УДК 513.88

Е. М. РУССАКОВСКИЙ

ОПЕРАТОРНАЯ ТРАКТОВКА ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ, РАЦИОНАЛЬНО ВХОДЯЩИМ В ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ. I

В математической физике часто встречаются смешанные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных, в которых дифференцирование по времени входит в граничные условия. При решении таких задач методом Фурье разделения переменных или методом преобразования Лапласа возникают граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений со спектральным параметром, входящим в граничные условия.

В пространстве $L^2(0, 1)$ рассмотрим граничную задачу

$$l[u(x)] \equiv -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad x \in (0, 1);$$
$$P_i(\lambda)\, p(x)u'(x)|_{x=i} + Q_i(\lambda)\, u(x)|_{x=i} = 0 \ \ (i = 0,1), \qquad (1)$$

в которой $1/p(x)$ и $q(x)$ — вещественные суммируемые на отрезке $[0, 1]$ функции, $P_i(\lambda)$ и $Q_i(\lambda)$ — многочлены с вещественными коэффициентами от комплексного переменного λ $(i = 0,\ 1)$, причем выполняется условие

$$(\forall \lambda \in C) \mid P_i(\lambda) \mid + \mid Q_i(\lambda) \mid > 0 \quad (i = 0,\ 1), \tag{2}$$

называемое в дальнейшем условием невырожденности. Для задачи (1) особую роль играют вещественные рациональные функции

$$R_i(\lambda) = (-1)^{i+1} P_i(\lambda)/Q_i(\lambda) \quad (i = 0,\ 1). \tag{3}$$

Для задачи (1), рассматриваемой в пространстве $L^2(0,\ 1)$, естественным образом определим понятия собственного значения (с. з.), собственных и присоединенных (с. и п.) функций, отвечающих данному с. з., функции Грина, резольвенты, спектра (см. [1]).

Известно, что если спектральный параметр не входит в граничные условия, то задача (1) адекватна задаче на с. з. некоторого самосопряженного оператора, действующего в пространстве $L^2(0,1)$. При этом все с. з. простые вещественные присоединенные функции отсутствуют, система всех собственных функций задачи (1) полна и ортогональна в пространстве $L^2(0,\ 1)$.

Мы покажем, что если спектральный параметр рационально входит в граничные условия, то задача (1) адекватна задаче на с. з. некоторого оператора, действующего в конечномерном расширении пространства $L^2(0,\ 1)$. В этом расширении можно ввести скалярное произведение (вообще говоря, индефинитное), по отношению к которому этот оператор окажется самосопряженным. Таким образом, если не все многочлены $P_i(\lambda)$, $Q_i(\lambda)$ $(i = 0,1)$ сводятся к постоянным, то у задачи (1) могут появиться невещественные с. з., кратные вещественные и невещественные с. з. (см. ниже примеры); в случае кратных с. з. появляются присоединенные функции; с. и п. функции, отвечающие с. з. λ' и λ'', при $\lambda' \neq \lambda''$ уже не ортогональны в метрике $L^2(0,\ 1)$; система всех с. и п. функций в пространстве $L^2(0,1)$ полна, но не минимальна, даже ω — линейно зависима.

Отметим, что частные случаи задачи (1) рассматриваются в работах [2—5]. В работе [6] дается операторная трактовка задачи (1) в случае, когда дробно-линейная функция $R_i(\lambda)$ неванлинновская (т. е. отображает верхнюю полуплоскость в себя) $(i = 0,\ 1)$. В работах [7—9] рассматривается более общая граничная задача со спектральным параметром, входящим в граничные условия в виде аргумента неванлинновской функции довольно общего вида. Мы ограничиваемся здесь лишь случаем, когда спектральный параметр входит в граничные условия в виде аргумента вещественной рациональной функции, не налагая зато на эту функцию условий неванлинновости. В работах [7—11] высказаны предложения о расширении исходного пространства, в работах [8, 12]—замечания о возможной неминимальности системы всех с. и п. функций в пространстве $L^2(0,\ 1)$.

