УДК 517.535.4 *В. С. АЗАРИН, В. Б. ГИНЕР*

О СТРОЕНИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ЦЕЛЫХ И СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Введение. Пусть $U(\rho(r))$ — класс субгармонических в плоскости функций $u(z)$, $z \in C$, нормального типа при уточненном порядке $\rho(r)$ $\rho(r) \to \rho$, т. е. таких, что $\lim\limits_{r\to\infty} M(r, u)\, r^{-\rho(r)} \overset{def}{=} \sigma[u] < \infty$ **(0.1)**, где $M(r, u)$ — максимум $u(z)$ на окружности $\{|z| = r\}$. Пусть V_t $t \in (0, \infty)$ — однопараметрическая подгруппа вращений плоскости, определенная равенством $V_t z = e^{i\alpha \ln t} Z$ **(0.2)**, где α — вещественно.

Определим семейство P_t равенством $P_t = t V_t$ **(0.3)**.

Пусть D' — пространство обобщенных функций над основным пространством D финитных бесконечно дифференцируемых функций в C [1, гл. II].

В работе [2] было показано, что семейство субгармонических функций вида $u_t(z) = u(P_t z)\, t^{-\rho(t)}$ **(0.4)** компактно в следующем смысле: для любой последовательности $t_j \to \infty$ существуют последовательности $t'_j \to \infty$ и субгармоническая функция $v(z)$, такие что $u_{t'_j} \to v$ в D'.

Множество таких функций v было названо *предельным* для u и обозначено $\mathrm{Fr}[u, V_t, \rho(r)]$ или кратко $\mathrm{Fr}[u]$.

Предельное множество характеризует асимптотическое поведение субгармонической функции $u(z)$ вдоль спиралей вида $l_\varphi = \{z = P_t e^{i\varphi}\colon t \in (0, \infty)\}$ или, в частности, (при $\alpha = 0$) вдоль лучей, выходящих из нуля.

В [2] было показано, что $\mathrm{Fr}[u] \subset U[\rho, \sigma[u]]$, где $U[\rho, \sigma]$ — множество субгармонических функций $v(z)$, удовлетворяющих условиям $v(0) = 0$; $M(r, v) \leqslant \sigma r^\rho$, $\forall r > 0$.

Было также показано, что $\mathrm{Fr}[u]$ замкнуто в D' и инвариантно относительно преобразования $(\cdot)_\tau : v_\tau(z) = v(P_\tau z)\, \tau^{-\rho}$ **(0.5)**.

Там же (теорема 3.1.1) было показано, что для любого замкнутого множества $\Lambda \subset U[\rho, \sigma]$, инвариантного относительно $(\cdot)_\tau$, существует (по крайней мере для нецелого $\rho > 0$) целая функция $f(z)$ нормального типа при уточненном порядке $\rho(\tau)$ $(f \in A(\rho(r)))$ такая, что предельное множество для $u(z) = \ln|f(z)|$ (будем обозначать его через $\mathrm{Fr}[f]$) удовлетворяет условию $\Lambda \subset \mathrm{Fr}[t] \subset \boxtimes\Lambda$ **(0.6)**, где $\boxtimes\Lambda$ — остов выпуклой оболочки Λ, определенный равенством $\boxtimes\Lambda = \left\{ v = \alpha v_1 + \beta v_2\colon v_1, v_2 \in \Lambda;\ \ \alpha + \beta = 1;\ \alpha, \beta > 0 \right\}$ **(0.7)**. Таким образом, выпуклость Λ, например, в соединении с перечисленными необходимыми условиями достаточна для существования $f \in A(\rho)$, для которой $\mathrm{Fr}[f] = \Lambda$ **(0.8)**.

Заметим, что если $\boxtimes\Lambda = \Lambda$, то Λ — выпуклое множество, и из включений (0.6) нельзя извлечь существования $f \in A(\rho(r))$, для которого выполняется (0.8) при невыпуклом Λ.

Напомним [3, с. 170], что множество Y в топологическом пространстве называется *связным*, если не существует двух непустых открытых в X множеств B_1 и B_2 таких, что

$B_i \cap Y \neq \varnothing$, $i = 1, 2$; $B_1 \cap B_2 \cap Y = \varnothing$; $B_1 \cup B_2 \supset Y$.

В §1 будет доказана

Теорема 1. $\mathrm{Fr}[u]$ *связно в* D'.

Может ли быть любое замкнутое, связное инвариантное относительно $(\cdot)_\tau$ множество $\Lambda \subset U[\rho, \sigma]$ предельным для некоторой функции $f \in A(\rho(r))$?

Наиболее простое множество, обладающее перечисленными свойствами вида:
$\Lambda(v) = \mathrm{clos}\{v_\tau : \tau \in (0, \infty)\}$ **(0.9)** — замыкание орбиты $(\cdot)_\tau$, проходящей через $v \in U[\rho, \sigma]$.

