УДК 513.882

И. М. СПИТКОВСКИЙ

О БЛОЧНОЙ СТРУКТУРЕ J-УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть H — некоторое J-пространство, т. е. гильбертово пространство, в котором наряду с обычным скалярным произведением (f, g) задано индефинитное скалярное произведение $[f, g] = (Jf, g)$, где $J = P_+ - P_-$, P_+ и P_- — дополнительные ортопроекторы. Если положить $H_\pm = P_\pm H$, то пространство H представится в виде ортогональной (и одновременно J-ортогональной) суммы H_+ и H_-.

Для всякого линейного ограниченного оператора A, действующего в H, условие $[Af, g] = [f, A^+g]$ $(f, g \in H)$ однозначно определяет оператор A^+. При этом, очевидно, $A^+ = JA^*J$.

Оператор T называется J-эрмитовым, если $T^+ = T$, т. е. если оператор JT эрмитов. Если $JT \geqslant 0$, оператор T называется J-неотрицательным. Оператор u называется J-унитарным, если он обратим и $u^{-1} = u^+$.

В настоящей работе изучаются некоторые свойства J-унитарных и J-неотрицательных операторов.

Пункт 1 носит вспомогательный характер. В нем получен критерий регулярности J-спектральной функции J-неотрицательного оператора. В пунктах 2 и 3 рассматривается задача восстановления J-унитарного оператора по двум его блокам. Применение результатов пункта 1 позволило при некоторых дополнительных ограничениях установить необходимые и достаточные условия разрешимости этой задачи и общий вид решения.

1. В работе М. Г. Крейна и Г. К. Лангера [1] было получено спектральное разложение J-неотрицательного оператора: $T = S + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)$, где

I. $E(\lambda)$ — J-ортопроектор $(\lambda \neq 0)$;

II. $E(\lambda)E(\mu) = E(\lambda)$ при $\lambda\mu \neq 0$, $\lambda < \mu$;

III. $E(\lambda - 0) = E(\lambda)$ $(\lambda \neq 0)$;

IV. $E(\lambda) = 0$ в некоторой окрестности $-\infty$; $E(\lambda) = I$ в некоторой окрестности $+\infty$;

V. При $\lambda < 0$ подпространство $\operatorname{Im} E(\lambda)$ равномерно отрицательно, при $\lambda > 0$ подпространство $\operatorname{Ker} E(\lambda)$ равномерно положительно;

VI. S — J-неотрицательный оператор;

VII. $S^2 = 0$;

VIII. $SE(\lambda) = E(\lambda)S = \begin{cases} 0 \text{ при } \lambda < 0, \\ S \text{ при } \lambda > 0. \end{cases}$

J-спектральная функция $E(\lambda)$ называется регулярной, если существуют сильные пределы $E(-0)$ и $E(+0)$. Если J-спектральная функция регулярна, то:

IX. $T(E(+0)-E(-0))=(E(+0)-E(-0))T=S$;

X. Подпространство $\mathrm{Jm}\, E(-0)$ равномерно отрицательно, $\mathrm{Ker}\, E(+0)$ равномерно положительно.

Ниже важную роль играет класс J-неотрицательных операторов, которые можно получить следующим образом: разобьем $H_+ (H_-)$ в ортогональную сумму трех слагаемых L_1^+, L_0^+ и N^+ ($L_1^{(-)}$, $L_0^{(-)}$ и $N^{(-)}$ так, чтобы $\dim N^{(+)}=\dim N^{(-)}$).

Пусть ψ — изометрический оператор, отображающий $N^{(+)}$ на $N^{(-)}$; T_+, T_- и K — самосопряженные инъективные неотрицательные операторы, действующие в подпространствах $L_1^{(+)}$, $L_1^{(-)}$ и $N^{(+)}$ соответственно. Тогда оператор T_0, матрица которого относительно разложения $H=L_1^{(+)}\oplus L_0^{(+)}\oplus N^{(+)}\oplus N^{(-)}\oplus L_0^{(-)}\oplus L_1^{(-)}$ имеет вид

$$T_0=\begin{pmatrix} T_+ & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & K & -K\psi^* & & \\ & & \psi K & -\psi K\psi^* & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & -T_- \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

является J-неотрицательным оператором в пространстве H.

J-неотрицательные операторы, которые можно получить таким образом, назовем каноническими.