Основные результаты настоящей статьи изложены в заметке автора [13].

1. Обозначения и замечания

Обозначим наибольшую из степеней многочленов $P_i(\lambda)$ и $Q_i(\lambda)$ через $r(i)$ $(i=0, 1)$. Будем записывать многочлены $P_i(\lambda)$ и $Q_i(\lambda)$ в следующем виде: $P_i(\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{k=r(i)} a_{i,k}\lambda^k$, $Q_i(\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{k=r(i)} b_{i,k}\lambda^k$ $(i=0, 1)$. При $r(i)>0$ обозначим через $R(i)$ результант в форме Эйлера — Сильвестра [14, с. 419—420] многочленов $P_i(\lambda)$ и $Q_i(\lambda)$; в противном случае через $R(i)$ обозначим $\operatorname{sign}(|a_{i,0}|+|b_{i,0}|)$ $(i=0, 1)$. Заметим, что условие невырожденности (2) эквивалентно условию $R(i)\neq 0$ $(i=0, 1)$.

В дальнейшем для удобства изложения предположим, что $r(0)\,r(1)>0$; если $r(0)\,r(1)=0$, то соответствующие изменения в выкладках и рассуждениях очевидны.

Заметим, что в силу условия невырожденности (2) рациональная дробь $R_i(\lambda)$ несократима и имеет степень $r(i)$ $(i=0, 1)$. Если $R_i(\lambda)$ — правильная рациональная дробь, то через $s(i)$ обозначим индекс Коши функции $R_i(\lambda)$ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ (см. [15, с. 17]); в противном случае через $s(i)$ обозначим индекс Коши функции $-1/R_i(\lambda)$ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ $(i=0, 1)$. Заметим, что $s(i)=r(i)$ (соответственно $s(i)=-r(i)$) тогда и только тогда, когда рациональная функция $R_i(\lambda)$ неванлинновская (соответственно антиневанлинновская).

Выражение $p(x)\,u'(x)$ будем обозначать через $u^I(x)$, $u(x)\,|_{x=i}$ — через $u(i)$, $p(x)\,u'(x)\,|_{x=i}$ — через $u^I(i)$ $(i=0, 1)$.

Через $\varphi_i(x, \lambda)$ обозначим решение задачи Коши: $l[\varphi_i(x, \lambda)]=$ $=(\lambda\varphi_i(x, \lambda)$, $x\in(0, 1)$; $\varphi_i(i, \lambda)=P_i(\lambda)$; $\varphi_i^I(i, \lambda)=-Q_i(\lambda)$ $(i=$ $=0, 1)$, Функция $\varphi_i(x, \lambda)$ при каждом фиксированном $x\in[0, 1]$ является целой функцией от λ, притом тождественно не равной нулю (последнее — ввиду условия невырожденности (2)).

Обозначим через $\omega(\lambda)$ характеристический определитель задачи (1). Нетрудно проверить, что $\omega(\lambda)$ — целая функция от λ, $\omega(\lambda)\not\equiv$ $\not\equiv 0$, так что множество корней функции $\omega(\lambda)$ не более чем счетно, не имеет конечной предельной точки, кратность каждого корня функции $\omega(\lambda)$ конечна. Используя то, что граничные условия задачи (1) являются условиями типа Штурма, а также условие невырожденности (2), можно показать, что каждому с. з. $\tilde{\lambda}$ задачи (1) отвечает ровно одна цепочка, состоящая из собственной и присоединенных к ней функций, отвечающих данному с. з. $\tilde{\lambda}$, длина цепочки конечна и равна кратности $\tilde{\lambda}$ как корня целой функции $\omega(\lambda)$.