Пусть $v \in U[\rho, \sigma]$. Обозначим через $\mathrm{Fr}_0[v]$, $\mathrm{Fr}_\infty[v]$ предельные множества в D' семейства $\{v_\tau\}$ при $\tau \to 0$ и $\tau \to \infty$ соответственно. Это «концы» кривой $\Lambda(v)$, хотя, конечно, возможны случаи, когда кривая «заметает» все $U[\rho, \sigma]$ или вырождается в точку.

Теорема 2. *Для того, чтобы существовала целая функция* $f \in A(\rho(r))$ $(\rho >)$, нецелое), *для которой* $\mathrm{Fr}[f] = \Lambda(v)$ **(0.10)**, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathrm{Fr}_0[v] \cap \mathrm{Fr}_\infty \cancel{[v]} \neq \varnothing$ **(0.11)**.

Доказательство этой теоремы приведено в §3, 4.

Отметим некоторые следствия. Заметим сначала, что если предельное множество $f \in A(\rho(r))$ при $V_t \equiv \mathrm{I}$ (т. е. при $\alpha = 0$) состоит из одной функции $v(z)$, то она имеет вид [2, с. 150] $v(z) = r^\rho h(\varphi)$, $z = re^{i\varphi}$ ***(0.12)***,
где $h(\varphi)$ — ρ — тригонометрически выпуклая, 2π — периодическая функция [4, с. 74], а сама $f(z)$ — функция вполне регулярного роста при уточненном порядке $\rho(r)$ [4, с. 182].

Если в теореме [2] $v(z)$ имеет вид (0.12), то условие (0.11) тривиально выполняется, так как $\Lambda(v)$ состоит лишь из самой v. Поэтому теорему 2 можно рассматривать как обобщение теоремы Бернштейна—Левина ([5]; [4], с. 124) о существовании целой функции вполне регулярного роста с заданным индикатором.

Следствие 1. *Для любого* $\rho(r)$ *при нецелом* ρ *существует* $f \in A(\rho(r))$, *для которой* $\mathrm{Fr}[f]$ *невыпукло*.

В §5 строится пример $v \in U[\rho, \sigma]$, для которой $\Lambda(v)$ невыпукло и удовлетворяет условиям теоремы 2.

Следствие 2. *Если* $v \in U[\rho, \sigma]$ *и для каких-нибудь неравных и конечных* τ_1, τ_2 $v_{\tau_1} = v_{\tau_2}$, *то существует* $f \in A(\rho(r))$, *для которой* $\mathrm{Fr}[f] = \Lambda(v)$.

В §2 показано, что в этом случае v_τ периодическая функция от $\ln\tau$, а для нее $\mathrm{Fr}_0[v] = \mathrm{Fr}_\infty[v] = \{v_\tau \colon \tau \in [1, e^T]\}$ **(0.13)**, где T — период.

Таким образом, условие (0.11) можно рассматривать как обобщение периодичности v_τ по $\ln\tau$.

Следствие 3. *Для любого* $\rho(r)$ *при нецелом* ρ *существуют замкнутые связные инвариантные подмножества* $U[\rho, \sigma]$, *которые не могут быть предельными для* $f \in A(\rho(r))$.

В §5 указывается функция $v \in U[\rho, \sigma]$, для которой пределы $\lim\limits_{\tau\to 0} v_\tau$; $\lim\limits_{\tau\to\infty} v_\tau$ существуют (т. е. $\mathrm{Fr}_0[v]$, $\mathrm{Fr}_\infty[v]$ — одноточечные множества) и не равны.

Там же (теорема 4) описывается конструкция примера $v \in U[\rho, \sigma]$, для которой $\mathrm{Fr}_0[v]$, $\mathrm{Fr}_\infty[v]$ пересекаются, но не вложены друг в друга и не совпадают.

В заключение отметим, что теорема 2 и следствие из нее фактически доказываются для субгармонических функций, а переход к целым (он поясняется в § 4) основан на теореме 2 из [6] об асимптотической аппроксимации субгармонической функции логарифмом модуля целой.

§ 1. Пусть $\{\varphi_k\}$ счетное всюду плотное в D множество, т. е. $\forall\ \varphi \in D \exists \{\varphi_{k_j}\} \subset \{\varphi_k\} : \varphi_{k_j} \to \varphi$ в D'.

Определим в D' метрику d равенством:

$$d(f_1, f_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\langle f_1 - f_2, \varphi_k\rangle|}{1 + |\langle f_1 - f_2, \varphi_k\rangle|}; \ f_1, f_2 \in D'.$$

Из сходимости в D' следует сходимость в метрике d, но не наоборот.

Отметим также, что кривая $\{u_t : t \in (0, \infty)\}$ непрерывна в D' топологии, а значит, и в метрике d.