Теорема 1. *J-спектральная функция J-неотрицательного оператора T регулярна тогда и только тогда, когда T J-унитарно эквивалентен каноническому J-неотрицательному оператору.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть J-спектральная функция $E(\lambda)$ оператора T регулярна. Положим $H_1^{(-)}=\mathrm{Im}\, E(-0)$, $H_1^{(+)}=\mathrm{Ker}\, E(+0)$; $H_0=\mathrm{Jm}\,(E(+0)-E(-0))$.

В силу свойства X спектрального разложения, подпространство $H_1^{(+)}$ ($H_1^{(-)}$) равномерно положительно (равномерно отрицательно). Подпространство H_0 правильно, поскольку его J-ортогональное дополнение $H_1^{(+)}\dot{+}H_1^{(-)}$ является одновременно его прямым дополнением. Поэтому H_0 представимо в виде одновременно ортогональной и J-ортогональной суммы равномерно положительного подпространства $H_0^{(+)}$ и равномерно отрицательного $H_0^{(-)}$ [2]. Тогда $H=H^{(+)}\dot{+}H^{(-)}$, где $H^{(\pm)}=H_1^{(\pm)}\dot{+}H_0^{(\pm)}$ — максимальные подпространства H, равномерно положительное и отрицательное соответственно. Пусть u — J-унитарный оператор, отображающий $H^{(\pm)}$ на $H_\pm$. Рассмотрим оператор $T_0=uTu^{-1}$. Из построения вытекает, что подпространства $uH_1^{(\pm)}\subset H_\pm$ инвариантны относительно T_0. Сужения T_0 на эти подпространства самосопряжены (в силу J-

эрмитовости T_0). Поэтому $uH_1^{(\pm)}$ разлагается в ортогональную сумму подпространств $\operatorname{Ker}\left(T_0/_{uH_1^{(+)}}\right)$ и $\operatorname{Im}\left(T_0/_{uH_1^{(\pm)}}\right)$.

Этим ортогональным разложениям отвечают представления операторов $T_0/_{uH_1^{(+)}}$ и $T_0/_{uH_1^{(-)}}$ соответственно в виде матриц

$$\begin{pmatrix} T_+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -T_- \end{pmatrix},$$

где $T_\pm$ — инъективные самосопряженные операторы. Из J-неотрицательности T_0 вытекает неотрицательность операторов T_+ и T_-. Свойство IX спектрального разложения означает, что сужения операторов T_0 и uSu^{-1} на подпространство uH_0 совпадают. Разложению $uH_0 = H_0^{(+)} \dotplus uH_0^{(-)}$ отвечает представление оператора $T_0/_{uH_0}$ в виде $\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$.

Свойства VI—VII спектрального разложения приводят к выводам:

$$T_{11} \geqslant 0; \quad T_{22} \leqslant 0, \tag{2}$$

$$T_{12}^* = -T_{21}; \tag{3}$$

$$T_{11}^2 = T_{21}^* T_{21}; \tag{4}$$

$$T_{22}^2 = T_{12}^* T_{12}; \tag{5}$$

$$T_{11}T_{12} + T_{12}T_{22} = 0. \tag{6}$$

Из (4) и (5) заключаем: $\operatorname{Ker} T_{11} = \operatorname{Ker} T_{21}$; $\operatorname{Ker} T_{22} = \operatorname{Ker} T_{12}$. Переходя в этих равенствах к ортогональным дополнениям до $uH_0^{(+)}$ и $uH_0^{(-)}$ соответственно и учитывая (3), имеем $\overline{\operatorname{Im} T_{11}} = \overline{\operatorname{Im} T_{12}}$; $\overline{\operatorname{Im} T_{22}} = \overline{\operatorname{Im} T_{21}}$. Поэтому разложению $uH_0 = \operatorname{Ker} T_{11} \oplus \overline{\operatorname{Im} T_{11}} \oplus \overline{\operatorname{Im} T_{22}} \oplus \operatorname{Ker} T_{22}$ отвечает представление оператора $T_0/_{uH_0}$:

$$T_0/_{uH_0} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & K_{11} & K_{12} & \\ & K_{21} & K_{22} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь K_{ij} — инъективные операторы. Условия (2)—(6) остаются в силе при замене T_{ij} на K_{ij}. Используя аппарат полярного представления [3], из (4), (5) и (3) заключаем, что

$$K_{11}^2 = \varphi^* K_{22}^2 \varphi, \tag{7}$$

где φ изометрически отображает $\overline{\operatorname{Im} T_{11}}$ на $\overline{\operatorname{Im} T_{22}}$. В частности, $\dim \overline{\operatorname{Im} T_{11}} = \dim \overline{\operatorname{Im} T_{22}}$.