2. Пространство L

Рассмотрим линейное пространство L наборов из $1+r(0)+$ $+r(1)$ компонент: $\boldsymbol{u}=(u(x);\, u_0^1,\, u_0^2, \ldots,\, u_0^{r(0)};\, u_1^1,\, u_1^2, \ldots,\, u_1^{r(1)})$, у которых компонента $u(x)\in L^2(0, 1)$, а остальные компоненты —

комплексные числа. Через $\boldsymbol{u}\hat{}$ обозначим компоненту $u(x)$, через $\boldsymbol{u}_i\hat{}$ — вектор-строку $(u_i^1, u_i^2, \ldots, u_i^{r(i)})$, $(i = 0, 1)$. Линейные операции в $\boldsymbol{L}$ определим покомпонентно.

Пусть $l^0[u(x)] \equiv u(x)$, $l^k[u(x)] \equiv l[l^{k-1}[u(x)]]$ при целом $k \geqslant 1$, $l^k[u(i)] \equiv l^k[u(x)]|_{x=i}$ $(k \geqslant 0;\ i = 0, 1)$. Обозначим через M линеал в пространстве $L^2(0, 1)$, состоящий из всех функций $u(x) \in L^2(0, 1)$, абсолютно непрерывных вместе с $l^k[u(x)]$ и $l^k[u^I(x)]$ $(k = 0, 1, \ldots, \max(r(0), r(1)) - 1)$ на отрезке $[0, 1]$. Заметим, что все с. и п. функции задачи (1) содержатся в M. На линеале M зададим линейный оператор $\Omega: M \to \boldsymbol{L}$ равенством $\Omega u(x) = \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{v}\hat{} = u(x)$, $\boldsymbol{v}_i\hat{} = (l^0[a_{i,\,r(i)}u^I(i) + b_{i,\,r(i)}u(i)],\ l^0[a_{i,\,r(i)-1}u^I(i) + b_{i,\,r(i)-1}u(i)] + l^1[a_{i,\,r(i)}u^I(i) + b_{i,\,r(i)}u(i)], \ldots, l^0[a_{i,\,1}u^I(i) + b_{i,\,1} \times u(i)] + l^1[a_{i,\,2}u^I(i) + b_{i,\,2}u(i)] + \ldots + l^{r(i)-1}[a_{i,\,r(i)}u^I(i) + b_{i,\,r(i)} \times u(i)])$ $(i = 0, 1)$.

В пространстве $\boldsymbol{L}$ зададим линейный оператор $\boldsymbol{T}$ с областью определения $\boldsymbol{D_T}$: $\boldsymbol{D_T} = \{(u(x);\ u_0^1, u_0^2, \ldots, u_0^{r(0)};\ u_1^1, u_1^2, \ldots, u_1^{r(1)} \in \boldsymbol{L}$:

а) $u(x)$, $u^I(x)$ абсолютно непрерывны на отрезке $[0, 1]$, $l[u(x)] \in L^2(0, 1)$; (3)

б) $u_i^1 = a_{i,\,r(i)}u^I(i) + b_{i,\,r(i)}u(i)$ $(i = 0, 1)\}$.

Для вектора $\boldsymbol{u} = (u(x);\ u_0^1, u_0^2, \ldots u_0^{r(0)-1}, u_0^{r(0)};\ u_1^1, u_1^2, \ldots, u_1^{r(1)-1}, u^{r(1)}) \in \boldsymbol{D_T}$ положим, по определению, $\boldsymbol{Tu} = \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{v}\hat{} = l[u(x)]$, $\boldsymbol{v}_i\hat{} = (u_i^2 - a_{i,\,r(i)-1}u^I(i) - b_{i,\,r(i)-1}u(i),\ u_i^3 - a_{i,\,r(i)-2} \times u^I(i) - b_{i,\,r(i)-2}u(i), \ldots, u_i^{r(i)} - a_{i,\,1}u^I(i) - b_{i,\,1}u(i), -a_{i,\,0}u^I(i) - b_{i,\,0}u(i))$ $(i = 0, 1)$.

