УДК 517.9

Т. В. МИСЮРА

ХАРАКТЕРИСТИКА СПЕКТРОВ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ И АНТИПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, ПОРОЖДАЕМЫХ ОПЕРАЦИЕЙ ДИРАКА (I)

Рассмотрим операцию Дирака $D\vec{y} = B\frac{d}{dx}\vec{y} + \Omega(x)\vec{y}$, где $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & r(x) \\ r(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, а $p(x)$ и $r(x)$ — вещественные периодические $(p(x) \equiv p(x+\pi),\ r(x) \equiv r(x+\pi))$ функции, принадлежащие $L_2[0, \pi]$. Пусть $\{\mu_{2k}^{\pm}\}$ — собственные значения периодической $(\vec{y}(0) = \vec{y}(\pi))$, а $\{\mu_{2k+1}^{\pm}\}$ — собственные значения антипериодической $(\vec{y}(0) = -\vec{y}(\pi))$ краевых задач, порождаемых операцией D. На дифференцируемых вектор-функциях, удовлетворяющих периодическим (антипериодическим), краевым условиям, оператор D является самосопряженным. Следовательно, числа $\mu_m^{\pm}$ — вещественны.

Целью работы является отыскание необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять две последовательности вещественных чисел для того, чтобы они были спектрами периодической и антипериодической задач, порождаемых одной и той же операцией D. Аналогичный вопрос для оператора Хилла был рассмотрен в работе [1], результаты и методы которой существенно используются в настоящей статье.

Обозначим через $\vec{e}(z, x) = (e_1(z, x), e_2(z, x))$ решение уравнения

$$D\vec{y} = z\vec{y} \tag{1}$$

при начальных данных $\vec{e}(z, 0) = (1, i)$. Условимся в дальнейшем обозначать через $\bar{f}(z, x)$ функцию $f(\bar{z}, x)$. Из вещественности матриц B, $\Omega(x)$ следует, что вектор-функция $\vec{\bar{e}}(z, x) = (\bar{e}_1(z, x), \bar{e}_2(z, x))$ тоже удовлетворяет уравнению (1) и начальным данным $\vec{\bar{e}}(z, 0) = (1, -i)$. Так как вронскиан решений

$$e_1(z, x)\bar{e}_2(z, x) - \bar{e}_1(z, x)e_2(z, x) = -2i \neq 0, \tag{2}$$

то они линейно независимы, и общее решение уравнения имеет вид $\vec{y}(z, x) = C_1\vec{e}(z, x) + C_2\vec{\bar{e}}(z, x)$.

Следовательно, для того чтобы число z было собственным значением периодической (антипериодической) задачи, необходимо и достаточно, чтобы уравнения

$$C_1\vec{e}(z, 0) + C_2\vec{\bar{e}}(z, 0) = \pm [C_1\vec{e}(z, \pi) + C_2\vec{\bar{e}}(z, \pi)] \tag{3}$$

относительно коэффициентов C_1, C_2, которые, очевидно, эквивалентны системам $C_1[e_1(z, 0) \mp e_1(z, \pi)] + C_2[\bar{e}_1(z, 0) \mp \bar{e}_1(z, \pi)] = 0$; $C_1[e_2(z, 0) \mp e_2(z, \pi)] + C_2[\bar{e}_2(z, 0) \mp \bar{e}_2(z, \pi)] = 0$ имели ненулевое решение. (Здесь верхний знак соответствует периодической, а нижний — антипериодической задачам). Учитывая равенство (2), находим, что определитель этих систем равен $\chi(z) \mp 1$, где $\chi(z) = \frac{1}{4i}\{[e_2(z, \pi] + ie_1(z, \pi)] - [\bar{e}_2(z, \pi) - i\bar{e}(z, \pi)]\}$.

Таким образом, собственные значения периодической (антипериодической) задачи совпадают с корнями уравнения

$$\chi(z) = \pm 1. \tag{4}$$

В дальнейшем удобнее пользоваться другой фундаментальной системой решений уравнения (1). Будем искать решение уравнения (1) в виде $\vec{y}(z, x) = e^{-izx}\{Z_1(z, x)\vec{p}_1 + Z_2(z, x)\vec{p}_2\}$, где $\vec{p}_1 = (-1, i)$, $\vec{p}_2 = (1, i)$. Тогда для функций $Z_1(z, x)$ и $Z_2(z, x)$ получим систему уравнений

$$Z_1'(z, x) - 2izZ_1(z, x) = Q(x)Z_2(z, x);$$

$$Z_2'(z, x) = \overline{Q(x)}Z_1(z, x), \tag{5}$$

где $Q(x) = -r(x) + ip(x)$.