Извлекая из обеих частей соотношения (7) квадратный корень, с учетом (2) получаем: $K_{22} = -\varphi K \varphi^*$, где для сокращения положено $K_{11} = K$. В силу (4) $K_{21} = \psi K$, ψ изометрически отображает $\overline{\operatorname{Im} T_{11}}$ на $\overline{\operatorname{Im} T_{22}}$. Из (3) $K_{12} = -K\psi^*$.

Условие (5) равносильно тому, что оператор $\varphi^*\psi$ коммутирует с K^2, а значит, и с K. Отсюда $K_{22} = -\varphi K\varphi^* = -\psi K\psi^*$. Условие (6) вытекает из найденных выше соотношений. Если положить $L_0^{(\pm)} = \overline{\operatorname{Ker}\left(T_0/_{uH_1^{(\pm)}}\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(T_0/_{uH_0^{(\pm)}}\right)}$; $L_1^{(\pm)} = \overline{uTH_1^{(\pm)}}$; $N^{(\pm)} = \overline{uTH_0^{(\pm)}}$, то станет непосредственно видно, что оператор T_0-канонический, J-неотрицательный.

Достаточность. Пусть J-неотрицательный оператор T_0 J-унитарноэквивалентен каноническому J-неотрицательному оператору T_0: $T = u^{-1}T_0u$, где T_0 определяется формулой (1). Положим

$$S = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & K & -K\psi^* & & \\ & & \psi K & -\psi K\psi^* & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $T_0 - S$ — оператор, эрмитов и J-эрмитов одновременно. В работе М. Г. Крейна и Ю. Л. Шмульяна [4] доказано, что J-спектральная функция такого оператора регулярна, причем можно считать $E(-0)$ и $I - E(+0)$ ортопроекторами на $\overline{\operatorname{Im} T_-}$ и $\overline{\operatorname{Im} T_+}$ соответственно. Для введенного выше оператора S и спектральной функции $E(\lambda)$ справедливы свойства VI—VIII спектрального разложения. Значит, спектральную функцию оператора $T_0 - S$ можно рассматривать как таковую для оператора T_0. Отсюда следует, что спектральная функция оператора T_0 (а значит, и T) регулярна. Теорема доказана.

В конечномерном случае J-спектральная функция любого J-неотрицательного оператора регулярна. Поэтому теорема 1 дает описание всех J-неотрицательных матриц, которое было получено ранее В. П. Потаповым [5].

2. Пусть L_1 — подпространство H_+, $L_2 = H \ominus L_1$, $A_{ii}: L_i \to L_i$ — линейные ограниченные операторы ($i = 1, 2$). Расширением пары $\{A_{11}, A_{22}\}$ будем называть всякий линейный ограниченный оператор $A: H \to H$, матрица которого относительно разложения $H = L_1 \oplus L_2$ есть

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Нас будут интересовать J-унитарные расширения.

Подпространство L_1 приводит оператор J, причем $J/_{L_1} = I$. Обозначив $J/_{L_2} = J_0$, получим условие J-унитарности оператора A в виде системы уравнений:

$$A_{11}A_{11}^* + A_{12}J_0/A_{12}^* = I; \tag{8}$$
$$A_{21}A_{21}^* + A_{22}J_0A_{22}^* = J_0; \tag{9}$$

$$A_{21}A_{11}^* + A_{22}J_0A_{12}^* = 0; \tag{10}$$

$$A_{11}^*A_{11} + A_{21}^*J_0A_{21} = I; \tag{8'}$$

$$A_{12}^*A_{12} + A_{22}^*J_0A_{22} = J_0; \tag{9'}$$

$$A_{12}^*A_{11} + A_{22}^*J_0A_{21} = 0. \tag{10'}$$

Если пара $\{A_{11}, A_2\}$ допускает J-унитарное расширение, то из (9) и (9′) заключаем, что $A_{22}J_0A_{22}^* \leqslant J_0$ и $A_{22}^*J_0A_{22} \leqslant J_0$, т. е. A_{22} — дважды J_0-нерастягивающий оператор. Следовательно, оператор $I - A_{22}^*J_0A_{22}J_0$ J_0-неотрицателен и, значит, допускает J_0-спектральное разложение:

$$A_{22}^*J_0A_{22}J_0 = I - S - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE(\lambda). \tag{11}$$

