» [3] — [5].

Этот подход дает простой и единообразный способ решения изучаемых задач.

1°. Введем в рассмотрение функцию

$$F(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} -nX_n \sin n\theta + nY_n \cos n\theta, -\pi < \theta < \pi. \qquad (3)$$

В силу (1) $F(\theta)=0$ при $\theta \in CE$ (4), поэтому $X_n = -\frac{1}{\pi n} \int_E F(\theta) \sin n\theta \times d\theta$ (5), $Y_n = \frac{1}{\pi n} \int_E F(\theta) \cos n\theta d\theta$ $n = 1, 2, \ldots$, (6), и если функция $F(\theta)$ будет найдена, то мы определим все X_n, Y_n, $n = 1, 2, \ldots$, а X_0 связано с X_n, $n = 1, 2, \ldots$ соотношением

$$aX_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n X_n = 0, \qquad (7)$$

которое следует из (1) при $\varphi = \pi$.

Как видно из (1), функция $F(\theta)$ удовлетворяет m условиям

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} F(\theta) \, d\theta = 0, \ k = 1, 2, \ldots, m. \qquad (8)$$

В задачах математической физики, которые приводят к парному уравнению (1) — (2), $F(\theta)$, $\theta \in E$ имеет вид:

$$F(\theta) = \frac{\Phi(\theta)}{\sqrt{\left|\prod_{k=1}^{m} (\theta - \alpha_k)(\beta_k - \theta)\right|}}, \ \theta \in E \qquad (9)$$

причем $\Phi(\theta)$, $\theta \in \bar{E}$ непрерывная по Гельдеру функция, не обращающаяся в нуль на границе множества E.

Применяя к (3) преобразование Гильберта и учитывая (4), запишем $\sum_{n=1}^{\infty} nX_n \cos n\varphi + nY_n \sin n\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_E F(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\theta}{2}d\theta$. Рассматривая это равенство лишь при $\varphi \in E$, из (2) получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_E F(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}d\theta + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n(nX_n\cos n\varphi + nY_n \sin n\varphi) = = bX_0 - f(\varphi),\quad \varphi \in E. \tag{10}$$

Используя представления (5), (6) для X_n и Y_n, $n=1, 2, \ldots$, получаем из (10) сингулярное интегральное уравнение для функции $F(\theta)$

$$\frac{1}{\pi}\int_E \frac{K(\theta-\varphi)}{\theta-\varphi}F(\theta)d\theta = G(\varphi),\ \varphi \in E, \tag{11}$$

где $K(\theta) = \frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} - \theta\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n \sin n\theta$ **(12)**, причем $K(0)=1$, $G(\varphi) = = bX_0 - f(\varphi)$ **(13)**.

Как известно [6], если правая часть уравнения (11) задана и непрерывна по Гельдеру, то при выполнении соотношений (8) в классе функций, определяемом условием (9), сингулярное интегральное уравнение (11) однозначно разрешимо при $k(\theta) = 1$.

Для одновременного нахождения $F(\theta)$ и неизвестного коэффициента X_0, входящего в правую часть $G(\varphi)$ уравнения (11), определим сначала решения (11), удовлетворяющие условиям (8) и (9), $F_0(\theta)$ и $F_1(\theta)$, соответственно при правых частях $G_0(\varphi) = b$ и $G_1(\varphi) = f(\varphi)$, где $f(\varphi)$, $\varphi \in E$ — заданная непрерывная по Гельдеру функция.

При этом имеем $F(\theta) = X_0F_0(\theta) - F_1(\theta)$ **(14)**. Искомые коэффициенты X_n, $n=1, 2, \ldots$ представим в виде $X_n = a_nX_0 - b_n, n = 1, 2, \ldots$ **(15)**, где $a_n = -\frac{1}{\pi n}\int_E F_0(\theta)\sin n\theta d\theta$, $b_n = = -\frac{1}{\pi n}\int_E F_1(\theta)\sin n\theta d\theta$.

Подставляя эти выражения в (7), после несложных преобразований получаем соотношение для X_0:

$$\left(\frac{1}{\pi}\int_E \theta F_0(\theta)\,d\theta - 2a\right)X_0 = \frac{1}{\pi}\int_E \theta F_1(\theta)\,d\theta. \tag{16}$$

2°. Для нахождения приближенного решения полученного сингулярного уравнения предлагается использовать одну модификацию численного метода «дискретных вихрей».

Пусть точки $x_0^{(k)} = \alpha_k,\ x_1^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)},\ x_{n_k+1}^{(k)} = \beta_k,\ k = 1, 2, \ldots, m$ разбивают отрезок $[\alpha_k, \beta_k]$ на $n_k + 1$ равных частей длины $h_k = \dfrac{\beta_k - \alpha_k}{n_k + 1}$, а $x_{0j}^{(k)}$ — середина отрезка $[x_j^{(k)}, x_{j+1}^{(k)}]$, $j = 0, 1, \ldots, n_k$.

Теорема. (И. К. Лифанов [4], [5]). *Пусть функция* $G(\varphi)$, $\varphi \in \overline{E}$ *непрерывна по Гельдеру, тогда решение системы линейных алгебраических уравнений*

$$\frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_l} \frac{K(x_i^{(l)} - x_{0j}^{(k)})}{x_i^{(l)} - x_{0j}^{(k)}} F_n(x_i^{(l)}) h_l = G(x_{0j}^{(k)}),\ j = 1, 2, \ldots, n_k - 1$$

$$\sum_{i=1}^{n_k} F_n(x_i^{(k)}) h_k = 0,\ j = n_k,\ k = 1, 2, \ldots, m;$$

$$n = (n_1, \ldots, n_m)$$

сходится при $n_k \to \infty$, $k = 1, \ldots, m$ равномерно на любом множестве $\overline{E}_\delta = \bigcup_{k=1}^{m} [\alpha_k + \delta_k, \beta_k - \delta_k]$ (δ_k, $k = 1, \ldots, m$, сколь угодно малые положительные числа) к единственному в классе, определяемом условиями (8), (9), решению $F(x)$ сингулярного уравнения (11).

В работах [4, 5] оценивается погрешность приближенного численного решения в различных случаях.

Список литературы: 1. *Агранович З. С., Марченко В. А., Шестопалов В. П.* Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках.— ЖТФ, 1962, 32, № 4, с. 381—394. 2. *Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г.* Дифракция волн на решетках.— Изд-во Харьк. ун-та, 1973, 288 с. 3. *Лифанов И. К., Полонский Я. Е.* Обоснование численного метода дискретных вихрей решения сингулярных интегральных уравнений.— ПММ, 39, № 4, 1975, с. 742—746. 4. *Лифанов И. К.* О сингулярных интегральных уравнениях с одномерными и кратными интегралами типа Коши.— Докл. АН СССР, 239, № 2, 1978, с. 265—268. 5. *Лифанов И. К.* Топология кривых и численное решение сингулярных интегральных уравнений первого рода. IV Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям.— Кишинев: Штиница, 1979, с. 82—85. 6. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.—599 с.

Поступила в редколлегию 16.01.81.