Теорема 1 (о связи оператора $\boldsymbol{T}$ с задачей (1)). *Задача на с. з. оператора $\boldsymbol{T}$ адекватна задаче (1) в следующем смысле:*

а) *с. з. оператора $\boldsymbol{T}$, их собственные и алгебраические кратности совпадают соответственно с с. з. задачи (1), их собственными и алгебраическими кратностями;*

б) *пусть $\tilde{\lambda}$ — с. з. оператора $\boldsymbol{T}$ (задачи (1)) алгебраической кратности ν. Между элементами цепочки $\{\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{\nu-1}\}$ из собственного и присоединенных векторов оператора $\boldsymbol{T}$ и элементами цепочки $\{u_0(x), u_1(x), \ldots, u_{\nu-1}(x)\}$ из собственной и присоединенных функций задачи (1), отвечающих с. з. $\tilde{\lambda}$, можно установить взаимно-однозначное соответствие: $u_k(x) = (\boldsymbol{u}_k)\hat{}$; $\boldsymbol{u}_k = \Omega u_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, \nu - 1)$.*

Доказательство. Записывая покомпонентно уравнение $\boldsymbol{Tu} = \lambda\boldsymbol{u}$ и используя условие б) из (3), получаем, что первая компонента решения этого уравнения является решением задачи (1), причем $\boldsymbol{u} = \Omega(\boldsymbol{u}\hat{})$. Отсюда следуют все утверждения теоремы.

3. Пространство $L^2(0, 1)$

В этом пункте в пространстве $\boldsymbol{L}$ будут заданы два скалярных произведения: индефинитное и дефинитное, называемые в дальнейшем соответственно индефинитной и дефинитной метриками.

Пусть $A_i = (\alpha_{i,m,n})_{m,n=1}^{r(i)}$ — вещественная симметричная невырожденная матрица ($i = 0, 1$). Тогда $|A_i|$ — положительный квадратный корень из A_i^2 — также вещественная симметричная невырожденная матрица ($i = 0, 1$). Обозначим через * операцию перехода к сопряженной матрице или к сопряженному оператору.

Симметричный эрмитово-билинейный функционал

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \int_0^1 \boldsymbol{u}\hat{}\,\overline{\boldsymbol{v}}\hat{}\,dx + \boldsymbol{u}_0\hat{}\,A_0 \boldsymbol{v}_0\hat{}^{*} + \boldsymbol{u}_1\hat{}\,A_1 \boldsymbol{v}_1\hat{}^{*} \tag{4}$$

задает метрику в линейном пространстве $\boldsymbol{L}$ (в общем случае, индефинитную). Метрика (4) — индефинитная метрика конечного ранга $\varkappa$ $(0 \leqslant \varkappa \leqslant r(0) + r(1))$, равного сумме чисел отрицательных квадратов матриц A_0 и A_1. Нетрудно проверить, что линейное пространство $\boldsymbol{L}$ с индефинитной метрикой (4) является пространством Понтрягина $\Pi_\varkappa$ [16, с. 371].

Симметричный эрмитово-билинейный функционал

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_0^1 \boldsymbol{u}\hat{}\,\overline{\boldsymbol{v}}\hat{}\,dx + \boldsymbol{u}_0\hat{}\,|A_0|\, \boldsymbol{v}_0\hat{}^{*} + \boldsymbol{u}_1\hat{}\,|A_1|\, \boldsymbol{v}_1\hat{}^{*} \tag{5}$$

задает дефинитную метрику в линейном пространстве $\boldsymbol{L}$. При помощи введенной дефинитной метрики определим в $\boldsymbol{L}$ норму

$$\|\boldsymbol{u}\| = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})^{1/2}. \tag{6}$$

Сходимость по норме (6) эквивалентна сходимости первых компонент по норме $L^2(0, 1)$ и числовой сходимости каждой из остальных компонент. Заметим, что метрика (4) непрерывна в смысле нормы (6). Нетрудно проверить, что линейное пространство $\boldsymbol{L}$ с дефинитной метрикой (5) является гильбертовым пространством.

Пространство $\boldsymbol{L}$ с дефинитной метрикой (5) и с индефинитной метрикой (4) будем обозначать через $\boldsymbol{L}^2(0, 1)$.