Для оператора $A_{11}A_{11}^*$ справедливо обычное спектральное разложение, которое мы из соображений удобства запишем в виде

$$A_{11}A_{11}^* = I - \int\limits_{-\infty}^{1} \lambda\, dD(\lambda). \tag{12}$$

Умножая (10) слева на $A_{22}^*J_0$, а (10′) справа на A_{11}^*, получим: $A_{22}^*J_0A_{22}J_0A_{12}^* = A_{12}^*A_{11}A_{11}^*$.

Пусть λ — произвольное отрицательное число. Используя интегральное представление $E(\lambda)$ (см. [4]), получим отсюда: $E(\lambda)A_{12}^* = -\frac{1}{2\pi i}\, v.p. \int\limits_{\gamma} ((1-\xi)I - A_{22}^*J_0A_{22}J_0)^{-1} A_{12}^*\, d\xi = -\frac{1}{2\pi i}\, v.p. \int\limits_{\gamma} A_{12}^*((1-\xi)I - A_{11}A_{11}^*)^{-1}\, d\xi = A_{12}^*D(\lambda)$. Здесь γ — замкнутый гладкий контур, пересекающий действительную ось ровно в двух точках: $\mu < -\| I - A_{22}^*J_0A_{22}J_0 \|$ и λ. Доказанное равенство означает, что A_{12}^* переводит $D(\lambda)L_1$ в $E(\lambda)L_2$. Аналогично, $A_{22}J_0$ переводит $E(\lambda)L_2$ в $D(\lambda)L_1$. В силу (8)

$$A_{22}J_0A_{12}^* = I - A_{11}A_{11}^*, \tag{13}$$

так что оператор $A_{12}J_0A_{12}^*$ осуществляет биективное преобразование $D(\lambda)L_1$. Из (9′):

$$A_{12}^*A_{12}J_0 = I - A_{22}^*J_0A_{22}J_0, \tag{13'}$$

так что оператор $A_{12}^*A_{12}J_0$ осуществляет биективное преобразование $E(\lambda)L_2$. Следовательно, каждое из отображений $A_{12}^*: D(\lambda)L_1 \to E(\lambda)L_2$; $A_{12}J_0: E(\lambda)L_2 \to D(\lambda)L_1$ биективно.

Подпространство $E(\lambda)L_2$ равномерно отрицательно, так что перенормировка $(f, g)_2 = -[f, g]$ превращает его в гильбертово пространство $H(\lambda)$. Применяя к оператору $A_{12}^*: D(\lambda)L_1 \to H(\lambda)$

аппарат полярного представления, получим, что $A_{12}^*A_{12}J_0/_{H(\lambda)}$ и $A_{12}J_0A_{12}^*/_{D(\lambda)L_1}$ унитарно подобны. Из (13) и (13′) заключаем: $A_{11}A_{11}^*/_{D(\lambda)L_1}$ и $A_{22}^*J_0A_{22}J_0/_{H(\lambda)}$ унитарно подобны. Возвращаясь к начальной нормировке $E(\lambda)L_2$, получим: при любом $\lambda<0$ подобны операторы

$$A_{11}A_{11}^*/_{\operatorname{Im}D(\lambda)} \text{ и } A_{22}^*J_0A_{22}J_0/_{\operatorname{Im}E(\lambda)}. \tag{14}$$

Аналогично доказывается, что при любом $\lambda>0$ подобны операторы

$$A_{11}A_{11}^*/_{\operatorname{Ker}D(\lambda)} \text{ и } A_{22}^*J_0A_{22}J_0/_{\operatorname{Ker}E(\lambda)}. \tag{14′}$$

В частности, спектры операторов $A_{22}^*J_0A_{22}J_0$ и $A_{11}A_{11}^*$ могут отличаться лишь точкой 1. Поскольку спектр $A_{11}A_{11}^*$ неотрицателен, отсюда вытекает неотрицательность спектра $A_{22}^*J_0A_{22}J_0$, что, однако, покрывается результатом Ю. П. Гинзбурга [6]. В связи с этим в формуле (11) верхний предел интегрирования можно заменить на 1.

