УДК 517.52

Н. Н. БИЛОЦКИЙ

ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВОГО ТИПА ДЛЯ МАТРИЧНЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ, РАВНОМЕРНО ТРАНСЛЯТИВНЫХ СПРАВА

1. Пусть $A = \|a_{mn}\|$ — регулярная матрица [1], где a_{mn} $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$ — комплексные числа и $S = \{S_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — последовательность комплексных чисел. Если ряды $t_m = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{mn} \times S_n$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ сходятся, и $\lim\limits_{m\to\infty} t_m = L$, то последовательность $S = \{S_n\}$, A — суммируется матрицей A и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L(A)$ [1, 2]. Если же ряды $t_m^{(p)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{mn} S_{n+p}$ $(m, p = 0, 1, 2, \ldots)$, сходятся и $\lim\limits_{m\to\infty} t_m^{(p)} = L$ равномерно относительно $p = 0, 1, 2, \ldots,$ то в этом случае матрица A суммирует последовательность $S = \{S_n\}$ к числу L и равномерно транслятивна справа относительно последовательности $S = \{S_n\}$ и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L(F_A)$ [3—6]. Матрица A транслятивно справа ограничивает последовательность $S = \{S_n\}$, если существует такое число $M(s) > 0$, что $|t_m^{(p)}| \leqslant M(s)$ при $0 \leqslant m$, $p < +\infty$. В этом случае $S_n = 0(F_A)$ $(n \to \infty)$.

В работе [5] введены такие понятия. Замкнутое выпуклое множество G в комплексной плоскости называется (d)-множеством последовательности $S = \{S_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность отрезков $[n_k(\varepsilon), m_k(\varepsilon)]$ чисел натурального ряда, что $S_n \in G_\varepsilon$ для $n_k(\varepsilon) \leqslant n \leqslant m_k(\varepsilon) < n_{k+1}(\varepsilon)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\lim\limits_{k\to\infty} [m_k(\varepsilon) - n_k(\varepsilon)] = +\infty$, где G_ε — замкнутая ε-окрестность множества G. Если, в частности, (d)-множеством последовательности является точка, то эту точку будем называть (d)-точкой этой последовательности.

Бесконечно удаленная точка комплексной плоскости называется бесконечно удаленной (d)-точкой последовательности $S = \{S_n\}$ если существуют последовательности отрезков $[n_{ki}; m_k]$ чисел натурального ряда и замкнутых выпуклых множеств G_k такие, что $S_n \in G_k$ для $n_k \leqslant n \leqslant m_k < n_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ $\lim\limits_{k\to\infty}(m_k - n_k) = +\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(0, G_k) = +\infty$, где $\rho(0, G_k)$ — последовательность расстояний множеств G_k до точки $z = 0$ в комплексной плоскости.

Теорема 1. [5] *Пусть $A = \|a_{mn}\|$ — нижняя треугольная регулярная матрица.*

Если $S_n = 0(F_A)$ $(n \to \infty)$, то бесконечно удаленная точка комплексной плоскости не может быть бесконечно удаленной (d)-точкой последовательности $S = \{S_n\}$.

Если $\lim\limits_{k\to\infty} S_n = L(F_A)$, а замкнутое выпуклое множество G является (d)-множеством последовательности $S = \{S_n\}$, то $L \in G$.

2. Теорема 1 дает возможность получить в качестве следствий ряд теорем тауберового типа. Отметим здесь некоторые из таких теорем. Будем полагать, что $A = \|a_{mn}\|$ — нижняя треугольная регулярная положительная матрица.

Теорема 2. [5] *Пусть каждый частичный предел последовательности $S = \{S_n\}$, конечный или бесконечный, является (d)-точкой этой последовательности.*

Если $S_n = 0(F_A)$ $(n \to \infty)$, то $S_n = 0(1)$ $(n \to \infty)$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L(F_A)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L$.