Доказательство теоремы 1. Допустим, что $\mathrm{Fr}[u]$ несвязно, т. е. $\exists B_1, B_2$ открытые множества в D' такие, что $B_i \cap \mathrm{Fr}[u] \neq \varnothing$ $i = 1, 2$ **(1.1)**; $B_1 \cap B_2 \cap \mathrm{Fr}[u] = \varnothing$ **(1.2)**; $B_1 U B_2 \supset \mathrm{Fr}[u]$ **(1.3)**.

Обозначим $A_i = B_i \cap \mathrm{Fr}[u]$ $i = 1, 2$. Имеем $B_1 \cap A_2 = \varnothing$; $B_2 \cap A_1 = \varnothing$; $A_1, A_2 \subset \mathrm{Fr}[u]$ **(1.4)**.

Используя компактность $\mathrm{Fr}[u]$ и условие (1.4), легко показать, что расстояние $d(A_1, A_2) \overset{def}{=} \inf\{d(x, y) : x \in A_1, y \in A_2\}$ (1.5) положительно.

Пусть $\delta < d(A_1, A_2)/2$ и $G_i = \{f \in D' : d(f, A_i) < \delta\}$ непересекающиеся окрестности A_i в метрике d. Из (1.3) следует, что $G_1 U G_2 \supset \mathrm{Fr}[u]$. Покажем, что существует последовательность $t_j \to \infty$ такая, что $u_{t_j} \notin G_1 U G_2$.

Действительно, пусть $v_1 \in A_1$, $v_2 \in A_2$. Поскольку $v_1, v_2 \in \mathrm{Fr}[u]$, найдутся две последовательности t_{j_1} и t_{j_2} такие, что $u_{t_{j_1}} \to v_1$, $u_{t_{j_2}} \to v_2$ в D', а значит и в метрике d. Поэтому для достаточно больших j $u_{t_{j_1}} \in G_1$, а $u_{t_{j_2}} \in G_2$, а так как $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ и u_t непрерывна по t в метрике d, то существует $t_j \in (t_{j1}, t_{j2})$ такое, когда $u_{t_j} \notin G_1 U G_2$.

Из компактности $\{u_{t_j}\}$ в D', а значит и в d-метрике, следует, что существует $v \in \mathrm{Fr}[u]$, когда $v \notin G_2 U G_2$, а это противоречит соотношению $G_1 U G_2 \supset \mathrm{Fr}[u]$.

Теорема 1 доказана.

§ 2. Докажем следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $v \in U[\rho, \sigma]$ и для каких-нибудь τ_1, τ_2 конечных и не равных друг другу $v_{\tau_1} = v_{\tau_2}$. Тогда v_τ периодиче-*

ская функция от $\lambda = \ln\tau$ *и* $\mathrm{Fr}_0[v] = \mathrm{Fr}_\infty[v] = \{v_\tau : \tau \in [1, e^T]\}$ **(2.1)**, *где* T *— период* v_τ *по* λ.

Доказательство. Пусть $\gamma \overset{\mathrm{def}}{=} e^T$ — наименьшее число, большее единицы, для которого $v_{\tau_1} = v_{\tau_1\gamma}$. Тогда $v_{\tau_1\tau} = v_{\tau_1\gamma\tau}$ для любых $\tau \in (0, \infty)$, что и обозначает периодичность v_τ по $\lambda = \ln\tau$ с периодом T. Соотношение (2.1) очевидно следует из периодичности, что и требовалось доказать.

Доказательство необходимости в теореме 2. Пусть $G_\delta(A)$ — δ-окрестность множества A в метрике d, т. е. $G_\delta(A) = \{T \in D' : d(A, T) < \delta\}$.

Обозначим для краткости также $\mathrm{Fr}_0[v] = F_0$; $\mathrm{Fr}_\infty[v] = F_\infty$. Допустим, что $F_0 \cap F_\infty = \varnothing$ и существует $u \in U(\rho(r))$, для которой $\mathrm{Fr}[u] = \Lambda(v)$.

Так как F_0 и F_∞ компактны, то расстояние между ними в метрике d положительно и найдется $\delta > 0$ такое, что $G_\delta(F_0) \cap G_\delta(F_\infty) = \varnothing$.

Обозначим $\tau_1 = \sup\{\tau : v_\tau \in G_\delta(F_0)\}$ — момент последнего выхода из $G_\delta(F_0)$; $\tau_2 = \inf\{\tau : v_\tau \in G_\delta(F_\infty)\}$ — момент первого входа в $G_\delta(F_\infty)$; $\tau_\infty = \sup\{\tau : v_\tau \notin G_{\tilde\delta}(F_\infty)\}$ — момент последнего входа в $G_{\tilde\delta}(F_\infty)$.