Исходя из равенства $A_{21}A_{11}^*A_{11}=A_{22}J_0A_{22}^*J_0A_{21}$, также являющегося следствием (10) и (10′), можно доказать, что при любом $\lambda<0$ подобны операторы $A_{11}^*A_{11}/_{\operatorname{Im}D_1(\lambda)}$ и $A_{22}J_0A_{22}^*J_0/_{\operatorname{Im}E_1(\lambda)}$, а при любом $\lambda>0$ подобны операторы $A_{11}^*A_{11}/_{\operatorname{Ker}D_1(\lambda)}$ и $A_{22}J_0A_{22}^*J_0/_{\operatorname{Ker}E_1(\lambda)}$. Здесь $D_1(\lambda)$ и $E_1(\lambda)$ — спектральные функции операторов $I-A_{11}^*A_{11}$ и $I-A_{22}J_0A_{22}^*J_0$ соответственно.

Но оператор A_{22}, будучи дважды J_0-нерастягивающим, допускает J_0-полярное представление [4], из которого вытекает, что операторы $A_{22}^*J_0A_{22}J_0/_{\operatorname{Ker}E(1+0)}$ и $A_{22}J_0A_{22}^*J_0/_{\operatorname{Ker}E_2(1+0)}$, $A_{22}^*J_0A_{22}J_0/_{\operatorname{Im}E(1)}$ и $A_{22}J_0A_{22}^*J_0/_{\operatorname{Im}E_1(1)}$ подобны. Из полярного представления A_{11} заключаем [3]: операторы $A_{11}A_{11}^*/_{\operatorname{Ker}D(1+0)}$ и $A_{11}^*A_{11}/_{\operatorname{Ker}D_1(1+0)}$, $A_{11}A_{11}^*/_{\operatorname{Im}D(1)}$ и $A_{11}^*A_{11}/_{\operatorname{Im}D_1(1)}$ подобны. Поэтому если выполнены условия (14) и (14′), то полученные выше ограничения на $A_{11}^*A_{11}$ и $A_{22}J_0A_{22}^*J_0$ сводятся к следующему: $\dim\operatorname{Ker}(A_{11}^*A_{11})=$ $=\dim\operatorname{Ker}(A_{22}J_0A_{22}^*J_0)$. Но $\operatorname{Ker}(A_{22}^*A_{11})=\operatorname{Ker}A_{11}$, а, как показано в [6], для дважды J_0-нерастягивающего оператора A_{22} справедливо равенство $\dim\operatorname{Ker}(A_{22}J_0A_{22}^*J_0)=\dim\operatorname{Ker}A_{22}^*$.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Для существования у пары $\{A_{11}, A_{22}\}$ J-унитарного расширения необходимы следующие условия:*

1) $\dim\operatorname{Ker}A_{11}=\dim\operatorname{Ker}A_{22}^*$;

2) A_{22} — *дважды J_0-нерастягивающий оператор;*

3) *при любом $\lambda<0$ подобны операторы $A_{11}A_{11}^*/_{\operatorname{Im}D(\lambda)}$ и $A_{22}^*J_0A_{22}J_0/_{\operatorname{Im}E(\lambda)}$, а при любом $\lambda>0$ — операторы $A_{11}A_{11}^*/_{\operatorname{Ker}D(\lambda)}$ и* $A_{22}^*J_0A_{22}J_0/\operatorname{Ker}E(\lambda)$. Здесь $E(\lambda)$ и $D(\lambda)$ — спектральные функции, фигурирующие в (11) и (12) соответственно.

