УДК 517.43

Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК, д-р физ.-мат. наук

ОБ ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ. I

§ 1. Операторы обобщенного дифференцирования и интегрирования в пространстве К (F).

Пусть $\overline{A}_0$ — класс всех аналитических в точке $z = 0$ функций и $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ — функция из $\overline{A}_0$ с отличными от нуля тейлоровскими коэффициентами. Положим $\overline{E}_0 = \Big\{ y(z) =$

$= \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^k : \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \left|\frac{y_k}{a_k}\right|^{\frac{1}{k}} < \infty \Big\}$. Очевидно, что $\overline{E}_0 \subseteq \overline{A}_0$ По каждой функции $y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^k$ из $\overline{E}_0$ построим функцию $\hat{y}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{a_k} t^{-k-1}$, регулярную в некоторой окрестности бесконечно-удаленной точки и исчезающую в бесконечности. Функцию $\hat{y}(t)$ назовем f-ассоциированной с $y(z)$ по Борелю (см. [1]).

Пусть F — замкнутое ограниченное множество, не разбивающее плоскость, и пусть $d = \sup\{|z| : z \in F\}$. Обозначим символом $K(F)$ множество всех тех функций из $\overline{E}_0$, f-ассоциированные с которыми регулярны в области CF. Соответствие $y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^k \leftrightarrow \hat{y}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{a_k} t^{-k-1}$ устанавливает алгебраический изоморфизм между $K(F)$ и множеством $A_0(CF)$ всех регулярных в CF функций, исчезающих в бесконечно-удаленной точке. Заметим, что если $y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^k$ — функция из $K(F)$, то $\hat{y}(t)$ регулярна в области $|t| > d$, откуда следует, что $y(z)$ аналитична в круге $|z| < \frac{R_0}{d}$, где $\frac{1}{R_0} = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |a_k|^{\frac{1}{k}}$. Итак, $K(F) \subset A\left(\frac{R_0}{d}\right)$, где $A(\rho)$ — класс всех аналитических в круге $|z| < \rho$ функций. Связь между функциями $y(z)$ и $\hat{y}(t)$ выражается формулой $y(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(zt)\, \hat{y}(t)\, dt$, $C = C_R = \{t : |t| = R\}$, где $R > d$, $|z| < \frac{R_0}{R}$ или, если $|z| \leqslant r < \frac{R_0}{d}$, то $C = C_{\frac{R_0}{r_1}}$, где $r < r_1 < \frac{R_0}{d}\Big)$.

В дальнейшем будем называть контуром любую совокупность конечного числа взаимно-внешних замкнутых кусочно-гладких положительно-ориентировочных жордановых кривых. Применяя теорию вычетов, находим $\left(\text{при } |z| \leqslant r < \frac{R_0}{d}\right)$: $y(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma f(zt)\, \hat{y} \times$ $\times (t)\, dt$, $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n)$, где Γ — любой контур такой, что $F \subset \operatorname{int} \Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{int} \Gamma_i$ и $\max\{|t| : t \in \Gamma\} < \frac{R_0}{r}$.

Пусть, обратно, функция $H(z)$ имеет вид: $H(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma f(zt) \times$ $\times h(t)\, dt$, $z \in Q$; здесь Q — произвольный компакт круга $V_{\frac{R_0}{d}} = \left\{z : |z| < \frac{R_0}{d}\right\}$, $h(t) \in \overline{A}_0(CF)$, $\Gamma = \Gamma(Q)$, $F \subset \operatorname{int} \Gamma$. Очевидно, что

$H(z) \in \bar{A}_0$ и при больших по модулю значениях τ $\hat{H}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \times$ $\times \int_\Gamma t^k h(t)\, dt \tau^{-k-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h(t)}{\tau - t} dt = h(\tau)$. Отсюда $\hat{H} \in A_0(CF)$, т. е. $H \in K(F)$.

Если множество F непусто, то $K(F)$ содержит функции, не равные тождественно нулю. Пусть $a \in F$ и $k \geqslant 0$. Возьмем контур Γ в CF так чтобы $a \in \operatorname{int} \Gamma$. Тогда при малых z $z^k f^{(k)}(az) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(zt)}{(t-a)^{k+1}} dt$ и $z^k f^{(k)}(az) \in K(F)$, так как $\widehat{z^k f^{(k)}(az)} = \frac{k!}{(t-a)^{k+1}} \in A_0(CF)$. Далее любой многочлен принадлежит $K(F)$ тогда и только тогда, когда $0 \in F$.

Введем оператор обобщенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева (см. [2]):

$$D_f y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{a_k} y_k z^{k-1}, \; y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^k, \tag{1}$$

а также оператор обобщенного интегрирования

$$D_f^{-1} y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} y_k z^{k+1}. \tag{2}$$