Пусть $\delta_j \to 0$, $j \to \infty$ и $\tilde\delta$ достаточно мало. Кривая u_t, начиная с некоторого момента, последовательно попадает в $G_{\tilde\delta}(F_\infty)$, $G_{\delta_j}(v_{\tau_2})$, $G_{\delta_j}(v_{\tau_1})$.

Обозначим через $t_{j_3} < t_{j_2} < t_{j_1}$ любые последовательные моменты «посещения» этой тройки окрестностей. Будем считать, что они выбраны так, чтобы интервалы (t_{j_3}, t_{j_1}) не пересекались при разных j и докажем следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Существует* N *такое, что* $1 \leqslant t_{j1}/t_{j2} \leqslant N \;\forall$ j.

Доказательство. Отрезок кривой $l_j = \{u_t : t \in [t_{j2}, t_{j1}]\}$ не принадлежит $G_{\tilde\delta}(F_\infty)$ ни при каком j, поэтому

$$\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} l_j\right) \cap G_{\tilde\delta}(F_\infty) = \varnothing. \tag{2.2}$$

Допустим, что $t_{j1}/t_{j2} \to \infty$. Пусть $\tau > \tau_\infty/\tau_2$. Тогда $u_{t_j} \in l_j$ для $t_j = t_{j2}\tau$ и $u_{tj} \to v_{\tau_2\tau}$ при $j \to \infty$.

Так как $\tau_2\tau > \tau_\infty$, то l_j имеет непустое пересечение с $G_{\tilde\delta}(F_\infty)$ при больших j, что противоречит (2.2). Лемма доказана.

Продолжим доказательство необходимости в теореме 2. Пусть $j \to \infty$. Выберем из $\{u_{t_{j_2}}\}$ сходящуюся последовательность. Она может сходиться лишь к v_{τ_2}.

Найдем, используя лемму 2.2, подпоследовательность (обозначения сохраняем) такую, что $\tau_j = t_{j1}/t_{j2} \to \tau \in [1, N]$.

Тогда имеем $u_{t_{j_1}} = (u_{t_{j_2}})_{\tau_j} \cdot (1 + \varepsilon_j)$, где $\varepsilon_j \to 0$, и поэтому $u_{t_{j1}} \to v_{\tau_2\tau}$.

С другой стороны, $u_{t_{j_1}} \to v_{\tau 1}$. Значит, $v_{\tau 1} = v_{\tau_2 \tau}$.

Так как $\tau \geqslant 1$ и $\tau_2 > \tau_1$, то по лемме 2.1 $F_0 = F_\infty$, что противоречит предположению $F_0 \cap F_\infty = \varnothing$.

§ 3. Пусть $\mathbf{M}(\rho(r))$ класс распределений масс (мер) μ, удовлетворяющих условию $\overline{\lim_{r\to\infty}} \mu(r) r^{-\rho(r)} \overset{\text{def}}{=} \Delta(\mu) < \infty$. Семейство μ_t, определенное равенством $\mu_t(E) = \mu(P_t E) t^{-\rho(t)}$, компактно в D' при $t \to \infty$ и для него, так же как и для u_t определяется предельное множество $\mathrm{Fr}[\mu]$, состоящее из неотрицательных мер.

Обозначим через $\mathbf{M}[\rho, \sigma]$ класс мер ν, удовлетворяющих условию $\nu(R) \leqslant \sigma R^\rho$, $\forall R > 0$, где $\nu(R)$ — масса круга $K_R = \{|z| < R\}$, а через $(\cdot)_\tau$ — преобразование, заданное равенством $\nu_\tau(E) = \nu(P_\tau E)\tau^{-\rho}$ для борелевских множеств E.

В [2] (теорема 1.2.2) было показано, что для $\mu \in \mathbf{M}(\rho(r))$ множество $\mathrm{Fr}[\mu]$ замкнуто в D', инвариантно относительно преобразования $(\cdot)_\tau$, содержится в $\mathbf{M}[\rho, \sigma]$. Если $u \in U(\rho(r))$ и μ_u — распределение масс, ассоциированное по Риссу с $u(z)$, то $(\mu_u)_t = \mu_{u_t}$ и для множества $\mu_{\mathrm{Fr}[u]} \overset{\text{def}}{=} \{\mu_v : v \in \mathrm{Fr}[u]\}$ верно равенство $\mu_{\mathrm{Fr}[u]} = \mathrm{Fr}[\mu_u]$.

Дословным повторением рассуждений § 1 может быть доказана

Теорема 1′. $\mathrm{Fr}[\mu]$ *связно в* D'. *Пусть* $\nu \in \mathbf{M}[\rho, \sigma]$. *Пусть* $M(\nu) = \mathrm{clos}\{\nu_\tau : \tau \in (0, \infty)\}$ — *замыкание орбиты преобразования* P_τ, *проходящей через* ν.