3. Пусть спектральная функция, фигурирующая в представлении (11), регулярна. Используя результат теоремы 1, получим:

$$VA_{22}^{*}J_0A_{22}J_0V^{-1}=\begin{pmatrix}\Lambda^2 &&&&& \\ & I &&&& \\ && I-K & K\psi^* && \\ && -\psi K & I+\psi KK\psi^* && \\ &&&& I & \\ &&&&& \mathrm{M}^2\end{pmatrix}, \qquad (15)$$

где V — некоторый J_0-унитарный оператор; Λ, M и K — самосопряженные операторы,

$$0\leqslant\Lambda\leqslant I,\ \mathrm{M}\geqslant I,\ K\geqslant 0, \qquad (16)$$

причем 0 не является собственным числом K, а 1 — собственным числом Λ и M. Возможность представления $I-T_+$ в виде Λ^2 вытекает из его неотрицательности, а та, в свою очередь, из неотрицательности спектра оператора $A_{22}^{*}J_0A_{22}J_0$. Оператор ψ изометрически вкладывает $\overline{\operatorname{Im}K}$ в подпространство H_-.

Теорема 3. *Пусть A_{22} — дважды J_0-нерастягивающий оператор, причем J_0-спектральная функция $E(\lambda)$ оператора $I-A_{22}^{*}J_0A_{22}J_0$ регулярна. Тогда для существования у пары $\{A_{11}, A_{22}\}$ J-унитарного расширения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) $\dim\operatorname{Ker}A_{11}=\dim\operatorname{Ker}A_{22}^{*}$;

2) $\dim\operatorname{Im}K\leqslant\dim\operatorname{Ker}(I-A_{11}A_{11}^{*})$;

3) *подобны операторы* $A_{11}A_{11}^{*}/_{\operatorname{Im}D(-0)}$ *и* $A_{22}J_0A_{22}J_0/_{\operatorname{Im}E(-0)}$; $A_{11}A_{11}^{*}/_{\operatorname{Ker}D(+0)}$ *и* $A_{22}^{*}J_0A_{22}J_0/_{\operatorname{Ker}E(+0)}$.

Доказательство. Необходимость условия 1) доказана в теореме 2, необходимость условия 3) доказывается так же, как необходимость условия 3) в теореме 2.

Пусть теперь условия 1) и 3) выполнены. J-унитарность оператора A равносильна J-унитарности оператора

$$\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & V_1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & V^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11} & \tilde{A}_{12}\\ \tilde{A}_{21} & A_{22}\end{pmatrix},$$

где оператор V тот же, что в (15), а V_1 играет аналогичную роль для $A_{22}J_0A_{22}^{*}J_0$.

Пусть $E(\lambda)$ — J_0-спектральная функция оператора $I-\tilde{A}_{22}^{*}J_0\tilde{A}_{22}J_0=I-VA_{22}^{*}J_0A_{22}J_0V^{-1}$. Методом, использованным в теореме 2, доказывается, что $\tilde{A}_{12}^{*}$ осуществляет биективное соответствие между $\operatorname{Im}D(-0)$ и $\operatorname{Im}\tilde{E}(-0)$, $\operatorname{Ker}D(+0)$ и $\operatorname{Ker}\tilde{E}(+0)$, а $\operatorname{Im}(D(+0)-D(-0))$ переводит в $\operatorname{Im}(\tilde{E}(+0)-\tilde{E}(-0))$. Отсюда и из аналогичных соображений относительно оператора $\check{A}_{21}$, спектральных функций $D_1(\lambda)$ оператора $I - A_{11}^* A_{11}$ и $\tilde{E}_1(\lambda)$-оператора $I - \tilde{A}_{22} J_0 \tilde{A}_{22}^* J_0$ ясно, что задача J-унитарного расширения пары $\{A_{11}, A_{22}\}$ сводится к построению трех сохраняющих индефинитное скалярное произведение операторов:

а) оператора A_1 из $N_1 = \operatorname{Im} D_1(-0) \oplus \operatorname{Im} \tilde{E}(-0)$, на $\operatorname{Im} D(-0) \oplus \oplus \operatorname{Im} \tilde{E}_1(-0)$;

б) оператора $\tilde{A}_2$ из $N_2 = \operatorname{Ker} D_1(+0) \oplus \operatorname{Ker} \tilde{E}(+0)$, на $\operatorname{Ker} D(+0) \oplus \operatorname{Ker} \tilde{E}_1(+0)$;