Теорема 3. *Пусть последовательность $S = \{S_n\}$ удовлетворяет условию $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}|S_m - S_{nk}| \leqslant r < +\infty$ $(r \geqslant 0)$,* когда $0 < m - n_k = 0(1)$ $(k \to \infty)$, *или условию* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}|S_{nk} - S_m| \leqslant r < +\infty$ $(r \geqslant 0)$, *когда $0 < n_k - m = 0(1)$ $(k \to \infty)$, где n_k — заданная возрастающая последовательность натуральных чисел.*

Если $S_n = 0(F_A)$ $(n \to \infty)$, то $S_{n_k} = 0(1)$ $(k \to \infty)$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L(F_A)$, то $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}|S_{n_k} - L| \leqslant r$.

Из теорем 2 и 3 легко получается

Следствие 1. [3, теоремы 4 и 5]. Пусть последовательность $S = \{S_n\}$ удовлетворяет условию $S_n - S_{n-1} = 0$ для $n \neq n_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\lim\limits_{k\to\infty}(n_{k+1} - n_k) = +\infty$ **(1)** или условию $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0$ **(2)**.

Если $S_n = 0(F_A)$ $(n \to \infty)$, то $S_n = 0(1)$ $(n \to \infty)$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L(F_A)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L$.

Действительно, при условиях (1) каждый частичный предел последовательности $S = \{S_n\}$, конечный или бесконечный, будет (d)-точкой этой последовательности. Остается обратится к теореме 2. При условии (2) утверждение следствия получаем из теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть последовательность действительных чисел $S = \{S_n\}$ удовлетворяет условиям* $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}(S_m - S_{n_k}) \geqslant -r_1 >$

$> -\infty$ $(r_1 \geqslant 0)$, когда $0 < m - r_k = 0(1)$ $(k \to \infty)$ (3), $\varliminf_{k \to \infty} (S_{n_k} - S_m) \geqslant -r_2 > -\infty$ $(r_2 \geqslant 0)$, когда $0 < n_k - m = 0(1)$ $(k \to \infty)$ **(4)**, *где n_k — заданная возрастающая последовательность натуральных чисел.*

1) *Если* $S_n = 0(F_A)$ $(n \to \infty)$, *то* $S_{n_k} = 0(1)$ $(k \to \infty)$.

2) *Если* $\lim_{n \to \infty} S_n = L$ (F_A), *то* $L - r_2 \leqslant \varliminf_{k \to \infty} S_{n_k} \leqslant \varlimsup_{k \to \infty} S_{n_k} \leqslant L + r_1$.

Докажем, например, теорему 4. Предположим, что выполняется условие (3) и $S_n = 0(F_A)$ $(n \to \infty)$. Тогда в силу теоремы 1 последовательность $S = \{S_n\}$ не имеет предела, равного $+\infty$. Допустим, что $\lim_{k \to \infty} S_{n_k} = +\infty$. Возьмем последовательность $S_{n_{k_\nu}}$ такую, что $\lim_{k \to \infty} S_{n_{k_\nu}} = +\infty$, $S_{n_{k_\nu}} > S_{n_{k_\nu}} + 4 + r_1$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Пусть $S_{m_{k_\nu}+1}$—первый после $S_{n_{k_\nu}}$ член последовательности $S = \{S_n\}$ такой, что $S_{m_{k_\nu}+1} \leqslant S_{n_{k_\nu}} - 2 - r_1$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ **(5)**. Тогда $\varlimsup_{\nu \to \infty} (m_{k_\nu} - n_{k_\nu}) = +$ (6). В противном случае $(m_{k_\nu} + 1 - n_{k_\nu}) = 0(1)$ $(\nu \to \infty)$, что влечет противоречие между условиями (3) и (5). Из условия (6) следует существование подпоследовательности $(m_{k_{\nu_p}} - n_{k_{\nu_p}})$ $(p = 1, 2, \ldots)$, такой, что $\lim_{p \to \infty} (m_{k_{\nu_p}} - n_{k_{\nu_p}}) = +\infty$ **(7)**. Так как $\lim_{p \to \infty} S_{n_{k_{\nu_p}}} = +\infty$ и $S_n \in [S_{n_{k_{\nu_n}}} - 2 - r_1; +\infty)$ для $n_{k_{\nu_p}} \leqslant n \leqslant m_{k_{\nu_p}}$ $(p = 1, 2, \ldots)$, то отсюда и из условия (7) следует, что бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является бесконечно удаленной (d)-точкой последовательности $S = \{S_n\}$. Это противоречит теореме 1. Поэтому $S_{n_k} \leqslant M_1$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Аналогично доказывается, что условия (4) и $S_n = 0(F_A)$ $(n \to \infty)$ влекут неравенство $S_{n_k} \geqslant -M_2$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Первая часть теоремы доказана.