Обозначим через $\mathrm{Fr}_0[\nu]$, $\mathrm{Fr}_\infty[\nu]$ — *предельные множества семейства* $\{\nu_\tau\}$ *при* $\tau \to 0, \infty$, *«концы» кривой* $M(\nu)$.

В этом § будет доказана имеющая и самостоятельное значение

Теорема 2′. *Для того, чтобы существовала мера* $\mu \in \mathbf{M}(\rho(r))$, *для которой* $\mathrm{Fr}[\mu] = M(\nu)$ **(3.1)**, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathrm{Fr}_0[\nu] \cap \mathrm{Fr}_\infty[\nu] \neq \varnothing$ **(3.2)**.

В следующем § эта теорема будет использована для доказательства теоремы 2.

Доказательство необходимости условия (3.2) является дословным повторением доказательства необходимости теоремы 2, приведенного в § 2.

Для доказательства достаточности нам понадобится следующая

Лемма 3.1. *Пусть* μ_j — *компактное семейство в* D', *и* $\mu_j \to \gamma \in \mathbf{M}[\rho, \sigma]$ *на функциях из* D, *финитных в окрестности нуля. Тогда* $\mu_j \to \gamma$ *и в* D' *(т. е. на функциях, финитных лишь в бесконечности)*. Доказательство опускаем.

Опишем конструкцию меры μ, удовлетворяющей (3.1). Обозначим для краткости $\mathrm{Fr}_0[\nu] = F_0$; $\mathrm{Fr}_\infty[\nu] = F_\infty$. Из условия (3.2) следует, что существуют две последовательности $\tau_{j\infty} \to \infty$, $\tau_{j0} \to 0$ и $\varkappa \in F_0 \cap F_\infty$ такие, что выполняются условия

$$\lim_{j\to\infty} \nu_{\tau_{j0}} = \lim_{j\to\infty} \nu_{\tau_{j\infty}} = \varkappa. \qquad (3.3)$$

Без ограничения общности можно считать, что выполняется условие $\varkappa(S_1)=0$ **(3.4)**, где $S_1=\{|z|=1\}$.

Действительно, всегда можно найти τ так, чтобы $\varkappa(\tau S_1)=0$ и вместо меры $\varkappa$ рассмотреть меру $\varkappa'=\varkappa\tau\in F_0\cap F_\infty$, а последовательности τ_{j0} и $\tau_{j\infty}$ заменить на последовательности $\tau'_{j0}=\tau_{j0}\tau$; $\tau'_{j\infty}=\tau_{j\infty}\tau$, для которых выполняется условие

$$\lim \nu_{\tau'_{j0}}=\lim \nu_{\tau'_{j\infty}}=\varkappa'. \tag{3.5}$$

Определим последовательности r_j, r'_j индуктивно следующим образом:

$$r'_1=1;\quad r_j=r'_j/\tau_{j0};\quad r'_{j+1}=r_j\tau_{j\infty}\quad j=\overline{1,\ \infty}.$$

Эти последовательности перемежаются. Обозначим $\tau_j=1/r_j$ и определим меру μ равенствами

$$d\mu=L(r)\,d\nu_{\tau_j}\ \text{ для }\ r'_j<|z|<r'_{j+1}, \tag{3.6}$$

где $L(r)=r^{\rho(r)-\rho}$.

Можно показать, что $\mu\in\mathbf{M}(\rho(r))$ и что для этой меры выполняется (3.1). Сначала докажем включение $\mathrm{Fr}[\mu]\supset M(\nu)$ **(3.7)**.

Пусть $t_j=r_j$. Покажем, что $\mu_{t_j}\to\nu$ **(3.8)**.

Пусть $\varphi\in D$ финитна в нуле. При больших j $\operatorname{supp}\varphi(z/r_j)$ содержится в кольце $r'_j<|z|<r'_{j+1}$. Поэтому

$$\int\varphi d\mu=\int\varphi(z/r_j)\frac{r_j^{-\rho}}{r_j^{\rho(r)-\rho}}\,d\mu=r_j^{-\rho}\int\varphi(z/r_j)\frac{L(|z|)}{L(r_j)}\,d\nu_{1/r_j}=$$
$$=\int\frac{L(r_j\zeta)}{L(r_j)}\varphi(\zeta)\,d\nu,$$

где $0<1/C\leqslant|\zeta|\leqslant C<\infty$.

Из свойств уточненного порядка получаем, что $\frac{L(r_j\zeta)}{L(r_j)}\to 1$ и, значит, $\int\varphi d\mu_{t_j}\to\int\varphi d\nu$ **(3.9)**. По лемме 3.1 из (3.9) имеем (3.8).

Из инвариантности и замкнутости $\mathrm{Fr}[\mu]$ следует (3.7).