Лемма 1. *Если функция $Q(x)$ имеет $n \geqslant 0$ локально суммируемых производных, то система (5) имеет решение вида*

$$Z_1(z, x) = \sum_{j=1}^{n}\frac{a_j(x)}{(2iz)^j} + \frac{a_n(z, x)}{(2iz)^n};\ Z_2(z, x) = 1 + \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j(x)}{(2iz)^j} + \frac{b_n(z, x)}{(2iz)^n}. \tag{6}$$

причем

1) *функции* $a_j(x)$, $b_j(x)$ $(j=1, 2, \dots n)$ *определяются из рекуррентных формул:*

$$a_1(x) = -Q(x),\ a_j(x) = a'_{j-1}(x) - Q(x)\, b_{j-1}(x);$$
$$b_j(x) = \int\limits_0^x \overline{Q(t)}\, a_j(t)\, dt \ \ (j = 1, 2, \dots n); \tag{7}$$

2) *функции* $a_n(z, x)$, $b_n(z, x)$ *представимы в виде*

$$a_n(z, x) = e^{2izx} \int\limits_0^x K(x, t)\, e^{-2izt} dt; \tag{8}$$

$$b_n(z, x) = \int\limits_0^x \overline{Q(t)}\, a_n(z, t)\, dt = \int\limits_0^x e^{2izt} \int\limits_0^{x-t} \overline{Q(t+\xi)}\, K(t+\xi, \xi)\, d\xi\, dt, \tag{9}$$

где $\int\limits_0^x |K(x, t)|\, dt < \infty$.

Доказательство. Подставляя (6) в (5) и приравнивая коэффициенты при $(2iz)^{-j}$ $(j = 1, 2, \dots n)$, находим, что (6) является решением системы (5), если

$$a_1(x) = -Q(x),\ \ a_j(x) = a'_{j-1}(x) - Q(x)\, b_{j-1}(x);$$
$$b'_j(x) = \overline{Q(x)}\, a_j(x); \tag{10}$$

$$b'_n(z, x) = \overline{Q(x)}\, a_n(z, x);\ a'_n(z, x) - 2iza_n(z, x) =$$
$$= -a_{n+1}(x) + Q(x)\, b_n(z, x). \tag{11}$$

Равенства (10) будут удовлетворены, если определить функции $a_j(x)$, $b_j(x)$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ по рекуррентным формулам (7). Заметим, что при этом $a_j(x)$ имеет $n - j + 1$ производную. Система уравнений (11) для $a_n(z, x)$, $b_n(z, x)$ с начальными условиями $a_n(z, 0) = b_n(z, 0) = 0$ эквивалентна системе интегральных уравнений

$$b_n(z, x) = \int\limits_0^x \overline{Q(t)}\, a_n(z, t)\, dt;\ e^{-2izx} a_n(z, x) =$$
$$= -\int\limits_0^x e^{-2izt} a_{n+1}(t)\, dt + \int\limits_0^x e^{-2izt}\, Q(t)\, b_n(z, t)\, dt, \tag{12}$$

которая в свою очередь сводится к интегральному уравнению
$$e^{-2izx} a_n(z, x) = -\int\limits_0^x e^{-2izt} a_{n+1}(t)\, dt + \int\limits_0^x e^{-2izt} Q(t) \int\limits_0^t \overline{Q(\xi)}\, a_n(z, \xi)\, d\xi\, dt.$$

Вводя обозначение $e^{-2izx} a_n(z, x) = \alpha(z, x)$, это уравнение можно переписать так: $\alpha(z, x) = -\int\limits_0^x e^{-2izt} a_{n+1}(t)\, dt + \int\limits_0^x e^{-2izt} Q(t) \times$

$\times \int\limits_0 \overline{Q(\xi)} e^{2iz\xi} \alpha(z, \xi)\, d\xi\, dt$. Будем искать его решение в виде $\alpha(z, x) = \int\limits_0^x K(x, t)\, e^{-2izt} dt$.

После несложных преобразований получаем для ядра $K(x, t)$ интегральное уравнение $K(x, t) = -a_{n+1}(t) + \int\limits_t^x \int\limits_{\tau-t}^{\tau} Q(\tau) \overline{Q(\xi)} K(\xi, t-\tau+\xi)\, d\xi\, d\tau$, которое можно решить методом последовательных приближений. При этом для ядра $K(x, t)$ получаются такие оценки: а) если $a_{n+1}(t), Q(t) \in L_1[0, x]$, $\int\limits_0^x |K(x, t)|\, dt \leqslant J_1(x) \operatorname{ch} S_1(x)$;

б) если $a_{n+1}(t)$, $Q(t) \in L_2[0, x]$, $|K(x, t) + a_{n+1}(t)| \leqslant J_2(x) S_2(x) \times \times \operatorname{sh} S_1(x)$, $\left(J_p(x) = \left[\int\limits_0^x |a_{n+1}(t)|^p\, dt\right]^{\frac{1}{p}},\ S_p(x) = \left[\int\limits_0^x |Q(t)|^p\, dt\right]^{\frac{1}{p}},\right.$ $p = 1, 2)$;

