УДК 517.919

*М. А. ПЕРЕЛЬМАН*

## О КОРРЕКТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение вида

$$Lu \equiv \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = 0, \, t \in [0, T], \; x \in R^m, \tag{1}$$

где $P(s)$ — полином относительно $s = (s_1, \ldots, s_m)$ с постоянными (комплексными) коэффициентами.

Задача состоит в решении уравнения (1) при условии

$$\int_0^T u(x, t)\, d\mu(t) = u_0(x). \tag{2}$$

Здесь $\mu(t)$ — некоторая (комплекснозначная) функция ограниченной вариации; $u_0(x)$ — заданная функция.

В [1] исследовался вопрос о единственности решения задачи (1) — (2) и корректной разрешимости многоточечной краевой задачи (1) — (2) в классе ограниченных функций и в классе функций степенного роста на бесконечности.

Основные вопросы, которые исследуются в нашей статье, следующие: 1) существует ли вес $\mu(t)$, $l$ раз непрерывно дифференцируемый ($0 \leqslant l \leqslant \infty$), такой что задача (1) — (2) является корректно разрешимой в классе ограниченных функций, и 2) существует ли вес $\mu(t)$, $l$ раз непрерывно дифференцируемый, такой что задача (1) — (2) не является корректно разрешимой в этом классе. Кроме того, по свойствам $P(is)$ устанавливается необходимое условие, которому должен удовлетворять вес $\mu(t)$, чтобы задача (1) — (2) была корректно разрешимой в классе ограниченных функций.

Как и в [1], введем понятие определителя краевой задачи

$$\Delta(s) = \int_0^T \exp\{tP^*(is)\}\, d\overline{\mu(t)}, \tag{3}$$

где $P^*(is)$ получается из $P(is)$ заменой коэффициентов на комплексно сопряженные и $s$ на $-s$.

Обозначим $K_0$ класс ограниченных функций.

Задачу (1) — (2) будем называть корректно разрешимой в классе функций $K_0$, если существует число $l \geqslant 0$ такое, что для любой функции, которая вместе со своими производными до порядка $l$ принадлежит $K_0$, существует решение краевой задачи (1) — (2), которое вместе со своими производными, входящими в (1) при каждом $t \in [0, T]$, принадлежит $K_0$ и непрерывно зависит от краевых условий в следующем смысле: если в оценке $|D^q u_k(x)| \leqslant c_k$, $|q| \leqslant l$, краевых функций $u_k \in K_0$ постоянные $c_k \to 0$ при $k \to \infty$, то в оценке соответствующих решений $|D^q u_k(x, t)| \leqslant c_k'$, $|q| \leqslant p$, $c_k'$ тоже стремятся к нулю.

Аналогичное определение корректной разрешимости краевой задачи было дано в [2], где исследовались условия корректной разрешимости локальной двухточечной задачи.

Применим формально преобразование Фурье к задаче (1) — (2):

$$\frac{dv(s, t)}{dt} = P(is)\, v(s, t), \tag{1'}$$

$$\int_0^T v(s, t)\, d\mu(t) = v_0(s) \tag{2'}$$

($v(s, t)$ и $v_0(s)$ — преобразования Фурье $u(x, t)$ и $u_0(x)$ над каким-нибудь пространством основных функций).

Задача $(1')$ — $(2')$ — двойственная к задаче (1) — (2).

Найдем решение задачи $(1')$ — $(2')$, считая $v_0(s)$ обычной: $v(s, t) = \exp\{tP(is)\}\, w_0(s)$ и подберем $w_0(s)$ из условия $(2')$, замечая, что $\int\limits_0^T \exp\{tP(is)\}\, d\mu(t) = \overline{\Delta(-s)}$;

$$w_0(s) = \frac{v_0(s)}{\Delta(-s)} \text{ и } v(s, t) = \frac{\exp\{tP(is)\}\, v_0(s)}{\overline{\Delta(-s)}}.$$

Функцию

$$Q(s, t) = \frac{\exp\{tP(is)\}}{\overline{\Delta(-s)}} \tag{4}$$

назовем разрешающей функцией задачи. Она является решением задачи $(1')$ — $(2')$ с $v_0(s) \equiv 1$.

