

М. А. КРАШНОСЕЛЬСКИЙ,
В. И. ОПОЙЦЕВ

ТЕОРЕМА О ГЛОБАЛЬНОМ ГОМЕОМОРФИЗМЕ

В отличие от вопроса о локальном гомеоморфизме отображений, вопрос о гомеоморфизме в целом изучался сравнительно мало. В настоящей заметке доказывается следующее утверждение.

Теорема. Пусть X, Y — метрические пространства, причем X линейно связно, а Y стягиваемо по себе. Тогда, чтобы $F: X \rightarrow Y$ было гомеоморфизмом X на Y , необходимо и достаточно выполнение двух условий:

- a°) F является локальным гомеоморфизмом;
 b°) прообраз любого компактного подмножества Y компактен в X .

Для случая $F: R^n \rightarrow R^n$ аналогичный результат был указан Р. Пале [1]. Для специального вида оператора F , отображающего в себя банахово пространство, доказательство содержательно эквивалентного утверждения приведено в [2] (см. также [3]).

Перейдем к доказательству теоремы. Необходимость условий a°, b° очевидна.

Достаточность. Установим сюръективность F . В силу a° , множество $F(X)$ открыто в Y . Покажем, что оно также замкнуто. Пусть $y_n \rightarrow y$ и $\forall n \geq 0: y_n \in F(X)$. В силу b° , прообраз компактного множества $\{y_n\} \cup \{y\}$ компактен в X . Поэтому у последовательности $x_n (x_n \in F^{-1}(y_n))$ существует сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow x$. Учитывая непрерывность F , получаем $y_{n_k} = F(x_{n_k}) \rightarrow F(x)$, откуда $F(x) = y$, т. е. $y \in F(X)$. Итак, $F(X)$ одновременно открыто и замкнуто в Y , а поскольку Y связно, то $F(X) = Y$. Сюръективность доказана.

Инъективность. В силу a°, b° , прообраз любой точки $y \in Y$ состоит из конечного числа точек. Кроме того, число решений уравнения $y = F(x)$, как функция y , есть константа. Действительно, пусть прообразы точек $y_1 \in Y$ и $y_2 \in Y$ содержат различное число точек. Соединим точки y_1 и y_2 непрерывной кривой $P(\lambda) (P: [0, 1] \rightarrow Y, P(0) = y_1, P(1) = y_2)$. Из a°, b° следует, что из каждой точки $x_i \in F^{-1}(y_1)$ выходит непрерывная кривая $x_i(\lambda)$ такая, что $F(x_i(\lambda)) = P(\lambda)$. Так как число точек в прообразах y_1 и y_2 различно, то кривые $x_i(\lambda)$ должны или ветвиться, или пересекаться. Но это противоречит условию a° .

Фиксируем теперь некоторую точку $y_0 \in Y$, и пусть $F^{-1}(y_0)$ представляет собой набор точек x_1^0, \dots, x_m^0 . Предположим, что $m \geq 2$. Поскольку Y стягиваемо, то существует гомотопия $H_\lambda(y)$ связывающая тождественное отображение $H_0: Y \rightarrow Y$ с отображением $H_1: Y \rightarrow y_0$. Пусть множество x_1, \dots, x_m является прообра-

зом точки $y \in Y$. Соединим y и y_0 кривой $P(\lambda) = H_\lambda(y)$ и рассмотрим соответствующие кривые $x_i(\lambda)$ (см. выше). Каждая кривая $x_i(\lambda)$ имеет два конца $x_i = x_i(0)$ и $x_i^0 = x_i(1)$. Точки x_i и x_i^0 в этом случае назовем эквивалентными. Пусть $C_i \subset X$ есть множество точек, эквивалентных x_i^0 ($i = 1, \dots, m$). Очевидно, $\bigcup_i C_i = X$ и все множества C_i открыты. Но это противоречит связности X . Следовательно, $m = 1$ и F инъективно.