в) если $a_{n+1}(t)$, $Q'(t) \in L_2[0, x]$, то функция $K(x, t) + a_{n+1}(t)$ имеет ограниченную производную:

$$[K(x, t) + a_{n+1}(t)]_t' = Q(x) \int\limits_{x-t}^{x} \overline{Q(\xi)} K(\xi, t-x+\xi)\, d\xi + \\ + \int\limits_0^{x-t} Q'(t+u)\, du \int\limits_u^{t+u} \overline{Q(\xi)} K(\xi, \xi-u)\, d\xi + \int\limits_0^{x-t} |Q(t+u)|^2 \times \\ \times K(t+u, t)\, du. \tag{13}$$

Из этих оценок и равенства (12) вытекают формулы (8), (9), чем заканчивается доказательство леммы.

Характеристическая функция $\chi(z)$ выражается через функции $Z_1(z, x)$, $Z_2(z, x)$ по формуле

$$\chi(z) = \cos z\pi + \frac{Z_1(z, 0)\, \overline{Z}_1(z, 0)}{1 - Z_1(z, 0)\, \overline{Z}_1(z, 0)} \cos z\pi + \\ + \frac{1}{2(1 - Z_1(z, 0)\, \overline{Z}_1(z, 0))} \{e^{-iz\pi}[Z_2(z, \pi) - Z_1(z, \pi)\, \overline{Z}_1(z, 0) - 1] + \\ + e^{iz\pi}[\overline{Z}_2(z, \pi) - \overline{Z}_1(z, \pi)\, Z_1(z, 0) - 1]\}, \tag{14}$$

откуда, в частности, следует, что при $|z| \to \infty$

$$|\chi(z) - \cos z\pi| = o(e^{|\operatorname{Im} z\pi|}), \tag{15}$$

если учесть, что для любой функции $f(t) \in L_1[-\pi, \pi]$ выполняется равенство $\lim\limits_{|z|\to\infty} \bar{e}^{|\operatorname{Im} z\pi|} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{izt}\, dt \right| = 0$, которое доказывается так же, как лемма Римана — Лебега.

Используя оценку (15) и теорему Руше, убеждаемся, что собственные значения периодической (антипериодической) задачи можно занумеровать четными (нечетными) числами так, что

$$\mu_l^{\pm} = l + \varepsilon_l^{\pm}, \quad \lim_{l\to\infty} \varepsilon_l^{\pm} = 0, \tag{16}$$

Так как при этом

$$\chi(\mu_l^{\pm}) - (-1)^l = 0, \tag{17}$$

и корни уравнений $\chi(z) = 1$, $\chi(z) = -1$ чередуются (см. [1]), то последовательность $\{\mu_l^{\pm}\}$ удовлетворяет неравенствам $\cdots < \mu_{-1}^{-} \leqslant \leqslant \mu_{-1}^{+} < \mu_0^{-} \leqslant \mu_0^{+} < \mu_1^{-} \leqslant \mu_1^{+} < \cdots$.

Докажем теперь, что ряд $\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} |\varepsilon_l^{\pm}|^2$ сходится, если $Q(t) \in L_2[0, \pi]$. Из системы (5) следует, что

$$Z_2(z, x)\overline{Z}_2(z, x) - Z_1(z, x)\overline{Z_1}(z, x) \equiv 1 - Z_1(z, 0)\overline{Z_1}(z, 0), \tag{18}$$

так как $Z_2(z, 0) = \overline{Z}_2(z, 0) = 1$.

Поскольку при $n = 0$ $Z_1(z, 0) = 0$, то в этом случае $Z_2(z, x)\overline{Z}_2(z, x) - \overline{Z}_1(z, x)Z_1(z, x) \equiv 1$, и уравнения (4), учитывая выражение (14) для функции $\chi(z)$, можно записать так: $e^{-iz\pi}Z_2(z, \pi) + e^{iz\pi}\overline{Z}_2(z, \pi) \pm 2 = 0$.

Отсюда, согласно (16) и (18), получим

$$e^{i(l+\varepsilon_l^{\pm})\pi} = (-1)^l \left.\frac{1 \pm i\sqrt{Z_1(z, \pi)\overline{Z}_1(z, \pi)}}{\overline{Z}_2(z, \pi)}\right|_{z=l+\varepsilon_l^{\pm}}$$

или

$$i\varepsilon_l^{\pm}\pi = \left[\ln\left(1 \pm i\sqrt{Z_1(z, \pi)\overline{Z}_1(z, \pi)}\right) - \ln(\overline{Z}_2(z, \pi))\right]\Big|_{z=l+\varepsilon_l^{\pm}}.$$

Поскольку при $n = 0$ $Z_1(z, \pi) = a_0(z, \pi)$, $Z_2(z, \pi) = 1 + b_0(z, \pi)$, где $a_0(z, \pi)$ и $b_0(z, \pi)$ имеют вид (8), (9), то

$$\varepsilon_l^{\pm} = \frac{1}{i\pi}\Big\{\pm i\sqrt{a_0(z, \pi)\overline{a}_0(z, \pi)}\,(1 + o(a_0(z, \pi))) -$$
$$- \overline{b_0}(z, \pi)(1 + o(b_0(z, \pi)))\Big\}_{z=l+\varepsilon_l^{\pm}}. \tag{19}$$

Воспользуемся теперь следующей леммой, доказательство которой проводится так же, как доказательство леммы 3.2 работы [1].