Будем говорить, что $Q(s, t)$ удовлетворяет условию $K$, если существуют $L > 0$, $A > 0$, $\alpha \geqslant 0$ и $\lambda \in R^1$ такие, что $\Delta(s) \neq 0$ и $|Q(s, t)| \leqslant A(1 + \|s\|)^\alpha$ при $s \in \Omega_{L,\lambda} = \{s = \sigma + i\tau,\ \|\tau\| \leqslant L(1 + \|\sigma\|)^\lambda\}$.

Краевую задачу (1) — (2), для которой выполняется условие $K$, будем называть корректной.

**Теорема 1***. *Если краевая задача (1) — (2) удовлетворяет условию $K$, то она корректно разрешима в классе функций $K_0$.*

**Теорема 2.** *Если краевая задача (1) — (2) корректно разрешима в классе функций $K_0$, то выполняются условия* $K_{a)}: \Delta(\sigma) \neq 0$, $K_{b)}: |Q(\sigma, t)| \leqslant A(1 + \|\sigma\|)^\alpha$.

В дальнейшем важную роль будет играть функция

$$\Phi_R(s, t, T) = \frac{\exp\{tR(is)\}\, R(is)}{\exp\{TR(is)\} - 1},\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$R(is)$ — полином от $s \in R^m$, $m \geqslant 1$.

**Теорема 3.** *Если $TR(i\sigma) \neq 2\pi ki$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, то функция $\Phi_R(s, t, T)$ удовлетворяет условию $K$.*

Для доказательства теоремы воспользуемся леммой (см. [3, с. 196—198]).

***Лемма.*** *Пусть $\{a_k\}$ — возрастающая (убывающая) последовательность вещественных чисел, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \infty$, $R(s)$ — многочлен над $C^m$, $s = (s_1, \ldots, s_m) = \sigma + i\tau$. Пусть при $s = \sigma \in R^m$ имеют место неравенства $R(\sigma) \neq a_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда существуют такие $L > 0$ и $\lambda \in R^1$, что в области $\Omega_{L,\lambda} = \{s = \sigma + i\tau : \|\tau\| \leqslant L(1 + \|\sigma\|)^\lambda\}$ справедливы оценки $|R(s) - a_k| \geqslant C_1(1 + \|s\|)^{C_2}$, где $C_1 > 0$, $C_2$ — постоянные.*

---

*. Доказательства теорем 1 и 2 проводятся аналогично доказательствам соответствующих теорем в [2].

Доказательство теоремы 3. Пусть $TR(i\sigma) \neq 2\pi ki$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$). Рассмотрим $k = 1, 2, \ldots$. По лемме существуют $L_1 > 0$ и $\lambda_1$ такие, что в $\Omega_{L_1, \lambda_1}$ выполняются неравенства

$$|TR(is) - 2\pi ki| \geqslant C'_1(1 + \|s\|)^{C'_2}, \quad C'_1 > 0, \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Рассмотрим $k = -1, -2, \ldots$. По лемме существуют $L_2 > 0$ и $\lambda_2$ такие, что в $\Omega_{L_2, \lambda_2}$ выполняются неравенства

$$|TR(is) - 2\pi ki| \geqslant C''_1(1 + \|s\|)^{C''_2}, \quad C''_1 > 0 \ (k = -1, -2, \ldots). \tag{6}$$

Тогда в области $\Omega_{L, \lambda}$, $L = \min\{L_1, L_2\}$, $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ выполняются неравенства

$$|TR(is) - 2\pi ki| \geqslant C_1(1 + \|s\|)^{C_2} \ (k = \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{7}$$

где $C_1 = \min\{C'_1, C''_1\}$, $C_2 = \min\{C''_1, C''_2\}$.