в) оператора A_3 из $N_3 = \operatorname{Im}(D_1(+0) - D_1(-0)) \oplus \operatorname{Im}(\tilde{E}(+0) - \tilde{E}(-0))$, на $\operatorname{Im}(D(+0) - D(-0)) \oplus \operatorname{Im}(\tilde{E}_1(+0) - \tilde{E}_1(-0))$. При этом оператор A_j должен быть расширением пары, $\{A_{11}|_{L_1 \cap N_j}, A_{22} J_0|_{L_2 \cap N_j}\}$, $j = 1, 2, 3$. Поскольку $J_0|_{\operatorname{Ker}\tilde{E}(+0)} = I$, задача б) есть задача об унитарном расширении, и ее разрешимость при условиях 1) и 3) вытекает из теоремы 1 работы [7]. Там же указан общий вид решения. Далее, $J_0|_{\operatorname{Im}\tilde{E}(-0)} = -I$, так что задача а) есть частный случай задачи о J-унитарном расширении, разрешимость и общий вид решения которой устанавливается как в теореме 2 из [7]. Остается рассмотреть задачу в). Решая для нее систему (8) — (10′), находим, что сужение $\tilde{A}_{12}^*$ на $\operatorname{Im}(D(+0) - D(-0))$ имеет вид $\begin{pmatrix} X \\ \psi X \end{pmatrix}$, где X — некий оператор, действующий из $\operatorname{Im}(D(+0) - D(-0))$ в $\overline{\operatorname{Im} K}$, а сужение оператора $\tilde{A}_{21}$ на $\operatorname{Im}(D_1(+0) - D_1(-0))$ однозначно определяется по X. При этом для J-унитарности оператора A_3 необходимо и достаточно, чтобы $XX^* = K$.

Последнее уравнение, в свою очередь, разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие 2) теоремы. Тем самым доказана необходимость условия 2) и достаточность системы условий 1) — 3).

Следствие. *J-унитарное расширение пары матриц $\{A_{11}, A_{22}\}$ существует тогда и только тогда, когда*

1) $A_{22}^* J_0 A_{22} \leqslant J_0$;

2) *равенство в 1) имеет место по крайней мере на подпространстве размерности $n - m$ (где m и n — порядок матриц A_{11} и A_{22} соответственно);*

3) *каждое отличное от 1 собственное число одной из матриц $A_{11} A_{11}^*$ и $A_{22}^* J_0 A_{22} J_0$ является собственным числом другой, притом той же кратности.*

Теорема 4. *Пусть пара $\{A_{11}, A_{22}\}$ допускает J-унитарное расширение, причем J_0-спектральная функция оператора $I - A_{22}^* J_0 A_{22} J_0$* регулярна. *Тогда образы операторов A_{11} и A_{22} замкнуты лишь одновременно.*

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$R = V^* J_0 \begin{pmatrix} \Lambda & & & & \\ & I & & & \\ & & I - \frac{1}{2} Z & & \\ & & & I & \\ & & & & \mathrm{M} \end{pmatrix} V J_0,$$

где

$$Z = \begin{pmatrix} K & -K\psi^* \\ \psi K & -\psi K \psi^* \end{pmatrix},$$

а Λ, M, K, ψ и V — те же, что в (15). Спектр оператора R неотрицателен. Действительно, из нильпотентности Z и теоремы об отображении спектров заключаем: $\sigma(R) \cup \{1\} = \sigma(\Lambda) \cup \sigma(\mathrm{M}) \cup \{1\}$. Неотрицательность же $\sigma(\Lambda)$ и $\sigma(\mathrm{M})$ вытекает из неравенств (16).

Непосредственные вычисления показывают, что $R^2 = J_0 A_{22}^* J_0 A_{22}$. Из самосопряженности Λ вытекает, что $\operatorname{Ker} \Lambda = \operatorname{Ker} \Lambda^2$. Операторы $I - \frac{1}{2} Z$ и M обратимы, так что их ядра и ядра их квадратов тривиальны. Следовательно, ядро оператора

$$B = \begin{pmatrix} \Lambda & & & & \\ & I & & & \\ & & I - \frac{1}{2} Z & & \\ & & & I & \\ & & & & \mathrm{M} \end{pmatrix}$$

совпадает с ядром его квадрата и, значит, $\operatorname{Ker} R = \operatorname{Ker} R^2$.

Таким образом, R является J_0-модулем оператора A_{22} (см. [4]). По теореме 2, оператор A_{22} дважды J_0-нерастягивающий, и потому допускает J_0-полярное представление: $A_{22} = WR$. При этом $R = W^+ A_{22}$.

