УДК 517.97

Л. А. ОСТРОМУХОВ

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ВЕЙЛЕВСКОГО УЗЛА В C^4

В работах [4—7, 3] В. К. Дубовой изучал вейлевское семейство узлов $\tau(z) = (A + N(z),\ H_{\tilde{u}u},\ K,\ E_v)$* и его характеристическую оператор-функцию

$$I - iK(A + N(z))^{-1}K^{+} \tag{1}$$

для вещественного параметра $z = (z_0, z_1, z_2, z_3)$ внутри светового конуса.

Будем называть (1) характеристической функцией (х. ф.) вейлевского узла

$$\theta = (A,\ H_{\tilde{u}u},\ K,\ E_v), \tag{2}$$

обозначая ее $W_\theta(z)$ и подразумевая под ее областью определения множество тех z, для которых существует и ограничен оператор $(A + N(z))^{-1}$.

В данной работе х. ф. (1) изучается как функция комплексного параметра $z \in C^4$ в области $D = \{z_0^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} z_\alpha^2 \neq 0\}$. Указана связь ее области определения со спектром оператора A, показано, что она является в трубе будущего несжимающей, а в трубе прошлого—нерастягивающей относительно метрики пространства E. Получено другое описание класса х. ф. вейлевских узлов. Отметим, что мультипликативное представление х. ф. вейлевского узла, найденное в [7] для z, лежащих внутри светового конуса, легко выписать в области D, где оно имеет такой же вид.

1. Как известно [8], конечномерное неприводимое представление вещественной группы $L_+^\uparrow$ допускает единственное аналитическое продолжение на собственную комплексную группу Лоренца $L_+(C)$. Можно показать, что условия инвариантности узла (2) относительно группы $L_+^\uparrow$.

$$\tilde{u}_g A = A u_g,\ v_g K = K u_g,\ \tilde{u}_g K^{+} = K^{+} v_g$$

---

* $\tilde{u}$, u, v — представления собственной вещественной группы Лоренца $L_+^\uparrow$, распадающиеся на неприводимые спинорные представления рангов (1, 0) и (0, 1), узел $\theta = \tau(0)$ инвариантен относительно группы $L_+^\uparrow$, $N(z) = -z_0 1 + \sum_{\alpha=1}^{3} z_\alpha N_\alpha$, а N_α совпадают с инфинитезимальными операторами представления u, отвечающим гиперболическим вращениям.

при аналитическом продолжении представлений $\tilde{u}, u, v$ на группу $L_+(C)$ остаются справедливыми, т. е. узел (2) можно считать инвариантным относительно $L_+(C)$. При этом его х. ф. (1) преобразуется по закону [5,3] ($g \in L_+(C)$): $W_\theta(gz) = v_g W_\theta(z) v_g^{-1}$. (3)

Пусть $V_\pm$ — соответственно верхняя и нижняя полы светового конуса; $T_\pm = R^4 + iV_\pm$ — соответственно трубы будущего и прошлого [8]. Заметим, что квадратичная форма $l^2(z) = z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$ ($z = z_0, z_1, z_2, z_3$)) принимает в V_+ все положительные, а в T_+ — все комплексные значения, кроме неотрицательных.

Таким образом, $l^2(z)$ принимает внутри $T' \cup V'$ все комплексные значения, кроме нуля (здесь $T' = \bigcup gT_+$, $V' = \bigcup gV_+$ ($g \in L_+(C)$)).

Группа $\overset{2}{\otimes} SL(2C)$ является односвязной накрывающей группы $L_+(C)$ [8]. Обозначим преобразование, отвечающее паре $(\pm a, \pm b) \in \overset{2}{\otimes} SL(2C)$, через $g(a, b)$. Заметим, что $-I \in L_+(C)$.

Если $l^2(z) \neq 0$, то существует $g \in L_+(C)$, что

$$z = g(\lambda, 0, 0,0) \quad (\lambda^2 = l^2(z)). \tag{4}$$

Действительно, паре $(\lambda^{-1} \sum_0^3 z_k \sigma_k, I) \in \overset{2}{\otimes} SL(2C)$ отвечает нужное преобразование Лоренца $\Big($$\sigma_k$ — известные матрицы Паули:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Big).$$

Отсюда вытекает, что:

1) поверхности $l^2(z) = c$ ($c \neq 0$) являются поверхностями транзитивности группы $L_+(C)$;

2) $D = T' \cup V' = \{z \in C^4 : l^2(z) \neq 0\}$.

Из группового закона преобразования (3), связности группы $L_+(C)$, теорем 9.1, 9.3 [1] и того, что $-I \in L_+(C)$, вытекает следующее утверждение, описывающее связь между множеством регулярных точек оператора A и областью определения х. ф. (1) узла (2).

Утверждение 1. Пусть $\theta = (A, H_{\tilde{u}u}, K, E_v)$ — вейлевский узел, $W_\theta(z) = I - iK(A + N(z))^{-1}K^+$ — его х. ф. Тогда:

α) если $\lambda \in \sigma(A)$, то также $-\lambda \in \sigma(A)$*;

β) множество точек, в которых $W_\theta(z)$ голоморфна, есть связная область, получающаяся исключением из области $D = \{z \in C^4 : l^2(z) \neq 0\}$ поверхностей вида $l^2(z) = \lambda^2$, $\lambda \in \sigma(A)$;

γ) если $\sqrt{l^2(z)} \in \sigma(A)$, то не существует окрестности точки z, в которой можно было бы задать голоморфную функцию, совпадающую с $W_\theta(z)$ в D.

---

* Через $\sigma(A)$ обозначен спектр оператора A.