Обозначим $z = TR(is)$, $z_k = z - 2\pi ki$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Рассмотрим $|e^z - 1| = |e^{z_k} - 1|$. Пусть $\delta_1 > 0$ таково, что при $|\zeta| < \delta_1 \, |e^\zeta - 1| > \frac{|\zeta|}{2}$, тогда для тех $s \in \Omega_{L, \lambda}$, для которых $|TR(is) - 2\pi ki| \leqslant \delta_1$,

$$|e^{TP(is)} - 1| = |e^{TR(is) - 2\pi ki} - 1| >$$
$$> \frac{1}{2}|TR(is) - 2\pi ki| \geqslant \frac{1}{2}C_1(1 + \|s\|)^{C_2}. \tag{8}$$

При $|\zeta| \geqslant \delta_1$ аргумент $e^\zeta - 1$ отграничен от нулей этой функции Следовательно, для тех $s \in \Omega_{L, \lambda}$, для которых при любом $k$ $|TR(is) - 2\pi ki| \geqslant \delta_1$ будет

$$|e^{TR(is)} - 1| > \varepsilon. \tag{9}$$

Так как $\lim\limits_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$, то при $|R(is)| < \delta_2$

$$\left|\frac{R(is)}{\exp\{TR(is)\} - 1}\right| < M. \tag{10}$$

Следовательно, при $s \in \Omega_{L, \lambda}$

$$|\Phi_R(s, t, T)| \leqslant A(1 + \|s\|)^\alpha. \tag{11}$$

Действительно, для тех $s$, при которых $\operatorname{Re} R(is) \leqslant 0$,

$$|\Phi_R(s, t, T)| \leqslant \left|\frac{R(is)}{\exp\{TR(is)\} - 1}\right|$$

и оценка (11) следует из (8)—(10).

Для тех $s$, при которых $\operatorname{Re} R(is) > 0$, $|\Phi_R(s, t, T)| = \left|\frac{\exp\{(t-T)R(is)\}R(is)}{\exp\{-TR(is)\} - 1}\right| \leqslant \left|\frac{R(is)}{\exp\{-TR(is)\} - 1}\right|$, и получаем предыдущий результат заменой $R(is)$ на $-R(is)$. Теорема доказана.

**Теорема 4.** *Пусть $P(is)$ ($s = \sigma + i\tau$) — полином над $C^m$ ($m > 1$) такой, что при некотором $C = \text{const}$ $TP(i\sigma) \neq C + 2\pi ki$ ($k = 0$,*

$\pm 1, \ldots$). *Тогда существует функция $\mu(t)$ $l$ раз непрерывно дифференцируемая* ($l$ — целое, $0 \leqslant l \leqslant \infty$) *и в случае $l < \infty$ имеющая кусочно непрерывную $(l+1)$-ю производную, такую что задача (1) — (2) является корректной.*

Доказательство теоремы проведем построением веса $\mu(t)$.

1. $l = \infty$. Выберем $\mu(t)$ так, чтобы $\mu'(t) = e^{-\alpha t}\mu_1'(t)$, где $\alpha = \frac{C}{T}$, $\mu_1'(T) \neq 0$, $\mu_1^{(j)}(T) = 0$ $(j = 2, 3, \ldots)$.

Тогда $\overline{\Delta(-s)} = \int\limits_0^T \exp\{t[P(is) - \alpha]\}\, \mu_1'(t)\, dt$.

Интегрируя по частям, получаем

$$\overline{\Delta(-s)} = \mu_1'(T) \frac{\exp\{T[P(is) - \alpha]\} - 1}{P(is) - \alpha}$$

и

$$Q(s, t) = \frac{\exp\{tP(is)\}[P(is) - \alpha]}{\mu_1'(T)(\exp\{T[P(is) - \alpha]\} - 1)} = \frac{e^{t\alpha}}{\mu_1'(T)} \Phi_R(s, t, T),$$

где $R(is) = P(is) - \alpha$. По теореме 3 $Q(s, t)$ удовлетворяет условию $K$.