Лемма 2. *Если* $f(t) \in L_2[0, \pi]$ и $\varepsilon_l \to 0$ *при* $|l| \to \infty$, то $\int\limits_0^{\pi} f(t)\, e^{2i(l+\varepsilon_l)t} dt = f_l + \varepsilon_l\gamma_l$, *где* $f_l = \int\limits_0^{\pi} f(t)\, e^{2ilt}\, dt$ *и* $\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} |f_l|^2 < \infty$, $\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} |\gamma_l|^2 < \infty$.

Оценив с помощью этой леммы $a_0(z, \pi)$, $b_0(z, \pi)$, которые имеют вид (8), (9), получим из формулы (19) $\sum_{l=-\infty}^{\infty} |\varepsilon_l^{\pm}|^2 < \infty$, что и утверждалось.

Лемма 3. *Если функция $Q(t)$ имеет $n-1$ ($n>0$) абсолютно непрерывную производную и $Q^{(n)}(t) \in L_2[0, \pi]$, то функция $U(z, x) = Z_1(z, x)[Z_2(z, x)]^{-1}$ допускает представление*

$$U(z, x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{\sigma_p(x)}{(2iz)^p} + \frac{\delta_n(z, x)}{(2iz)^n}, \tag{20}$$

в котором функции $\sigma_p(x)$ ($p = 1, 2, \ldots n$) находятся по рекуррентным формулам

$$\sigma_1(x) = -Q(x), \ \sigma_p(x) = \sigma'_{p-1}(x) + \overline{Q(x)} \sum_{j=1}^{p-2} \sigma_j(x)\, \sigma_{p-j-1}(x), \tag{21}$$

а

$$\delta_n(z, x) = -e^{2izx} \int_0^x e^{-2izt} \sigma_{n+1}(t)\, dt + \\ + \frac{1}{2iz} e^{2izx} \int_{-x}^{x} e^{-2izt} R(x, t)\, dt + O(z^{-2}), \tag{22}$$

причем ядро $R(x, t)$ по t суммируемо с квадратом.

Кроме того,

$$Z_2(z, x) = \exp \int_0^x \overline{Q(t)}\, U(z, t)\, dt \tag{23}$$

и

$$\int_0^x \overline{Q(t)}\, U(z, t)\, dt = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{d_j(x)}{z^j} + \frac{1}{z^{n+1}} \left(\int_{-x}^{x} e^{-2izt} R_1(x, t)\, dt + O(z^{-1}) \right), \tag{24}$$

где ядро $R_1(x, t)$ суммируемо с квадратом по t и $d_j(x) = \frac{1}{(2i)^j} \int_0^x \overline{Q(t)}\, \sigma_j(t)\, dt$.

Доказательство. Из формулы (6) следует, что

$$U(z, x) = \frac{A}{B} + \frac{1}{(2iz)^n} \cdot \frac{Ba_n(z, x) - Ab_n(z, x)}{B(B + b_n(z, x)(2iz)^{-n})}, \tag{25}$$

где для краткости введены обозначения $A = A(z, x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j(x)}{(2iz)^j}$; $B = B(z, x) = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j(x)}{(2iz)^j}$.

В окрестности бесконечно удаленной точки z-плоскости функция $A(z, x)[B(z, x)]^{-1}$, очевидно, голоморфна $\frac{A}{B} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j(x)}{(2iz)^j} + \frac{1}{(2iz)^n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{l_j(x)}{(2iz)^j}$. (Мы здесь специально выделили первые n членов).

Таким образом,

$$U(z, x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j(x)}{(2iz)^j} + \frac{\delta_n(z, x)}{(2iz)^n}, \tag{26}$$

где

$$\delta_n(z, x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{l_j(x)}{(2iz)^j} + \frac{Ba_n(z, x) - Ab_n(z, x)}{B(B + b_n(z, x)(2iz)^{-n})}. \tag{27}$$

Заметим, что при $z \to \infty$ $\delta_n(z, x) = o(1)$, поскольку $a_n(z, x) = o(1)$ и $b_n(z, x) = o(1)$.

Так как $b_j(0) = b_n(z, 0) = a_n(z, 0) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots n)$, то, полагая $x = 0$ в (25), (26) и (27), получим $a_j(0) = \sigma_j(0)$, $l_p(0) = 0$, $\delta_n(z, 0) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots n;\ p = 1, 2, \ldots)$.