Из сюръективности и инъективности F следует существование обратного оператора $F^{-1}: Y \rightarrow X$. Непрерывность F^{-1} вытекает из a° . Теорема доказана.

В условиях теоремы предположение о стягиваемости Y можно ослабить, заменив его следующим требованием: любая замкнутая кривая, лежащая в Y , может быть непрерывно стянута в любую наперед заданную точку $y \in Y$. В этом случае меняется лишь доказательство инъективности. В предположении противного найдутся точки $x_1 \neq x_2$ такие, что $F(x_1) = F(x_2) = y_0$. Соединим x_1 и x_2 непрерывной кривой $P(t)$ ($P(0) = x_1, P(1) = x_2$). Ее образом является замкнутая кривая $Q(t) = F(P(t))$. Пусть $Q: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$ определяет непрерывную деформацию $Q(t)$ в точку y_0 ($Q(t, 0) = Q(t), Q(t, 1) = y_0$). При изменении λ от 0 до 1 кривая $Q(t, 0)$ непрерывно стягивается в точку $y_0 \in Y$. Поскольку F сюръективно, для любых $t, \lambda \in [0, 1] \times [0, 1]$ прообраз $Q(t, \lambda)$ не пуст. Кроме того, в силу a°, σ° , из каждой точки $P(t) \in X$ (при любом фиксированном $t \in [0, 1]$) выходит однозначная непрерывная по λ ветвь $P(t, \lambda) \in F^{-1}(Q(t, \lambda))$, определенная для любого $\lambda \in [0, 1]$. Если теперь показать, что при любом фиксированном λ , в том числе при $\lambda = 1$, $P(t, \lambda)$ представляет собой непрерывную кривую, — получится требуемое противоречие. Действительно, в этом случае прообраз точки $y_0 \in Y$ будет содержать непрерывную кривую $P(t, 1)$, что противоречит a° . Покажем непрерывность $P(t, \lambda)$ в любой наперед заданной точке $t_0 \in [0, 1]$ при любом фиксированном $\lambda \in [0, 1]$. В силу a°, σ° , прообраз каждой точки $y \in Y$ состоит не более, чем из конечного числа точек. Поэтому для каждой точки $y \in Y$ существует такой открытый шар $W_y \subset Y$, что для каждого $x \in F^{-1}(y)$ существует окрестность $V_x \subset X$ такая, что сужение F на V_x есть гомеоморфизм V_x на W_y . Выберем $\Delta\lambda_1 \in [0, 1]$ из условия $\forall \gamma \in [0, \Delta\lambda_1]: Q(t_0, \gamma) \in W_y$, где $y = Q(t_0, 0)$. Тогда для t , достаточно близких к t_0 , очевидно, $P(t, \Delta\lambda_1) \in F_{V_x}^{-1}(Q(t, \Delta\lambda_1))$, где F_{V_x} — сужение F на V_x ($x = P(t_0, 0)$).

Аналогичным образом можно представить второй шаг $P(t, \Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2)$ и т. д. Поскольку множество $Q([0, 1], [0, 1])$ компактно (как непрерывный образ компакта $[0, 1] \times [0, 1]$), то из его покрытия шарами W_y можно выбрать конечное подпокрытие. Поэтому $P(t, \lambda)$ при любом наперед заданном $\lambda \in [0, 1]$ и t , достаточно близких к t_0 , можно определить с помощью конечного

числа указанных выше шагов, т. е. сужение $P(t, \lambda)$ на достаточно малую окрестность t_0 есть композиция конечного числа непрерывных операторов. Это доказывает непрерывность $P(t, \lambda)$ по t и завершает доказательство инъективности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Palais R. S. Natural operations on differential forms.— «Trans. Amer. Math. Soc.», 1959, v. 92, p. 125—141.
2. Красносельский М. А. О нескольких новых принципах неподвижной точки.— ДАН СССР, 1973, т. 208, № 6, с. 1280—1281.
3. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. М., «Наука», 1975.

Поступила 8 мая 1975 г.