2. $0 < l < \infty$. Выберем $\mu(t)$ так, чтобы $\mu'(t) = e^{-\alpha t}\mu_1'(t)$, где $\alpha = \frac{C}{T}$ и $\mu_1^{(l)}(t) = (-1)^j C_l^j \left(t - \frac{jT}{l}\right)$ при $\frac{jT}{l+1} \leqslant t \leqslant \frac{(j+1)T}{l+1}$ $(j = 0, 1, \ldots, l)$ и $\mu_1^{(j)}(T) = 0$ $(j = 0, 1, \ldots, l-1)$.

Тогда

$$\overline{\Delta(-s)} = \left[\frac{\exp\left\{\frac{T}{l+1} P(is) - \alpha]\right\} - 1}{P(is) - \alpha}\right]^{l+1}.$$

Следовательно,

$$Q(s, t) = e^{\alpha t}\left[\Phi_R\left(s, \frac{t}{l+1}, \frac{T}{l+1}\right)\right]^{l+1},$$

где $R(is) = P(is) - \alpha$. $Q(s, t)$ по теореме 3 удовлетворяет условию $K$.

3. $l = 0$. Выбираем

$$\mu(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} \text{ при } t < \frac{T}{2}, \\ 2e^{-\frac{\alpha T}{2}} - e^{-\alpha t} \text{ при } t \geqslant \frac{T}{2}, \end{cases}$$

$\alpha = \frac{C}{T}$. Тогда

$$\overline{\Delta(-s)} = \frac{\alpha\left[\exp\left\{\frac{T}{2} P(is) - \alpha]\right\} - 1\right]^2}{P(is) - \alpha}$$

и

$$Q(s,\ t)=\frac{\exp\{tP(is)\}\,[P(is)-\alpha]}{\alpha\left[\exp\left\{\frac{T}{2}\,[P(is)-\alpha]\right\}-1\right]^2},$$

очевидно, тоже удовлетворяет условию $K$. Теорема доказана.

То условие, что $TP(i\sigma)\neq C+2\pi ki$ ($k=0,\ \pm1,\ \ldots$), отбросить нельзя. Об этом свидетельствует

**Теорема 5.** *Пусть $P(is)$ $(s=\sigma+i\tau)$ — полином над $C^m$ $(m>1)$, такой что $P(i\sigma)$ принимает все возможные значения в области комплексных чисел. Тогда задача (1) — (2) не будет корректной ни при какой функции $\mu(t)$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть существует функция $\mu(t)$ такая, что задача (1) — (2) корректна. Так как должно выполняться условие $K_{a)}$, то $\overline{\Delta(-\sigma)}\neq0$. $P(i\sigma)$ по условию принимает все значения в комплексной плоскости $z$. Так как $\delta(z)=\int\limits_0^T\exp\{tz\}\,d\mu(t)$ — целая функция, отличная от нуля при всех $z$, то, следовательно, $\delta(z)=A\exp\{t_0z\}$, т. е. $\mu(t)=A\eta(t-t_0)$, и наша задача является задачей Коши. Но задача Коши корректна, когда реальная часть ее характеристического корня ограничена сверху. В нашем случае $\operatorname{Re}\lambda=\operatorname{Re}P(i\sigma)$ сверху неограничена. Противоречие.

Если же $\mu(t)\neq A\eta(t-t_0)$, то $\delta(z)=0$ для некоторого $z=z_0$. Но тогда по условию найдется такое $\sigma_0$, что $P(i\sigma_0)=z_0$ и $\overline{\Delta(-\sigma_0)}=0$, т. е. нарушается единственность решения. Теорема доказана.