Функция $U(z, x)$ удовлетворяет уравнению $U'_x(z, x) - 2izU(z, x) + U^2(z, x)\overline{Q(x)} - Q(x) = 0$, которое получается из системы (5), если воспользоваться равенством $Z_1(z, x) = U(z, x) Z_2(z, x)$.

Подставив в это уравнение первую часть формулы (26) и устремив $z \to \infty$ получим для функций $\sigma_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots n)$ соотношения (21), а для функции $\delta_n(z, x)$ — уравнение

$$\delta_n'(z, x) + 2\left[\overline{Q(x)} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(x) - iz\right] \delta_n(z, x) + \delta_n^2(z, x) \times \frac{\overline{Q(x)}}{(2iz)^n} + \overline{Q(x)} \sum_{p=1}^{n} \sum_{j=n-p+1}^{n} \sigma_p(x) \frac{\sigma_j(x)}{(2iz)^{n-j-p}} + \sigma_{n+1}(x) = 0. \tag{28}$$

Заметим, что при $z \to \infty$ справедливо равенство

$$\delta_n'(z, x) + 2\left[\overline{Q(x)} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(x) - iz\right] \delta_n(z, x) + \delta_n^2(z, x) \frac{\overline{Q(x)}}{(2iz)^n} + \overline{Q(x)} \sum_{p=1}^{n} \sum_{j=n-p+1}^{n} \sigma_p(x) \frac{\sigma_j(x)}{(2iz)^{n-j-p}} = \delta_n'(z, x) - 2iz\delta_n(z, x) + o(1) =$$
$$= \left\{\frac{Ba_n(z, x) - Ab_n(z, x)}{B(B + b_n(z, x)(2iz)^{-n})}\right\}_x' - l_1(x) - \frac{2iza_n(z, x)}{B + b_n(z, x)(2iz)^{-n}} + \tag{29}$$
$$+ \frac{2izAb_n(z, x)}{B(B + b_n(z, x)(2iz)^{-n})} + o(1) = -a_{n+1}(x) - l_1(x) + o(1).$$

(При этом было использовано, что, согласно (11), $a_n'(z, x) - 2iza_n(z, x) = -a_{n+1}(x) + o(1)$). Сравнивая (29) с (28), найдем:

$$\sigma_{n+1}(x) - l_1(x) = a_{n+1}(x). \tag{30}$$

Из определения $\delta_n(z, x)$ следует, что при $z \to \infty$

$$\delta_n(z, x) = \frac{l_1(x)}{2iz} + \frac{a_n(z, x)}{B + b_n(z, x)(2iz)^{-n}} - \frac{a_1(x)\, b_n(z, x)}{2iz} + o(z^{-2}), \tag{31}$$

причем, $a_n(z, x)$ имеет вид (8). Согласно оценке (13) функция $\tilde{K}(x, t) = K(x, t) + a_{n+1}(t)$ имеет ограниченную производную по t, если $Q^{(n)}(t) \in L_2$. В этом случае, интегрируя по частям в правой части формулы (8) и замечая, что $\tilde{K}(x, x) = \tilde{K}(x, 0) = 0$, получим

$$a_n(z, x) = e^{2izx}\int_0^x (-a_{n+1}(t) + \tilde{K}(x, t))e^{-2izt}\,dt = \Big(-e^{2izx}\int_0^x a_{n+1}(t)e^{-2izt}\,dt + \frac{e^{2izx}}{2iz}\int_0^x \tilde{K}_t'(x, t)\,e^{-2izt}\,dt\Big).$$

Эту формулу, используя равенство (30), можно преобразовать к такому виду:

$$a_n(z, x) = -e^{2izx}\int_0^x e^{-2izt}\sigma_{n+1}(t)\,dt - \frac{l_1(x)}{2iz} + \frac{e^{2izx}}{2iz}\int_0^x [\tilde{K}_t'(x, t) + l_1'(t)]\,e^{-2izt}dt. \tag{32}$$

Подставляя (32) и (9) в (31), после несложных преобразований приходим к равенству (22). Наконец, из уравнения $Z_2'(z, x) = \overline{Q(x)}Z_1(z, x)$ следует, что $Z_2'(z, x) = \overline{Q(x)}U(z, x)Z_2(z, x)$ и, так как $Z_2(z, 0) = 1$, то $Z_2(z, x) = \exp\int_0^x \overline{Q(t)}\,U(z, t)\,dt$.

Используя представление (20) функции $U(z, x)$ и формулу (22), находим, что $\int_0^x \overline{Q(t)}\,U(z, t)\,dt = \sum_{j=1}^{n+1}\frac{d_j(x)}{z^j} + \frac{1}{z^{n+1}}\Big[\int_{-x}^x e^{-2izt}R_1(x, t)\,dt + o(z^{-1})\Big]$, где ядро $R_1(x, t)$ по t суммируемо с квадратом, и $d_j(x) = \frac{1}{(2i)^j}\int_0^x \overline{Q(t)}\,\sigma_j(t)\,dt$ $(j = 1, 2, \ldots n+1)$.