Пространство $L^2(0, 1)$ канонически вкладывается в пространство $\boldsymbol{L}^2(0, 1)$ при помощи оператора π, переводящего функцию $u(x) \in L^2(0, 1)$ в вектор $\boldsymbol{u} = (u(x);\ 0, 0, \ldots, 0;\ 0, 0, \ldots, 0) \in \boldsymbol{L}^2(0, 1) : u(x) \to \pi u(x)$, $(u(x), v(x))_{L^2(0,1)} = \langle \pi u(x), \pi v(x) \rangle = (\pi u(x), \pi v(x))$.

Будем далее рассматривать оператор Ω как оператор из M в $\boldsymbol{L}^2(0, 1)$, оператор $\boldsymbol{T}$ — как оператор из $\boldsymbol{L}^2(0, 1)$ в $\boldsymbol{L}^2(0, 1)$. Нетрудно проверить, что $\boldsymbol{T}$ — замкнутый линейный неограниченный оператор в пространстве $\boldsymbol{L}^2(0, 1)$ и что область определения оператора $\boldsymbol{T}$ плотна в $\boldsymbol{L}^2(0, 1)$ по норме (6).

Теорема 2 (о спектре и резольвенте оператора $\boldsymbol{T}$ и задачи (1)). *Справедливы следующие утверждения:*

а) *функция Грина* $G(x, y; \lambda)$ *задачи (1) определяется формулой*

$$G(x, y; \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_2(x, \lambda)\, \varphi_1(y, \lambda)}{\omega(\lambda)}, & 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{\varphi_1(x, \lambda)\, \varphi_2(y, \lambda)}{\omega(\lambda)}, & 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1 \end{cases};$$

б) *резольвента* R_λ *задачи (1) определяется формулой*

$$R_\lambda f(x) = (f(y), \overline{G(x, y; \lambda)})_{L^2(0,1)} =$$

$$= \int_0^1 f(y)\, G(x, y; \lambda)\, dy = (\varphi_2(x, \lambda) \int_0^x f(y)\, \varphi_1(y, \lambda)\, dy +$$

$$+ \varphi_1(x, \lambda) \int_x^1 f(y)\, \varphi_2(y, \lambda)\, dy)/\omega(\lambda);$$

R_λ — *мероморфная оператор-функция переменного* λ *с полюсами в с. з. задачи (1); порядок полюса* $\tilde{\lambda}$ *равен алгебраической кратности с. з.* $\tilde{\lambda}$ *задачи (1); при* λ, *не совпадающем ни с одним с. з. задачи (1), значение* R_λ *есть вполне непрерывный оператор в* $L^2(0, 1)$;

в) *резольвента* $\boldsymbol{R}_\lambda$ *оператора* $\boldsymbol{T}$ *определяется формулой* $\boldsymbol{R}_\lambda(f(x);\ f_0^1, f_0^2, \ldots, f_0^{r(0)};\ f_1^1, f_1^2, \ldots, f_1^{r(1)}) = \boldsymbol{v}$, *где* $\boldsymbol{v}\hat{} = \dfrac{1}{\omega(\lambda)} \times$

$$\times \left[\varphi_2(x, \lambda)\left(\int_0^x f(y)\, \varphi_1(y, \lambda)\, dy + f_0^{r(0)} + f_0^{r(0)-1}\lambda + \cdots + f_0^1\lambda^{r(0)-1}\right) +\right.$$

$$\left.+ \varphi_1(x, \lambda)\left(\int_x^1 f(y)\, \varphi_2(y, \lambda)\, dy - f_1^{r(1)} - f_1^{r(1)-1}\lambda - \cdots - f_1^1\lambda^{r(1)-1}\right)\right];$$

$$\boldsymbol{v}_0\hat{} = \frac{1}{\omega(\lambda)}\Big\{\Omega\,[\varphi_2(x, \lambda)\,(f_0^{r(0)} + f_0^{r(0)-1}\lambda + \cdots + f_0^1\lambda^{r(0)-1}) +$$