Предположим, что выполняются условия (3) и $\lim_{n \to \infty} S_n = L$ (F_A). Допустим, что $\varlimsup_{k \to \infty} S_{n_k} = L_1 > L + r$. Будем предполагать, что последовательность $S = \{S_n\}$ расходится, $\lim_{\nu \to \infty} S_{n_{k_\nu}} = L_1$ и $S_{n_{k_\nu}} \geqslant L_1 - \frac{\varepsilon}{2}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, где $0 < \varepsilon \leqslant \frac{L_1 - L - r_1}{2}$. В силу теоремы Кноппа о ядрах последовательностей действительных чисел [2] имеем $\varliminf_{n \to \infty} S_n \leqslant L \leqslant \varlimsup_{n \to \infty} S_n$. В таком случае $\varliminf_{n \to \infty} S_n \leqslant L < L_1 - r_1$. Поэтому найдется первый после $S_{n_{k_\nu}}$ член $S_{m_\nu+1}$ последовательности $S = \{S_n\}$ такой, что $S_{m_\nu+1} < L_1 - r_1 - \varepsilon$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, где $0 < \varepsilon \leqslant \frac{L_1 - L - r_1}{2}$.

Нетрудно заметить, что $\overline{\lim\limits_{\nu \to \infty}}(m_\nu - n_{k_\nu}) = +\infty$ и, стало быть, $\lim\limits_{p \to \infty}(m_{\nu_p} - n_{k_{\nu_p}}) = +\infty$. Так как $S_n \in [L_1 - r_1 - \varepsilon; \ +\infty)$ для $m_{\nu_p} \geqslant n \geqslant n_{k_{\nu_p}}$ $(p = 1, 2, \ldots)$, то отсюда и из условия (8) следует, что множество $[L_1 - r_1; +\infty)$ является (d)-множеством последовательности $S = \{S_n\}$. Но тогда по теореме 1 получаем: $L \in [L_1 - - r_1; +\infty)$. Это противоречит неравенству $L_1 - r_1 > L$, и поэтому $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} S_{n_k} \leqslant L + r_1$. Аналогично доказывается, что из условий (4) и $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = L(F_A)$ следует неравенство $\underline{\lim\limits_{k \to \infty}} S_{n_k} \geqslant L - r_2$. Теорема доказана.

3. Пусть для регулярной положительной нижней треугольной матрицы A $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = L(A)$ влечет $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = L(F_A)$. В этом случае условия, которым удовлетворяет последовательность $S = \{S_n\}$, в вышеприведенных теоремах будут тауберовыми при предположении $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = L(A)$. К таким матрицам, например, принадлежат матрицы типа D [5], матрицы Сильвермана — Сасса [7], а также матрицы, рассмотренные в работе [8].

Список литературы: 1. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. — М.: Физматгиз, 1960, с. 72—111. 2. *Харди Г.* Расходящиеся ряды.— М.: Изд-во иностр. лит., 1951, с. 74. 3. *Лоренти Г. Г.* Абсолютная сходимость. — Учен. записки Ленингр. гос. ун-та. Сер. математики, 1941, **12**, с. 30—41. 4. *Lopentz G. G.* A contribution to the theory of divergent seguences. — Acta math., 1948, **80**, с. 167—190. 5. *Билоцкий Н. Н.* Матричные методы суммирования рядов, равномерно транслятивные справа и одно их свойство. — Укр. мат. журн. 1978, **30**, № 5, с. 586—594. 6. *Siddigi I. A.* Infinite matrices summing every almost periodic sequences. — Pacific I. Math, 1971, **39**, № 1, с. 235—251. 7. *Silverman D. L.* Szass O. On a class of Nörlund matrices. — Ann. Math, 1944, **45**, с. 347—357. 8. *Borwein D.* Nörlund methods of summability associatted with polynomials. Proc. Edinburgh. — Math SOC., 1960. **12**, с. 7—15.

Поступила в редколлегию 25.06.76.