Теорема 1. *Если периодическая функция* $Q(x) = -r(x) + ip(x)$ $(Q(x+\pi) = Q(x))$ *имеет* $n \geqslant 0$ *суммируемых с квадратом производных* $(Q^{(n)}(x) \in L_2[a, a+\pi])$, *то собственные значения периодической* $(\mu_{2k}^{\pm})$ *и антипериодической* $(\mu_{2k+1}^{\pm})$ *краевых задач, порождаемых операцией* D *на интервале* $[0, \pi]$, *удовлетворяют* *таким равенствам:* $\mu_k^{\pm} = k + \sum_{j=1}^{n+1} c_j k^{-j} + \delta_k^{\pm} |k|^{-n}$, *где числа* c_j *не зависят от* k *и* $\{\delta_k^{\pm}\} \in l_2$.

При этом, если $n \geqslant 1$, *то* $\delta_k^{\pm} = \pm 2^{-n} |\overset{n}{q}_{2k}| + k^{-1}\xi_k^{\pm}$, *где* $\overset{n}{q}_{2k} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} Q^{(n)}(t)\, e^{-2ikt}\, dt$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\xi_k^{\pm}|^2 < \infty$.

Доказательство. Справедливость теоремы при $n=0$ была доказана ранее. Пусть теперь $n \geqslant 1$. Так как $Z_1(z, x) = U(z, x) Z_2(z, x)$, $Z_2(z, 0) = 1$, то формулу (14) можно преобразовать к виду $\chi(z) = \frac{1}{2(1-U(z, 0)\overline{U}(z, 0))}\{e^{-iz\pi} Z_2(z, \pi)[1 - U(z, \pi)\overline{U}(z, 0)] + e^{iz\pi}\overline{Z}_2(z, \pi)[1-\overline{U}(z, \pi)U(z, 0)]\}$, откуда следует, что уравнения (17) эквивалентны таким:

$$e^{-iz\pi} Z_2(z, \pi)[1 - \overline{U}(z, 0)U(z, \pi)] + e^{iz\pi}\overline{Z}_2(z, \pi)\times \\ \times [1 - \overline{U}(z, \pi)U(z, 0)] - (-1)^l 2[1 - U(z, 0)\overline{U}(z, 0)] = 0. \quad (33)$$

Далее, из определения функции $U(z, x)$ и тождества (18) следует, что $Z_2(z, \pi)\overline{Z}_2(z, \pi) = \frac{1-U(z, 0)\overline{U}(z, 0)}{1-U(z, \pi)\overline{U}(z, \pi)}$. Поэтому, умножая уравнение (33) на

$$\varphi(z) = e^{iz\pi}\,\overline{Z}_2(z, \pi), \quad (34)$$

получим после деления на $(1 - U(z, 0)\overline{U}(z, 0))$

$$\varphi^2(z)\frac{1-U(z, 0)\overline{U}(z, \pi)}{1-U(z, 0)\overline{U}(z, 0)} - (-1)^l 2\varphi(z) + \frac{1-U(z, \pi)\overline{U}(z, 0)}{1-U(z, \pi)\overline{U}(z, \pi)} = 0. \quad (35)$$

Введя для краткости обозначения $U(z) = U(z, 0)$, $\Delta(z) = \frac{U(z, \pi) - U(z, 0)}{1-U(z, 0)\overline{U}(z, 0)}$ и решая уравнение (35) относительно $\varphi(z)$, получим

$$\varphi(z) = (-1)^l \frac{1 \pm \sqrt{\dfrac{-\Delta(z)\overline{\Delta}(z)}{[1-U(z)\overline{\Delta}(z)][1-\overline{U}(z)\Delta(z)] - \Delta(z)\overline{\Delta}(z)}}}{1-\overline{\Delta}(z)U(z)}.$$

Это уравнение, согласно (34), (23), эквивалентно такому:

$$\exp\left[iz\pi + \int\limits_0^{\pi} Q(t)\overline{U}(z, t)\, dt\right] = (-1)^l [1 - \overline{\Delta}(z)U(z)]^{-1}\times \\ \times\left\{1 \pm \sqrt{-\Delta(z)\overline{\Delta}(z)[(1-U(z)\overline{\Delta}(z))(1-\overline{U}(z)\Delta(z)) - \Delta(z)\overline{\Delta}(z)]^{-1}}\right\},$$