$$+ \varphi_1(x, \lambda)\left(\int_0^1 f(y)\, \varphi_2(y, \lambda)\, dy - f_1^{r(1)} - f_1^{r(1)-1}\lambda - \cdots - f_1^1\lambda^{r(1)-1}\right)\Big]\Big\}\hat{}_0 +$$

$$+ (0,\ f_0^1,\ f_0^2 + f_0^1\lambda,\ \ldots,\ f_0^{r(0)-1} + f_0^{r(0)-2}\lambda + \cdots + f_0^1\lambda^{r(0)-2});$$

$$\boldsymbol{v}_1\hat{} = \frac{1}{\omega(\lambda)}\Big\{\Omega\Big[\varphi_2(x, \lambda)\Big(\int_0^1 f(y)\, \varphi_1(y, \lambda)\, dy +$$

$$+ f_0^{r(0)} + f_0^{r(0)-1}\lambda + \cdots + f_0^1\lambda^{(0)-1}\Big) + \varphi_1(x, \lambda)\,(-f_1^{r(1)} -$$

$$- f_1^{r(1)-1}\lambda - \cdots - f_1^1\lambda^{r(1)-1})\Big]\Big\}\hat{}_1 + (0,\ f_1^1,\ f_1^2 + f_1^1\lambda,\ \ldots,\ f_1^{r(1)-1} +$$

$$+ f_1^{r(1)-2}\lambda + \cdots + f_1^1\lambda^{r(1)-2}),$$

$\boldsymbol{R}_\lambda$ — мероморфная оператор-функция переменного λ с полюсами в с. з. оператора $\boldsymbol{T}$; порядок полюса $\tilde{\lambda}$ равен алгебраической кратности с. з. $\tilde{\lambda}$ оператора $\boldsymbol{T}$; при λ, не совпадающем ни с одним с. з. оператора T, значение $\boldsymbol{R}_\lambda$ есть вполне непрерывный оператор в пространстве $\boldsymbol{L}^2(0, 1)$;

г) *спектр оператора $\boldsymbol{T}$ и спектр задачи (1) совпадают; каждый из них дискретен.*

Утверждения а)—г) теоремы 2 проверяются непосредственно.

4. Специальный выбор метрик в пространстве L

Настоящий пункт посвящен доказательству следующей теоремы.

Теорема 3 (о зависимости ранга индефинитной метрики от рациональных функций $R_i(\lambda)$ $(i = 0, 1)$ при специальном выборе метрик в пространстве $\boldsymbol{L}$). *В пространстве $\boldsymbol{L}$ можно выбрать и притом единственным образом матрицы A_i $(i = 0, 1)$ (т. е. метрики (4) и (5)) таким образом, что оператор $\boldsymbol{T}$ будет симметрическим в индефинитной метрике (4). При этом ранг индефинитности метрики (4) равен $\varkappa = r(0) + r(1) - s(0) - s(1))/2$; метрика (4) дефинитна ($\varkappa = 0$) тогда и только тогда, когда рациональные функции $R_i(\lambda)$ $(i = 0, 1)$ неванлинновские.*

Напомним, что до сих пор в определении метрики (4) матрицы A_i $(i = 0, 1)$ были произвольными вещественными симметрическими невырожденными матрицами. Потребуем теперь, чтобы оператор $\boldsymbol{T}$ был симметрическим в метрике (4).

Пусть $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{D}_T$. Интегрируя по частям и учитывая условие б) из (3), получаем $\langle \boldsymbol{Tu}, \boldsymbol{v}\rangle = \sum_{i=0}^{1} \sum_{n=2}^{r(i)} \sum_{m=2}^{r(i)} \alpha_{i, m-1, n} \boldsymbol{u}_i^m \overline{v_i^n} + \sum$, где слагаемые, обозначенные через $\sum$, не содержат произведений $u_i^m \overline{v_i^n}$ $(i = 0, 1;\ m = 2, 3, \ldots, r(i);\ n = 2, 3, \ldots, r(i))$. Отсюда нетрудно вывести, что требование симметричности оператора $\boldsymbol{T}$ в метрике (4) влечет за собой ганкелевость матриц A_i $(i = 0, 1)$. Обозначим $\alpha_{i, m, n}$ через $\alpha_{r, m+n-1}$ $(m = 1, 2, \ldots, r(i);\ n = 1, 2, \ldots, r(i);\ i = 0, 1)$ и подставим в выражение для $\langle \boldsymbol{Tu}, \boldsymbol{v}\rangle$. Тогда получим, что для симметричности оператора $\boldsymbol{T}$ в метрике (4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\sum_{m=1}^{r(i)} \alpha_{i, m} \begin{vmatrix} a_{i, r(i)} a_{i, r(i)-m} \\ b_{i, r(i)} b_{i, r(i)-m} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} \ (i = 0, 1);$$