**Теорема 6.** *Пусть $P(is)$ $(s=\sigma+i\tau)$ — произвольный полином над $C^1$. Тогда существует функция $\mu(t)$, $l$ раз непрерывно дифференцируемая ($l$ — целое, $0\leqslant l\leqslant\infty$) и в случае $l<\infty$ имеющая кусочно-непрерывную $(l+1)$-ю производную, такая что задача (1) — (2) является корректной.*

Доказательство теоремы производится аналогично доказательству теоремы 4. Функцию $\mu(t)$ выбираем так же, как и в теореме 4, беря $\alpha=0$, если $\operatorname{Re}P(i\sigma)\not\equiv0$, и $\alpha\neq0$, если $\operatorname{Re}P(i\sigma)\equiv0$. Следовательно, доказательство теоремы сводится к доказательству того, что функция $\Phi_R(s,\ t,\ T)$ удовлетворяет условию $K$, где $R(is)=P(is)-\alpha$ (и, значит, $\operatorname{Re}R(i\sigma)\not\equiv0$).

Рассмотрим точки $\sigma$: $\operatorname{Re}R(i\sigma)=0$. Так как $\operatorname{Re}R(i\sigma)$ — полином, то таких точек конечное число: $\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_k$. Выберем те из них, в которых $\operatorname{Im}R(i\sigma)\neq0:\sigma_{j_1},\ \ldots,\ \sigma_{j_m}$. Выберем $T$ так, чтобы $\operatorname{Im}R(i\sigma_{j_p})\neq\frac{2\pi n}{T}$ ($p=1,\ \ldots,\ m$; $n=\pm1,\ \pm2,\ \ldots$). Возьмем круги $K_j$ с центром в точках $\sigma_j$ ($j=1,\ \ldots,\ k$) радиусов $r_j$ ($r_j$ — достаточно малые). Так как $R(i\sigma_{j_p})\neq\frac{2\pi ni}{T}$ ($n=\pm1,\ \pm2,\ \ldots$), кругов $K_j$ конечное число, $\operatorname{Im}R(i\sigma)$ и $\operatorname{Re}R(i\sigma)$ — многочлены, то можно выбрать $d_1$, $d_2>0$ так, что при $\sigma\in K_{j_p}(p=1, \ldots, m)$ $\left|R(i\sigma)-\frac{2\pi ni}{T}\right|>d_1$, а при $\sigma\bar{\in} K_j$ $\left|R(i\sigma)-\frac{2\pi ni}{T}\right|>d_2$, $R(is)=R(i\sigma)+\sum_{k=1}^{p}\frac{[R(i\sigma)]^{(k)}}{k!}(-\tau)^k=R(i\sigma)+r(\sigma, \tau)$ ($p$ — степень полинома $R(is)$).

Рассмотрим область $\Omega_{L,\lambda}=\{s=\sigma+i\tau, |\tau|\leqslant L(1+|\sigma|)^{\lambda}\}$. Поскольку при $\lambda<-p+1$ $r(\sigma,\tau)\to 0$, при $\sigma\to\infty$ $s\in\Omega_{L,\lambda}$, то, выбирая достаточно малое $L$, получим $|r(\sigma, \tau)|<\frac{d}{2}$, $s\in\Omega_{L,\lambda}$, $d=\min\{d_1, d_2\}$. Тогда при $s\in K_{j_p}\cap\Omega_{L,\lambda}$ и при $s\in\Omega_{L,\lambda}\setminus\bigcup_{j=1}^{k}K_j$

$$\left|R(is)-\frac{2\pi ni}{T}\right|\geqslant\left|R(i\sigma)-\frac{2\pi ni}{T}\right|-|r(\sigma,\tau)|\geqslant\frac{d}{2}.$$

Поскольку значения $R(i\sigma)$ равномерно в $\Omega'=\Omega_{L,\lambda}\setminus\bigcup K_j$, $j\neq j_p(p=1, \ldots, m)$ отграничены от $\frac{2\pi ni}{T}(n=0, \pm1, \ldots)$, являющихся нулями функции $\exp\{Tz\}-1$ (случай $n=0$ будет рассмотрен ниже), то $|\exp\{TR(is)\}-1|\geqslant C>0$ при $s\in\Omega'$.