Докажем включение $M(\nu)\supset\mathrm{Fr}[\mu]$ **(3.10)**. Пусть $t_j=r'_j$. Покажем, что $\mu_{t_j}\to\varkappa$ **(3.11)**. Для $\varphi\in D$, финитных в окрестности нуля, $\operatorname{supp}\varphi(z/t_j)\subset\{t_j/c<|z|<ct_j\}$ для достаточно больших j. Поэтому $\int\varphi(\zeta)\,d\mu_{t_j}=t_j^{-\rho}\int\varphi\left(\frac{z}{t_j}\right)\frac{1}{L(t_j)}\,d\mu=\int\limits_{|\zeta|<1}\varphi(\zeta)\frac{L(\zeta r'_j)}{L(r_j)}\,d\nu_{\tau_{j0}}+$
$+\int\limits_{|\zeta|\leqslant 1}\varphi(\zeta)\frac{L(\zeta r_j)}{L(r_j)}\,d\nu_{\tau_{j-1\infty}}.$

Используя условие (3.3), (3.4), покажем, что $\lim\limits_{j\to\infty}\int\varphi(\zeta)\,d\mu_{t_j}=$
$=\int\varphi d\varkappa$. Из леммы 3.1 следует (3.11).

Докажем, что для любой последовательности $t_j\to\infty$, такой, что μ_{t_j} сходится, $\lim\mu_{t_j}\in M(\nu)$ **(3.12)**.

Обозначим через T_1 класс последовательностей $\{t_j\}$, для которых существует $c>1$ такое, что объединение интервалов $\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{c}r_j,\ cr_j\right)$ содержит бесконечное число членов последовательности. К классу T_2 отнесем остальные последовательности. Пусть $\{t_j\}\in T_2$. Пусть $\varphi\in D$ и финитна в нуле. Тогда при больших j $\operatorname{supp}\varphi\subset\{z: r_j'<|z|<r_{j+1}\}$ и, значит, $\int\varphi(\zeta)\,d\mu_{t_j}=\int\varphi(\zeta)\times\times\frac{L(t_j\zeta)}{L(t_j)}\,d\nu_{\tau_j}$ **(3.13)**, где $\tau_j=t_j/r_j$.

Так как слева предел существует по предположению, то можно считать, что в (3.13) выбрана подпоследовательность, для которой $\nu_{t_j}\to\gamma\in M(\nu)$. Поэтому выполняется (3.12).

Пусть $\{t_j\}\in T_1$ и $\mu_{t_j}\to\lambda\in\operatorname{Fr}[\mu]$. Выберем подпоследовательность (мы сохраним за ней то же обозначение), для которой $\tau_j\overset{\text{def}}{=}\frac{t_j}{r_j'}\to\tau$. Пусть $\varphi\in D$ и финитна в нуле. Тогда имеем $\int\varphi(\zeta)\times\times\,d\mu_{t_j}=\int\varphi(\zeta)\frac{L(t_j\zeta)}{L(t_j)}\,d\nu_{\tau_{j0}\tau}\to\int\varphi(\zeta)\,d\varkappa_\tau$. Следовательно, и в этом случае выполняется (3.12). Тем самым (3.12) полностью доказано и, значит, доказано (3.10). Вместе с (3.7) это доказывает достаточность условия (3.2) в теореме 2′. Теорема 2′ доказана полностью.

§ 4. Докажем достаточность условия (0.11) в теореме 2. Пусть ν — распределение масс, ассоциированное по Риссу с функцией v. Будем обозначать $\mu[u]$ — распределение масс вида $\mu[u]=\Delta u/2\pi$, где Δ — оператор Лапласа в D'. Тогда, как можно показать, $_\tau=\mu[v_\tau]$; $\operatorname{Fr}_0[\nu]=\{\gamma=\mu[w]: w\in\operatorname{Fr}_0[v]\}$; $\operatorname{Fr}_\infty[\nu]=\{\gamma=\mu[w]:$ $: w\in\operatorname{Fr}_\infty[v]\}$ **(4.1)**; $M(\nu)=\{\gamma=\mu[w]: w\in\Lambda(v)\}$ **(4.2)**.

Очевидно, что из условия (0.11) и равенств (4.1) следует, что выполняется условие (3.2) теоремы 2′. Построим по теореме 2′ меру μ, для которой $\operatorname{Fr}[\mu]=M(\nu)$, $\mu\in\mathbf{M}(\rho(r))$, и рассмотрим канонический потенциал

$$u(z)=\mathrm{J}(z,\ \mu)=\int_{C}H\left(\frac{z}{\zeta},\ p\right)d\mu(\zeta).$$

Нам понадобится следующая

Лемма А [2, с. 151]. *Пусть $H(z)$ — гармоническая функция в $\mathbf{C}$, принадлежащая $U[\rho,\ \sigma]$, при каком-нибудь σ и нецелом $\rho>0$. Тогда $H(z)\equiv0$.*

Покажем, что $\operatorname{Fr}[u]=\Lambda(v)$ **(4.3)**.