$$\sum_{m=0}^{r(i)} \alpha_{i, m+n} a_{i, r(i)-m} = 0 \ (n = 1, 2, \ldots, r(i) - 1;\ i = 0, 1; \qquad (7)$$

$$\sum_{m=0}^{r(i)} \alpha_{i, m+n} b_{i, r(i)-m} = 0 \ (n = 1, 2, \ldots, r(i) - 1;\ i = 0, 1).$$

Таким образом, элементы искомых ганкелевых матриц A_0 и A_1 удовлетворяют двум системам линейных уравнений (7) (при $i=0$ и $i=1$), матрицы которых обозначим соответственно через B_0 и B_1.

Пусть $t_1(i, j, k) = \max(0, j+k-r(i)-1)$, $t_2(i, j, k) = \min(j, k)-1$, $z(i, j, k) =$

$$\sum_{t=t_1(i,j,k)}^{t_2(i,j,k)} \begin{vmatrix} a_{i,\, r(i)-t} & a_{i,\, r(i)+t-j-k+1} \\ b_{i,\, r(i)-t} & b_{i,\, (ri)+t-j-k+1} \end{vmatrix}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, r(i);\quad k = 1, 2, \ldots, r(i);\quad i = 0, 1).$$

Тогда матрица $Z_i = (Z_{i,\, j,\, k})_{j,\, k=1}^{r(i)}$ лишь обратным порядком строк и столбцов отличается от матрицы безутианты [15, с. 13] многочленов $P_i(\lambda)$ и $Q_i(\lambda)$ $(i = 0, 1)$.

Назовем ганкелеву матрицу $G = (g_{m+n-1})_{m,\, n=1}^{t}$ верхней (нижней) H-треугольной матрицей, если $g_s = 0$ при $s > t$ $(s < t)$; H-треугольной матрицей, если она либо верхняя H-треугольная, либо нижняя H-треугольная.

Приведем без доказательства следующую лемму.

Лемма (о специальном выборе метрик в пространстве $\boldsymbol{L}$). *Справедливы следующие утверждения:*

а) $\det B_i = (-1)^{r(i)-1} R(i) \neq 0$ $(i = 0, 1)$; *системы линейных уравнений (7) однозначно разрешимы*;

б) *матрица* A_i *невырожденная,* $A_i^{-1} = (-1)^{i+1} Z_i$, $\det A_i = (-1)^{[(r(i)+(-1)^i r(i))/2]}/R(i) \neq 0$ $(i = 0, 1)$;

в) *матрица* A_i *является верхней (нижней) H-треугольной ганкелевой матрицей тогда и только тогда, когда существуют два вещественных числа* $g_{i,\,1}$ *и* $g_{i,\,2}$ $(h_{i,\,1}$ *и* $h_{i,\,2})$ *такие, что* $g_{i,\,1}P_i(\lambda) + g_{i,\,2}Q_i(\lambda) = 1$ $(h_{i,\,1}P_i(\lambda) + h_{i,\,2}Q_i(\lambda) = \lambda^{r(i)})$ $(i = 0, 1)$. *Если матрицы* A_0 *и* A_1 *являются H-треугольными, то* $\varkappa = \sum_{i=0}^{1} [(r(i) + \operatorname{sign} R(i))/2]$.