Из последних двух равенств вытекает, что линеалы $\operatorname{Im} A_{22}$ и $\operatorname{Im} R$ замкнуты лишь одновременно. В свою очередь, $\operatorname{Im} R$ замкнут лишь одновременно с $\operatorname{Im} B$, замкнутость которого, как нетрудно видеть, равносильна замкнутости $\operatorname{Im} \Lambda$ и $\operatorname{Im} \mathrm{M}$.

Пользуясь условием 3) теоремы 3 (оно выполнено, поскольку пара $\{A_{11}, A_{22}\}$ допускает J-унитарное расширение), находим, что замкнутость $\operatorname{Im} \Lambda$ и $\operatorname{Im} \mathrm{M}$ есть необходимое и достаточное условие замкнутости образа оператора $\sqrt{A_{11} A_{11}^*}$, которая, как следует из полярного представления A_{11}, равносильна замкнутости образа оператора A_{11}. Теорема доказана. Утверждение теоремы в случае, когда $J_0 = I$ либо $J_0 = -I$, было получено автором ранее [7].

В заключение приведем пример J-унитарного оператора A, для которого J_0-спектральная функция оператора $I - A_{22}^* J_0 A_{22} J_0$ нерегулярна.

Пусть H_0 — J_0-пространство, T_0 — J_0 неотрицательный оператор в H_0, спектр которого расположен на сегменте $[a, b]$, $a \leqslant 0 < b < 1$, а J_0-спектральная функция нерегулярна.

Спектр оператора $T_1 = \sqrt{T_0 J_0} J_0 \sqrt{T_0 J_0}$ с точностью до точки 0 совпадает со спектром T_0 и, значит, также заключен на сегменте $[a, b]$. Если $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность многочленов с вещественными коэффициентами, равномерно сходящаяся в окрестности сегмента $[a, b]$ к функции $\sqrt{1-x}$, то последовательности $p_k(T_0)$ и $p_k(T_1)$ также равномерно сходятся [8]. Положим $R_1 = \lim_{k\to\infty} p_k(T_1)$; $R_2 = J_0 \lim_{k\to\infty} p_k(T_0) J_0$. Тогда $R_1 = R_1^*$; $J_0 R_2^* = R_2 J_0$; $R_1^2 = I - T_1$; $R_2 J_0 R_2^* = J_0 - J_0 T_0$; $J_0 \sqrt{T_0 J_0} R_1 = R_2 J_0 \sqrt{T_0 J_0}$.

Далее, пусть $H = H_0 \oplus H_0$, $J = I \oplus J_0$,

$$A = \begin{pmatrix} R_1 & \sqrt{T_0 J_0} \\ -J_0 \sqrt{T_0 J_0} & R_2 \end{pmatrix}.$$

Выведенные выше соотношения влекут J-унитарность оператора A. Вместе с тем оператор $I - A_{22}^* J_0 A_{22} J_0 = T_0$ обладает нерегулярной J_0-спектральной функцией.

Автор выражает глубокую благодарность М. Г. Крейну и Ю. Л. Шмульяну за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн М. Г., Лангер Г. К. Спектральная функция самосопряженного оператора в пространстве с индефенитной метрикой. — «Докл. АН СССР», 1963, т. 152, № 1, с. 39—42.
2. Гинзбург Ю П. О проектировании в гильбертовом пространстве с билинейной метрикой. — «Докл. АН СССР», 1961, т. 139, № 4, с. 775—778.
3. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., «Наука», 1965. 448 с.
4. Крейн М. Г., Шмульян Ю. Л. J-полярное представление плюс-операторов. — «Математические исследования», 1966, т. I, вып. 2, с. 172—210.
5. Потапов В. П. Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций. — «Труды Моск. мат. о-ва», 1955, т. 4, с. 125—236.
6. Гинзбург Ю. П. О J-нерастягивающих операторах в гильбертовом пространстве. — «Науч. зап. Одесск. пед. ин-та», 1958, т. 22, вып. 1, с. 13—20.
7. Спитковский И. М. О восстановлении унитарного оператора по двум его диагональным блокам. — «Математические исследованиия», 1973, т. 8. вып. 4, с. 187—193.
8. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М., ИЛ, 1962. 895 с.

Поступила 5 апреля 1974 г.