УДК 513.83

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ,
В. И. ОПОЙЦЕВ

ТЕОРЕМА О ГЛОБАЛЬНОМ ГОМЕОМОРФИЗМЕ

В отличие от вопроса о локальном гомеоморфизме отображений, вопрос о гомеоморфизме в целом изучался сравнительно мало. В настоящей заметке доказывается следующее утверждение.

Теорема. *Пусть X, Y — метрические пространства, причем X линейно связно, а Y стягиваемо по себе. Тогда, чтобы $F: X \to Y$ было гомеоморфизмом X на Y, необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

а°) F является локальным гомеоморфизмом;

в°) прообраз любого компактного подмножества Y компактен в X.

Для случая $F: R^n \to R^n$ аналогичный результат был указан Р. Пале [1]. Для специального вида оператора F, отображающего в себя банахово пространство, доказательство содержательно эквивалентного утверждения приведено в [2] (см. также [3]).

Перейдем к доказательству теоремы. Необходимость условий $a°$, $в°$ очевидна.

Достаточность. Установим сюръективность F. В силу $a°$, множество $F(X)$ открыто в Y. Покажем, что оно также замкнуто. Пусть $y_n \to y$ и $\forall n \geqslant 0: y_n \in F(X)$. В силу $в°$, прообраз компактного множества $\{y_n\} \cup \{y\}$ компактен в X. Поэтому у последовательности $x_n (x_n \in F^{-1}(y_n))$ существует сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \to x$. Учитывая непрерывность F, получаем $y_{n_k} = F(x_{n_k}) \to F(x)$, откуда $F(x) = y$, т. е. $y \in F(X)$. Итак, $F(X)$ одновременно открыто и замкнуто в Y, а поскольку Y связно, то $F(X) = Y$. Сюръективность доказана.

Инъективность. В силу $a°$, $в°$, прообраз любой точки $y \in Y$ состоит из конечного числа точек. Кроме того, число решений уравнения $y = F(x)$, как функция y, есть константа. Действительно, пусть прообразы точек $y_1 \in Y$ и $y_2 \in Y$ содержат различное число точек. Соединим точки y_1 и y_2 непрерывной кривой $P(\lambda)$ $(P: [0,\ 1] \to Y,\ P(0) = y_1,\ P(1) = y_2)$. Из $a°$, $в°$ следует, что из каждой точки $x_i \in F^{-1}(y_1)$ выходит непрерывная кривая $x_i(\lambda)$ такая, что $F(x_i(\lambda)) = P(\lambda)$. Так как число точек в прообразах y_1 и y_2 различно, то кривые $x_i(\lambda)$ должны или ветвиться, или пересекаться. Но это противоречит условию $a°$.

Фиксируем теперь некоторую точку $y_0 \in Y$, и пусть $F^{-1}(y_0)$ представляет собой набор точек $x_1^0, \ldots, x_m^0$. Предположим, что $m \geqslant 2$. Поскольку Y стягиваемо, то существует гомотопия $H_\lambda(y)$ связывающая тождественное отображение $H_0: Y \to Y$ с отображением $H_1: Y \to y_0$. Пусть множество $x_1, \ldots, x_m$ является прообразом точки $y \in Y$. Соединим y и y_0 кривой $P(\lambda) = H_\lambda(y)$ и рассмотрим соответствующие кривые $x_i(\lambda)$ (см. выше). Каждая кривая $x_i(\lambda)$ имеет два конца $x_i = x_i(0)$ и $x_j^0 = x_i(1)$. Точки x_i и x_j^0 в этом случае назовем эквивалентными. Пусть $C_i \subset X$ есть множество точек, эквивалентных x_i^0 $(i = 1, \ldots, m)$. Очевидно, $\bigcup\limits_i C_i = X$ и все множества C_i открыты. Но это противоречит связности X. Следовательно, $m = 1$ и F инъективно.

Из сюръективности и инъективности F следует существование обратного оператора $F^{-1}: Y \to X$. Непрерывность F^{-1} вытекает из a°. Теорема доказана.

В условиях теоремы предположение о стягиваемости Y можно ослабить, заменив его следующим требованием: любая замкнутая кривая, лежащая в Y, может быть непрерывно стянута в любую наперед заданную точку $y \in Y$. В этом случае меняется лишь доказательство инъективности. В предположении противного найдутся точки $x_1 \neq x_2$ такие, что $F(x_1) = F(x_2) = y_0$. Соединим x_1 и x_2 непрерывной кривой $P(t)$ $(P(0) = x_1,\ P(1) = x_2)$. Ее образом является замкнутая кривая $Q(t) = F(P(t))$. Пусть $Q: [0, 1] \times \times [0, 1] \to Y$ определяет непрерывную деформацию $Q(t)$ в точку y_0 $(Q(t, 0) = Q(t),\ Q(t, 1) = y_0)$. При изменении λ от 0 до 1 кривая $Q(t, 0)$ непрерывно стягивается в точку $y_0 \in Y$. Поскольку F сюръективно, для любых $t, \lambda \in [0, 1] \times [0, 1]$ прообраз $Q(t, \lambda)$ не пуст. Кроме того, в силу a°, $в^\circ$, из каждой точки $P(t) \in X$ (при любом фиксированном $t \in [0, 1]$) выходит однозначная непрерывная по λ ветвь $P(t, \lambda) \in F^{-1}(Q(t, \lambda))$, определенная для любого $\lambda \in [0, 1]$. Если теперь показать, что при любом фиксированном λ, в том числе при $\lambda = 1$, $P(t, \lambda)$ представляет собой непрерывную кривую,— получится требуемое противоречие. Действительно, в этом случае прообраз точки $y_0 \in Y$ будет содержать непрерывную кривую $P(t, 1)$, что противоречит a°. Покажем непрерывность $P(t, \lambda)$ в любой наперед заданной точке $t_0 \in [0, 1]$ при любом фиксированном $\lambda \in [0, 1]$. В силу a°, $в^\circ$, прообраз каждой точки $y \in Y$ состоит не более, чем из конечного числа точек. Поэтому для каждой точки $y \in Y$ существует такой открытый шар $W_y \subset Y$, что для каждого $x \in F^{-1}(y)$ существует окрестность $V_x \subset X$ такая, что сужение F на V_x есть гомеоморфизм V_x на W_y. Выберем $\Delta\lambda_1 \in [0, 1]$ из условия $\forall \gamma \in [0, \Delta\lambda_1]: Q(t_0, \gamma) \in W_y$, где $y = = Q(t_0, 0)$. Тогда для t, достаточно близких к t_0, очевидно, $P(t, \Delta\lambda_1) = F_{V_x}^{-1}(Q(t, \Delta\lambda_1))$, где F_{V_x} — сужение F на V_x $(x = = P(t_0, 0))$.

Аналогичным образом можно представить второй шаг $P(t, \Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2)$ и т. д. Поскольку множество $Q([0, 1], [0, 1])$ компактно (как непрерывный образ компакта $[0, 1] \times [0, 1]$), то из его покрытия шарами W_y можно выбрать конечное подпокрытие. Поэтому $P(t, \lambda)$ при любом наперед заданном $\lambda \in [0, 1]$ и t, достаточно близких к t_0, можно определить с помощью конечного