2. Рассмотрим х. ф. вейлевского узла в $T_+ \bigcup T_-$. Для каждого $z \in T_+ \bigcup T_-$ существует $g \in L_+^\uparrow$, что $gz = (x_0' + iy_0', x_1', x_2', x_3')$. Так как при фиксированных вещественных x_α' совокупность

$(A + \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha' N_\alpha, H, K, E)$ образует узел, а фигурирующее в (3)

представление v унитарно на группе $L_+^\uparrow$, то х. ф. является в трубе будущего несжимающей, а в трубе прошлого нерастягивающей функцией относительно метрики пространства E.

Из соотношений (3), (4) и свойств класса Ω_J [3] вытекает также, что характеристическая функция вейлевского узла нормирована на бесконечности условием $\| W_0(z) - I \| \to 0$, $l^2(z) \to \infty$.

3. В [3, гл. X, § 4] и [6] выделен класс Ω_{Jv} х. ф. вейлевских узлов, рассматриваемых как функции вещественного параметра $z \in V_+ \bigcup V_-$, причем показано, что размерность внешнего пространства можно считать кратной 4. $[E, E]$-значную функцию $W(z)$ $(z = (z_0, z_1, z_2, z_3))$ будем относить к классу $\Omega_{Jv}(C)$, если E — унитарное пространство размерности $4r$, в котором заданы представление v группы $L_+(C)$ и оператор J $(J^2 = I,\ J = J^*)$, имеющие в некотором ортонормированном базисе вид

$$v_{g(a,\, b)} = \begin{pmatrix} I_r \otimes a & 0 \\ 0 & I_r \otimes b^{-1\text{тр}} \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_r \otimes I_2 \\ I_r \otimes I_2 & 0 \end{pmatrix}$$

(I_m — единичная матрица m-го порядка), и если: (i) функция $W(z)$ голоморфна в области D_W, получающейся при исключении из области D поверхностей вида $l^2(z) = \lambda^2$, где λ принадлежит некоторому ограниченному множеству, предельные точки которого (если они существуют) вещественны: (ii) $W(z_0, 0, 0, 0) \in \Omega_J$, ($iii$) $W(gz) = v_g W(z) v_g^{-1}$ $(z \in D_W)$.

Утверждение 2. Пусть в пространстве E размерности $4r$ действует представление v группы $L_+(C)$ и пусть метрика в E задается оператором J $(J^2 = I,\ J = J^*)$. Для того чтобы заданная $[E, E]$-значная функция $W(z)$ $(z \in C^4)$ была х. ф. некоторого вейлевского узла, необходимо и достаточно, чтобы $W(z) \in \Omega_{Jv}(C)$.

Из рассуждений п. 1 вытекает, что всякая функция $W(z) \in \Omega_{Jv}$ $(z \in V_+ \bigcup V_-)$ допускает продолжение в C^4 такое, что $W(z) \in \Omega_{Jv}(C)$. Доказательство обратного включения классов основывается на следующей идее.

Рассмотрим t-тензорное произведение представлений $g \to v_g$ и $g \to v_g^{-1\text{тр}}$. Оно распадается на представления, кратные неприводимым спинорным ранга (0, 0), (1, 1), (2, 0) и (0, 2). Функция, удовлетворяющая (iii), принимает значения в подпространстве пространства $[E, E]$, инвариантном относительно представления t, и не может иметь составляющих ранга (2, 0) и (0, 2) (на это обратил внимание Г. Я. Любарский). Так как $-I \in L_+(C)$, то составляющая $W(z)$, кратная представлению ранга (0, 0), четная, а составляющая, кратная представлению ранга (1, 1) — нечетная функция. Отсюда и из (i) вытекает разложение $W(z) = \tilde{\omega}(l^2(z)) + \sum_{k=0}^{3} z_k \omega_k (l^2 z)) (z \in D_W)$, причем ($\alpha = 1, 2, 3$): $\tilde{\omega}(l^2(z)) Q_\alpha = Q_\alpha \tilde{\omega}(l^2(z))$; $\omega_\alpha (l^2(z)) = 2Q_\alpha \omega_0 (l^2(z)) = -2\omega_0 (l^2(z)) Q_\alpha$, где Q_α — инфинитезимальные операторы представления v, отвечающие гиперболическим вращениям в плоскости ($\operatorname{Re} z_0$, $\operatorname{Re} z_\alpha$).

Таким образом, условия класса Ω_{Jv} [3] для функций класса $\Omega_{Jv}(C)$ имеют место.

Автор выражает благодарность В. К. Дубовому за постановку задачи и руководство работой и М. С. Лившицу за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М., «Наука», 1969. 297 с.
2. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М., Физматгиз, 1955. 368 с.
3. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Харьков, изд-во Харьк. ун-та, 1971. 160 с.
4. Дубовой В. К. Вейлевские семейства операторных узлов и соответствующие им открытые поля. — В кн: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 14, Харьков, 1971, с. 67—82.
5. Дубовой В. К. О характеристической оператор-функции вейлевского семейства узлов. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 15. Харьков, 1972, с. 12—19.
6. Дубовой В. К. Об основных свойствах характеристических оператор-функций вейлевских семейств узлов.— «Вестн. Харьк. ун-та. Математика и механика», 1972, т. 37, с. 30—40.
7. Дубовой В. К. Мультипликативное представление характеристической оператор-функции вейлевского семейства узлов.— «Вестн. Харьк. ун-та, «Математика», 1973, т. 38, с. 26—32.
8. Стритер Р., Вайтман А. PCT, спин и статистика и все такое. М., «Наука», 1966. 251 с.

Поступила 15 мая 1975 г.