Начиная с этого момента, будем предполагать, что метрики в пространстве $\boldsymbol{L}$ выбраны указанным специальным образом.

Используя теорему о сигнатуре безутианты (Сильвестр — Эрмит — Гурвиц) [15, с. 17] и результаты пункта б) леммы, получаем, что $\varkappa = (r(0) + r(1) - s(0) - s(1))/2$, $\varkappa = 0$ тогда и только тогда, когда $r(i) = s(i)$ $(i = 0, 1)$, т. е. когда рациональные функции $R_0(\lambda)$ и $R_1(\lambda)$ неванлинновские.

Теорема доказана.

Замечание. Ранг индефинитности $\varkappa$ будет максимально возможным при данных $r(0)$ и $r(1)$ $(\varkappa = r(0) + r(1))$ тогда и только тогда, когда рациональные функции $R_0(\lambda)$ и $R_1(\lambda)$ антиневанлинновские.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. — ДАН СССР, 1951, т. 71, № 1, с. 11—14.
2. Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. Гидродинамика в слабых силовых полях. О малых колебаниях вязкой жидкости в потенциальном поле массовых сил. —«Журн. вычислит. мат. и мат. физ.», 1966, т. 6, вып. 6, с. 1054—1063.
3. Балабух Л. И., Молчанов А. Г. Об одной краевой задаче теории колебаний с граничными условиями, зависящими от параметра. — «Прикл. мат. и мех.», 1966. т. 30, вып. 6, с. 1098—1102.
4. Тверитин А. Н. Математическое рассмотрение простейшей краевой задачи, связанной с теорией продольного удара по упруго-вязкому стержню с опёртыми концами.— «Тр. Днепропетровск. ин-та инж. ж. -д. транспорта», 1953. вып. XXIII, с. 24—60.
5. Крицкая С. С. Математическое рассмотрение задачи об ударе упруго-вязкого стержня переменного сечения.— Автореф. дис. на соиск. учён. степени канд. физ. -мат. наук, Днепропетровск, 1966.
6. Walter J. Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary condition.— „Math. Zeitschrift", 1973, Band 133, Heft 4, S. 301—312.
7. Штраус А. В. О спектральных функциях дифференциального оператора чётного порядка.—ДАН СССР, 1957, т. 115, № 1, с. 67—70.
8. Штраус А. В. О спектральных функциях оператора дифференцирования.— «Усп. мат. наук», 1958, т. XIII, вып. 6, с. 185—191.
9. Штраус А. В. О некоторых семействах расширений симметрического оператора.— ДАН СССР, 1961, т. 139, № 2, с. 316—319.
10. Дикий Л. А. О двукратной полноте системы собственных функций, возникающей в одной задаче математической физики.—«Функциональный анализ и его приложения», 1967, т. 1, вып. 3, с. 24—32.
11. Жданович В. Ф. Решение методом Фурье несамосопряженных смешанных задач для гиперболических систем на плоскости. I.— «Мат. сб.», 1959, т. 47, № 3, с. 307—354; II.— «Мат. сб.», 1959, т. 48, № 4, с. 447—498; III.— «Мат. сб.», 1959, т. 49, № 3, с. 233—266.
12. Дикий Л. А. О краевых условиях, зависящих от собственного числа.— «Усп. мат. наук», 1960, т. XV, вып. I, с. 195—198.
13. Руссаковский Е. М. Операторная трактовка граничной задачи со спектральным параметром, полиномиально входящим в граничные условия.— «Функциональный анализ и его приложения», 1975, т. 9, вып. 4. с. 91—92.
14. Чезаро Э. Элеменарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. Ч. I. М.— Л., ОНТИ 1936. 592 с.
15. Крейн М. Г., Неймарк М. А. Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений. Харьков, ДНТВУ, 1936. 44 с.
16. Иохвидов И. С., Крейн М. Г. Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. I.— «Тр. Моск. мат. об-ва», 1956, т. V, с. 367—432; II.— «Тр. Моск. мат. об-ва», 1959, т. VIII, с. 413—496.

Поступила 15 октября 1974 г.