Пусть $w\in\operatorname{Fr}[u]$. Тогда $\mu[w]\in\operatorname{Fr}[\mu[u]]=M(\nu)$. Найдем, используя равенство (4.2), ту функцию $w_1\in\Lambda(v)$, для которой $\mu[w_1]=$ $=\mu[w]$. Тогда функция $H=w-w_1$ гармоническая и по лемме А $H\equiv0$. Значит, $w_1\in\Lambda(v)$ и $\operatorname{Fr}[u]\subset\Lambda(v)$ **(4.4)**. Допустим $w\in\Lambda(v)$. Тогда $\mu[w]\in M(\nu)=\operatorname{Fr}[\mu]$. Пусть $t_j\to\infty$ и $\mu_{\tau_j}\to\mu[w]$. Соответствующая последовательность $u_{t_j} \to w_1 \in \mathrm{Fr}[u]$. Покажем, что $w = w_1$. Имеем

$$\mu[w_1] = \lim \mu[u_{t_j}] = \lim \mu_{t_j} = \mu[w].$$

Поэтому разность $w - w_1 \overset{\mathrm{def}}{=} H$ — гармоническая функция и, значит, по лемме $w - w_1 \equiv 0$. Отсюда $\Lambda(v) \subset \mathrm{Fr}[u]$, а вместе с (4.4) это дает (4.3).

Переход к целым функциям осуществляется на основе следующего утверждения.

Лемма 4.1. Пусть $u \in U(\rho(r))$. Существует $f \in A(\rho(r))$, для которой $\mathrm{Fr}[u] = \mathrm{Fr}[f]$.

Чтобы ее доказать, напомним, что множество C называется C_0^α-множеством, если его можно покрыть системой кружков $k_j = \{|z - z_j| < \delta_j\}$ со свойством $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{R^\alpha} \sum\limits_{|z_j|<R} \delta_j^\alpha = 0$.

C_0^α-свойство сохраняется при увеличении α. Мы используем следующие два утверждения.

Теорема В [2, теорема 4.3.1]. *Пусть $u = u_1 - u_2$, $u_1, u_2 \in U(\rho(r))$ и соотношение $u(z)|z|^{-\rho(|z|)} \to 0$ выполняется при $z \to \infty$ вне некоторого C_0^2-множества. Тогда $u_t \to 0$ в D' при любом семействе V_t.*

Теорема С [6, теорема 2]. *Пусть $u \in U(\rho(r))$. Существует $f \in A(\rho(r))$ такая, что*

$$u(z) - \ln|f(z)| = o(|z|^{\rho(|z|)})$$

при $z \to \infty$ вне некоторого C_0^1-множества.

Так как C_0^1-множество является C_0^2-множеством, то из теорем В и С непосредственно следует лемма 4.1.

Таким образом, доказательство теоремы 2 завершено.

§ 5. Докажем следствия 1—3, а также построим пример функции $v \in U[\rho, \sigma]$, для которой $\mathrm{Fr}_0[v]$, $\mathrm{Fr}_\infty[v]$ не вложены, но пересекаются.

Следствие 2 вытекает из леммы 2.1 и теоремы 2.

Докажем следствие 1. Полагаем $d\nu = (1 - \cos\ln r) \times r^{\rho-1}\,dr\,d\varphi$.

Легко видеть, что $\nu \in \mathbf{M}[\rho, \sigma]$ при $\sigma = 2/\rho$. Далее $d\nu_\tau = (1 - \cos(\ln r + \ln\tau))\,r^{\rho-1}dr\,d\varphi$.

Покажем, что $\Lambda(v)$ невыпукло. Заметим предварительно, что тождество по α $\lambda\sin^2\alpha + \mu\cos^2\alpha = \cos^2(\alpha+\gamma)$ **(5.1)** не может быть верным ни при каком γ, если $\lambda + \mu = 1$; $\lambda > 0$; $\mu > 0$, так как при $\alpha = -\gamma$ получаем противоречие. Положим $\tau_1 = 1$; $\tau_2 = e^\pi$ и фиксируем положительные λ и μ, удовлетворяющие условию $\lambda + \mu = 1$. Равенство $\nu_\tau = \lambda\nu_{\tau_1} + \mu\nu_{\tau_2}$ **(5.2)** при некотором τ сводится к равенству соответствующих плотностей, т. е. к тождеству по r $1 - \cos(\ln r + \ln\tau) = \lambda(1 - \cos\ln r) + \mu(1 - \cos(\ln r + \pi))$, которое сводится к тождеству (5.1) заменой $\ln r = 2\alpha$, $\ln\tau = 2\gamma$.