откуда, учитывая (16), видим, что $\varepsilon_l^{\pm}$ удовлетворяет уравнению

$$i\pi\varepsilon_l^{\pm} + \int_0^{\pi} Q(t)\,\overline{U}(z, t)\,dt \Big|_{z=l+\varepsilon_l^{\pm}} = \Big[-\ln(1-\overline{\Delta}(z)\,U(z)) + \\ + \ln\left(1 \pm \sqrt{\frac{-\Delta(z)\,\overline{\Delta}(z)}{[1-U(z)\,\overline{\Delta}(z)]\,[1-\overline{U}(z)\,\Delta(z)] - \Delta(z)\,\overline{\Delta}(z)}}\right)\Big]\Big|_{z=l+\varepsilon_l^{\pm}}. \tag{36}$$

Так как по условию функция $Q(t)$ и ее производные до n-го порядка периодические (с периодом π), а функции $\sigma_p(x)$ являются полиномами от $Q(x)$, $Q'(x)$, ... $Q^{(p-1)}(x)$, то $\sigma_p(\pi) = \sigma_p(0)$ $(p = 1, 2, \ldots n)$.

Отсюда, согласно (20), следует, что

$$\Delta(z) = \frac{\sum_{p=1}^{n} [\sigma_p(\pi) - \sigma_p(0)]\,(2iz)^{-p} + \delta_n(z, \pi)\,(2iz)^{-n}}{1 - U(z, 0)\,\overline{U}(z, 0)} = \\ = \delta_n(z, \pi)\,(2iz)^{-n}\,[1 - U(z, 0)\,\overline{U}(z, 0)]^{-1}.$$

Рассмотрим правую часть уравнения (36). Учитывая вид функции $U(z, x)$, полученный в лемме 3, а также равенство $\overline{\delta}_n(z, x) = \overline{\delta_n(\bar{z}, x)}$, находим, что при вещественных z

$$\ln(1-\overline{\Delta}(z)\,U(z)) = \frac{\overline{\delta}_n(z, \pi)\,\delta_1(0)}{(-2iz)^n\,(2iz)}\,(1 + o(z^{-2}));$$

$$\ln\left(1 \pm \left(\sqrt{\frac{-\Delta(z)\,\overline{\Delta}(z)}{[1-U(z)\,\overline{\Delta}(z)]\,[1-\overline{U}(z)\,\Delta(z)] - \Delta(z)\,\overline{\Delta}(z)}}\right)\right) = \\ = \pm i\sqrt{\frac{\delta_n(z, \pi)\,\overline{\delta}_n(z, \pi)}{(2iz)^n\,(-2iz)^n}}\,(1 + o(z^{-2})) = \pm i\left|\frac{\delta_n(z, \pi)}{(2z)^n}\right|(1 + o(z^{-2})).$$

Из формулы (22) и леммы 2 следует, что

$$\frac{\delta_n(z, \pi)}{(2iz)^n}\Big|_{z=l+\varepsilon_l^{\pm}} = (2il)^{-n}\left\{\int_0^{\pi} \sigma_{n+1}(t)\,e^{-2ilt}\,dt + \varepsilon_l^{\pm}\gamma_l^{\pm} + l^{-1}\eta_l^{\pm}\right\},$$

где $\sum_{l=-\infty}^{\infty} |\gamma_l^{\pm}|^2 < \infty$, $\sum_{l=-\infty}^{\infty} |\eta_l^{\pm}|^2 < \infty$.

Поэтому правая часть уравнения (36) имеет такой вид:

$$\pm i\,|2l|^{-n}\left\{\left|\int_0^{\pi} \sigma_{n+1}(t)\,e^{-2ilt}\,dt + \varepsilon_l^{\pm}\gamma_l^{\pm}\right| + l^{-1}\zeta_l^{\pm}\right\}, \quad \left(\sum |\zeta_l^{\pm}|^2 < \infty\right).$$

Далее из формулы (24) и леммы 2 следует, что

$$\int_0^{\pi} Q(t)\,\overline{U}(z, t)\,dt\Big|_{z=l+\varepsilon_l^{\pm}} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{d_j(\pi)}{z^j}\Big|_{z=l+\varepsilon_l^{\pm}} + \frac{\beta_l^{\pm}}{l^{n+1}}, \quad \left(\sum |\beta_l^{\pm}|^2 < \infty\right).$$

Сопоставляя эти равенства и уравнение (36), приходим к следующему равенству:

$$i\pi\varepsilon_l^{\pm} + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{d_j(\pi)}{z^j}\bigg|_{z=l+\varepsilon_l^{\pm}} + \frac{\beta_l^{\pm}}{l^{n+1}} =$$

$$= \pm i\,|2l|^{-n}\left\{\left|\int_0^{\pi} \sigma_{n+1}(t)\,e^{-2ilt}\,dt + \varepsilon_l^{\pm}\gamma_l^{\pm}\right| + l^{-1}\zeta_l^{\pm}\right\}, \tag{37}$$

из которого в частности следует, что $\varepsilon_l^{\pm} = O(l^{-1})$.