Оценим теперь при $s\in\Omega_{L,\lambda}$ функцию $\Phi_R(s, t, T)$. Пусть $s\in K_j(1\leqslant j\leqslant k, \quad j\neq j_p, \quad p=1, \ldots, m)$. Так как $\lim\limits_{s\to\sigma j}\frac{R(is)}{\exp\{TR(is)\}}=\frac{1}{T}$, то для достаточно малого $\varepsilon>0$ при $|R(is)|<\varepsilon$ $\left|\frac{R(is)}{\exp\{TR(is)\}-1}\right|<\frac{2}{T}$.

Радиусы соответствующих кругов $K_j(j\neq j_p)$ выберем так, чтобы при $s\in K_j$ $|R(is)|<\varepsilon$, а вне этих кругов $\left|R(is)-\frac{2\pi ni}{T}\right|>d_2$. Тогда при $s\in K_j(j\neq j_p)$, $|\Phi_R(s, t, T)|<\frac{2\exp\{T\varepsilon\}}{T}$.

Рассмотрим $s\in\Omega'$.

а) Пусть $\operatorname{Re}R(i\sigma)\leqslant 0$. Тогда

$$|\Phi_R(s, t, T)|=\left|\frac{\exp\{tR(i\sigma)+tr(\sigma, \tau)\}R(i\sigma)}{\exp\{TR(is)\}-1}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\exp\left\{\frac{Td}{2}\right\}|R(is)|}{C}\leqslant A(1+|s|)^{\alpha}.$$

б) Пусть $\operatorname{Re}R(i\sigma)>0$. Тогда

$$|\Phi_R(s, t, T)|=\left|\frac{\exp\{(t-T)R(is)\}R(is)}{\exp\{-TR(is)\}-1}\right|\leqslant A(1+|s|)^{\alpha}.$$

Таким образом, $\Phi_R(s, t, T)$ удовлетворяет условию $K$. Теорема доказана.

**Теорема 7.** *Пусть функция* $\operatorname{Re} P(i\sigma)$ *является неограниченной сверху (снизу). Тогда для корректности задачи (1) — (2) необходимо, чтобы точка* $t = T$ $(t = 0)$ *была точкой роста функции* $\mu(t)$.

Доказательство. Пусть $\overline{\Delta(-\sigma)} \neq 0$, $\operatorname{Re} P(i\sigma) \to +\infty$ при $\sigma \to \infty$ и $t = T_1 < T$ — последняя точка роста $\mu(t)$. Рассмотрим $Q(\sigma, t) = \frac{\exp\{tP(i\sigma)\}}{\Delta(-\sigma)}$ при $t = T_2$, $T_1 < T_2 \leqslant T$:

$$|Q(\sigma, T_2)| = \frac{\exp\{(T_2 - T_1)\operatorname{Re} P(i\sigma)\}}{\left|\int\limits_0^{T_1} \exp\{(t - T_1) P(i\sigma)\} \, d\mu(t)\right|}.$$

Так как при $0 \leqslant t \leqslant T_1$ $t - T_1 \leqslant 0$, то при всех $\sigma$, при которых $\operatorname{Re} P(i\sigma) > 0$,

$$\left|\int\limits_0^{T_1} \exp\{(t - T_1) P(i\sigma)\} \, d\mu(t)\right| < \mathop{V}_{t=0}^{T_1} \mu(t) = M.$$

Таким образом, при $\operatorname{Re} P(i\sigma) \to +\infty$

$$|Q(\sigma, T_2)| > \frac{1}{T} \exp\{(T_2 - T_1)\operatorname{Re} P(i\sigma)\} > A(1 + \|\sigma\|)_\alpha \text{ для любых } \alpha \text{ и } A.$$

Следовательно, в любой области $\Omega_{L,\lambda}$ при любых $L$ и $\lambda$ функция $Q(s, t)$ не удовлетворяет условию $K$, и задача (1) — (2) некорректна. Теорема доказана.