То есть (5.2) невозможно и, значит, $M(\nu)$ невыпукло. Рассмотрим $v(z)=\int\limits_C H(z/\zeta,\ p)\,d\nu(\zeta),\ p=[\rho]$ **(5.3).**

Можно показать, что $v\in U[\rho,\ \sigma]$ при некотором σ. Из невыпуклости $M(\nu)$ следует невыпуклость $\Lambda(v)$, так как $(\mu[v])_\tau=\mu[v_\tau]$.

Докажем следствие 3. Полагаем $d\nu=\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\ln r\right)\times r^{\rho-1}dr\,d\varphi$. Легко проверить, что

$$\lim_{\tau\to 0}\nu_\tau=0;\quad \lim_{\tau\to\infty}\nu_\tau=\omega,$$

где $d\omega=\pi r^{\rho-1}dr\,d\varphi$, т. е. $\mathrm{Fr}_0[\nu]$, $\mathrm{Fr}_\infty[\nu]$ одноточечные и не совпадают. Тогда $v(z)$, построенная по формуле (5.3), обладает одноточечными и не совпадающими $\mathrm{Fr}_0[v]$ и $\mathrm{Fr}_\infty[v]$.

По теореме 2 $\Lambda(v)$ не может служить предельным множеством ни для какой функции $u\in U(\rho(r))$, что доказывает следствие 3.

В заключение докажем следующее.

Теорема 4. *Существует $v\in U[\rho,\ \sigma]$ ($\rho>0$ нецелое), для которой $\mathrm{Fr}_0[v]$ и $\mathrm{Fr}_\infty[v]$ пересекаются, но не совпадают и не вложены друг в друга.*

Для доказательства используем следующую лемму.

Лемма 5.2. *Пусть M_0, $M_\infty\subset\mathbf{M}[\rho,\ \sigma]$ — выпуклые инвариантные относительно $(\cdot)_\tau$ множества. Существует мера $\nu\in\mathbf{M}[\rho,\ \sigma]$ такая, что* $\mathrm{Fr}_0[\nu]=M_0$; $\mathrm{Fr}_\infty[\nu]=M_\infty$ **(5.4).**

Остановимся кратко на ее доказательстве. По теореме 3.1.2 из [2] существует мера $\mu^\infty\in\mathbf{M}[\rho,\ \sigma]$, которую можно считать финитной в нуле и для которой выполняется соотношение $M_\infty\subset\mathrm{Fr}[\mu^\infty]\subset\boxtimes M_\infty$ **(5.5)**, где $\boxtimes M_\infty\overset{\mathrm{def}}{=}\{\nu=a\mu_1+b\mu_2:\mu_1,\ \mu_2\in M_\infty;\ a+b=1;\ a,\ b>0\}$. Так как M_∞ выпукло, то правая и левая части включений (5.5) совпадают и, значит, $\mathrm{Fr}[\mu^\infty]=\mathrm{Fr}_\infty[\mu^\infty]=M_\infty$.

Конструкцию, аналогичную использованной, при доказательстве теоремы 3.1.2 из [2] можно применить для построения меры μ^0, для которой $M_0\subset\mathrm{Fr}_0[\mu^0]\subset\boxtimes M_0$. Поэтому для выпуклого множества M_0 имеем $\mathrm{Fr}_0[\mu^0]=M_0$.

Далее полагаем $d\nu=\begin{cases} d\mu^0 & \text{для } |z|<1\\ d\mu^\infty & \text{для } |z|\geqslant 1.\end{cases}$ Очевидно, что ν обладает свойствами (5.4). Лемма 5.1 доказана.

Докажем теорему 4. Обозначим через ω меру, заданную равенством $d\omega=r^{\rho-1}dr\,d\varphi$, и положим, например, $M_0=\{\mu=a\omega:a\in[0,\ 1]\}$; $M_\infty=\{\mu=a\omega:a\in[1,\ 2]\}$. Множества M_0, M_∞, очевидно, удовлетворяют условиям леммы 5.1, пересекаются по ω и не вложены друг в друга. Можно показать, что $v(z)$, определенная равенством (5.3), где v найдена по лемме 5.1, удовлетворяет утверждениям теоремы 4.

Список литературы: 1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики.— М.: ФМЛ, 1971.— 510 с. 2. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка.— Мат. сб., 1979, 108 (150), № 2, с. 147—167. 3. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры.— М.: ФМЛ, 1971.—272 с. 4. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.— 630 с. 5. *Bernstein V.* Sur les propriétés caractérisques des indicatrices de croissance.— C. R. 202, 1936, p. 108—110. 6. *Азарин В. С.* О лучах вполне регулярного роста целой функции.— Мат. сб., 1969, 79 (121), № 4, с. 463—476.

Поступила в редколлегию 03.10.80.