Из формул (21) вытекает, что $\sigma_{n+1}(x) = -Q^{(n)}(x) + P_{n-2}(x)$, где $P_{n-2}(x)$ — полином от $Q(x)$, $Q'(x)$, ... $Q^{(n-2)}(x)$. Следовательно, $P_{n-2}(x)$ имеет две суммируемые с квадратом производные. Поэтому, дважды интегрируя по частям и замечая, что $P_{n-2}(0) = P_{n-2}(\pi)$, $P'_{n-2}(0) = P'_{n-2}(\pi)$, получим

$$\int_0^{\pi} \sigma_{n+1}(t)\,e^{-2ilt}\,dt = -\int_0^{\pi} Q^{(n)}(t)\,e^{-2ilt}\,dt + \int_0^{\pi} P_{n-2}(t)\,e^{-2ilt}\,dt =$$

$$= -\int_0^{\pi} Q^{(n)}(t)\,e^{-2ilt}\,dt + \frac{1}{(-2il)^2}\int_0^{\pi} P''_{n-2}(t)\,e^{-2ilt}\,dt = -\pi q_{2l}^{n} + o(l^{-2}),$$

где $q_{2l}^{n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} Q^{(n)}(t)\,e^{-2ilt}\,dt.$

Из этого равенства и оценки $\varepsilon_l^{\pm} = O(l^{-1})$ следует, что уравнение (37) можно преобразовать к виду $\varepsilon_l^{\pm} + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{d_j(\pi)}{i\pi}\cdot\frac{1}{z^j}\Big|_{z=l+\varepsilon_l^{\pm}} = \pm\frac{1}{|2l|^n}\left\{|q_{2l}^{n}| + \frac{\tau_l^{\pm}}{l}\right\}$, откуда так же, как в работе [1], вытекают доказываемые асимптотические формулы для $\mu_l^{\pm}$.

С л е д с т в и е. *Для того чтобы последовательности* $\cdots < \mu_{-1}^{-} \leqslant \leqslant \mu_{-1}^{+} < \mu_0^{-} \leqslant \mu_0^{+} < \mu_1^{-} \leqslant \mu_1^{+} < \cdots$ *были спектрами периодической и антипериодической задач, порождаемых на сегменте* $[0, \pi]$ *операцией* D *с вещественными периодическими функциями* $p(x)$ *и* $r(x)$, *имеющими* $n \geqslant 0$ *суммируемых с квадратом производных, необходимо, чтобы существовала такая последовательность чисел* $h_k \geqslant 0$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, *удовлетворяющих условию*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k^n h_k|^2 < \infty, \tag{38}$$

что $\mu_k^{\pm} = z(k\pi \pm 0)$, *где функция* $z(\theta)$ *осуществляет конформное отображение области*

$$\{\theta : \operatorname{Im}\theta > 0\} \setminus \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \{\theta : \operatorname{Re}\theta = k\pi,\ 0 \leqslant \operatorname{Im}\theta \leqslant h_k\} \tag{39}$$

на верхнюю полуплоскость, нормированное условием

$$\lim_{y\to+\infty} (\theta(iy) - i\pi y) = 0. \tag{40}$$

Доказательство. Так как уравнение $\chi^2(z) - 1 = 0$ имеет только вещественные корни и функция $\chi(z)$ вещественна, то, согласно теореме 1.1 работы [1],

$$\chi(z) = \cos\theta(z), \tag{41}$$

где функция $\theta(z)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость в область (39), причем $\lim\limits_{y\to+\infty} (iy)^{-1}\theta(iy) = \pi$.

Функцию $\theta(z)$, очевидно, всегда можно выбрать так, чтобы $\theta(\mu_0^+ + 0) = +0$. При таком выборе функции $\theta(z)$, учитывая ее непрерывность, будем иметь $\theta(\mu_k^\pm) = k\pi \pm 0$, так что $\mu_k^\pm = z(k\pi \pm$ $\pm 0)$, где $z(\theta)$ — функция, обратная $\theta(z)$.

Из теоремы 1 следует, что $|k^n|(\mu_k^+ - \mu_k^-) = (\delta_k^+ - \delta_k^-)$ и, значит, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |k^n(\mu_k^+ - \mu_k^-)|^2 < \infty$.

Далее из оценки (15) и формулы (41) следует, что $\sup\limits_k |h_k| <$ $< \infty$, откуда, согласно лемме 2.2 работы [1], вытекает неравенство $h_k \leqslant C(\mu_k^+ - \mu_k^-)$ и $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |k^n h_k|^2 \leqslant C \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |k^n(\mu_k^+ - \mu_k^-)|^2 < \infty$.

Равенство (40) является следствием (38) и теоремы 2.1 работы [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марченко В. А., Островский И. В. Характеристика спектра оператора Хилла. — «Мат. сб.», 1975, т. 97 (139), № 4 (8), с. 540—606.
2. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М. «Наука», 1970. 671 с.

Поступила 3 июня 1976 г.