**Теорема 8.** *Для любого полинома* $P(is)$ *существует* $l$ *раз непрерывно дифференцируемая функция* $\mu(t)$ *такая, что задача (1) — (2) некорректна.*

Доказательство. Пусть существует такая $C = \text{const}$, что $TP(i\sigma \neq C + 2\pi k i$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$ и $\operatorname{Re} P(i\sigma) \not\equiv \text{const}$.

1. $l < \infty$. Функцию $\mu(t)$ выбираем так, чтобы $\mu'(t) = \exp\{-\alpha t\} \mu_1'(t)$, $\alpha = \frac{C}{T}$, $T_0 < T$,

$$\mu_1^{(l)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \dfrac{T_0}{l+2}, \\ (-1)^j C_l^j \left[t - \dfrac{T_0[(j+1)l + j]}{l(l+2)}\right] & \text{при } \dfrac{(j+1)T_0}{l+2} \leqslant t < \dfrac{(j+2)T_0}{l+2}. \\ & (j = 0, \ldots, l) \\ 0 & \text{при } t \geqslant T_0. \end{cases}$$

Тогда точки $t = 0$ и $t = T$ не являются точками роста $\mu(t)$, и по теореме 7 задача (1)—(2) некорректна.

Если $\operatorname{Re} P(i\sigma) \equiv A = \text{const}$, то выберем $\mu(t)$ так, чтобы $\mu'(t) = \exp\left\{-\frac{A}{T} t\right\} \mu_1'(t)$, где $\mu_1(t)$ строится так же, как и в теореме 4п.2. Тогда $\Delta(-\sigma) = 0$, т. е. нарушается единственность решения задачи (1) — (2).

2. $l = \infty$. Выбираем $0 < T_1 < T_2 < T$ и функцию $\mu(t) = \mu_2(t) - \mu_1(t)$, где $\mu_2(t)$ и $\mu_1(t)$ — бесконечно дифференцируемые и удовлетворяют следующим условиям: $\mu_1'(t) = \exp\{-\alpha t\} \nu_1'(t)$; $\mu_2'(t) =$

$= \exp\{-\alpha t\}\,\nu_2'(t)$; $\nu_1(t) \equiv 0$ при $t \geqslant T_1$; $\nu_2(t) \equiv 0$ при $t \geqslant T_2$, $\nu_1'(T_1) = \nu_2'(T_2) = N \neq 0$; $\nu_1^{(k)}(T_1) = \nu_2^{(k)}(T_2) = 0$ $(k = 2, 3, \ldots)$. Обозначим $z = P(is) - \alpha$. Тогда

$$\overline{\Delta(-s)} = \delta(z) = \int_0^{T_2} e^{tz} d\nu_2(t) - \int_0^{T_1} e^{tz} d\nu_1(t) = \nu_2'(T_2)\frac{\exp\{T_2 z\} - 1}{z} - $$
$$- \nu_1'(T_1)\frac{\exp\{T_1 z\} - 1}{z} = N\,\frac{\exp\{T_2 z\} - \exp\{T_1 z\}}{z}.$$

Так же, как в теореме 7, показывается, что $|Q(s_i t)| > A(1 + \|s\|)^{\alpha}$ для любых $A$ и $\alpha$ в любой полосе $\Omega_{L,\lambda}$, если $|\operatorname{Re} P(i\sigma)| \to \infty$ Теорема доказана.

Автор благодарит В. М. Борок за внимание к работе и советы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Перельман М. А. О краевой задаче в бесконечном слое. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 23. Харьков, 1975, с. 70—79.
2. Борок В. М. Корректно разрешимые краевые задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных. — «Изв. АН СССР, сер. мат.», 1971, т. 35, № 1, с. 185—201.
3. Борок В. М. Краевая задача в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных. Автореф. дис. на соиск. учен. степени д-ра физ.-мат. наук, Харьков, 1969.

*Поступила 16 мая 1975 г.*