Пусть $y \in K(F)$; тогда $D_f y = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{al}{a_{l+1}} y_{l+1} z^l$, $\overline{\lim_{l\to\infty}} \left| \frac{a_l}{a_{l+1}} y_{l+1} \right|^{\frac{1}{l}} \leqslant \frac{d}{R_0}$, и $D_f y \in A\left(\frac{R_0}{d}\right)$. Более того, $(\widehat{D_f y})(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y_{l+1}}{a_{l+1}} t^{-l-1} = t\hat{y}(t) - \frac{y_0}{a_0} \in A_0(CF)$ и $D_f y \in K(F)$. Если $z \in Q$, $\Gamma = \Gamma(Q) \subset CF$, $F \subset \operatorname{int}\Gamma$, то $(D_f y)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(zt)\, \widehat{D_f y}(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(zt)\, t\hat{y}(t)\, (dt)$; $(D_f^k y)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma t^k f(zt)\, \hat{y}(t)\, dt$, $k \geqslant 0$. Аналогично, если $y \in K(F)$, то $D_f^{-1} \times y \in \bar{A}_0$, причем $(\widehat{D_f^{-1} y})(t) = \frac{\hat{y}(t)}{t}$. Если $0 \in F$, то $D_f^{-1} y \in K(F)$, $\forall y \in K(F)$. Пусть, обратно, $D_f^{-1} y \in K(F)$, $\forall y \in K(F)$ и пусть $\alpha \in F$. Тогда $f(\alpha z) \in K(F)$ и $(\widehat{D_f^{-1} f(\alpha z)})(t) = \frac{(\widehat{f(\alpha z)})(t)}{t} = \frac{1}{t(t-\alpha)} \in A_0(CF)$, откуда $0 \in F$. Таким образом, оператор D_f всегда действует из $K(F)$ в $K(F)$; для того чтобы оператор D_f^{-1} действовал из $K(F)$ в $K(F)$, необходимо и достаточно, чтобы $0 \in F$. При этом, если $0 \in F$,

$s \geqslant 0$ и $z \in Q = \bar{Q} \subset V_{\frac{R_0}{d}}$ то $(D_f^{-s}y)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} t^{-s} f(zt)\,\hat{y}(t)\,dt$, $\Gamma = \Gamma(Q)$, $F \subset \operatorname{int}\Gamma$.

Введем теперь оператор обобщенного сдвига

$$T(y,\ \alpha)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (D^k y)(z)\, a_k \alpha^k. \tag{3}$$

(по-видимому, впервые такой оператор рассматривался в работе [3]). Пусть $y \in K(F)$, $|z| \leqslant r < \frac{R_0}{d}$, α — любое конечное число. Тогда $(D^k y)(z)\,\alpha^k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(zt)\,\hat{y}(t)\,t^k \alpha^k\,dt$, $\Gamma = C_{\frac{R_0}{r_1}}$.

$$r < r_1 < \frac{R_0}{d},$$

Если еще $|\alpha| \leqslant r$, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (D^k y)(z)\, a_k \alpha^k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(zt)\, f(\alpha t)\,\hat{y}(t)\,dt$, причем ряд слева сходится абсолютно и равномерно в бицилиндре $|z| \leqslant r$, $|\alpha| \leqslant r$. Отсюда следует, что при любом фиксированном значении переменной α или z из круга $V_{\frac{R_0}{d}}$ функция $T(y,\ \alpha)(z)$ для любого y из $K(F)$ аналитична по второй переменной в круге $V_{\frac{R_0}{d}}$. Если $|\alpha| \leqslant r < \frac{R_0}{d}$, то функция $f(\alpha t)\,\hat{y}(t)$ (как функция переменного t, при фиксированном значении параметра α) аналитична в области $Q_r = CF \cap V_{\frac{R_0}{r}}$. По теореме Пуанкаре — Ароншайна (см. [4]) функцию $f(\alpha t)\,\hat{y}(t)$ можно представить единственным образом в виде суммы двух компонент: $\forall t \in Q_r$, $f(\alpha t)\,\hat{y}(t) = (f(\alpha t)\,\hat{y}(t))_- + (f(\alpha t)\,\hat{y}(t))_+$, где $(f(\alpha t)\,\hat{y}(t))_+ \in A\left(\frac{R_0}{r}\right)$, $(f(\alpha t)\,\hat{y} \times (t))_- \in \bar{A}_0(CF)$. При этом компоненты разложения вычисляются эффективно: например, если $\Gamma = (\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \ldots,\ \Gamma_m)$ — контур в Q_r, $F \subset \operatorname{int}\Gamma$, то $(f(\alpha z)\,\hat{y}(z))_- = \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_j} \frac{f(\alpha t)\,\hat{y}(t)}{t - z}\,dt$.

Кроме того $\forall z \in V_r$, $\forall \alpha \in V_r$, $T(y,\ \alpha)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(zt)\,[(f(\alpha t)\,\hat{y} \times (t))_- + f(\alpha t)\,\hat{y}(t)_+]\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(zt)\,(f(\alpha t)\,\hat{y}(t))_-\,dt$. Таким образом, $T(y,\ \alpha)(z) = (f(\alpha t)\,\hat{y}(t))_- \in A_0(CF)$, и $T(y,\ \alpha) \in K(F)$.

Заметим еще, что если $r < \frac{R_0}{d}$, и $|z| \leqslant r$, $|\alpha| \leqslant r$, $\Gamma = C_{\frac{R_0}{r_1}}$,

$r < r_1 < \frac{R_0}{d}$, то $(D^n T(y, \alpha))(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} t^n f(zt) f(\alpha t)\hat{y}(t)\,dt$. Положим $V_\alpha(z) = \frac{1}{a_0} T(y, \alpha)(z)$. Мы получили, что если $|\alpha| < \frac{R_0}{d}$ и $y \in K(F)$, то функция V_α из $K(F)$ удовлетворяет соотношениям

$$(D^n V_\alpha)_{(0)} = (D^n y)(\alpha),\ n = 0,\ 1, \ldots \tag{4}$$

Введем в векторном пространстве $A_0(CF)$ набор преднорм $p \in P$: $\forall y \in A_0(CF)$ $p(y) = \sup\{|y(z)| : z \in Q\}$, где Q — произвольный компакт CF. В топологии, определяемой этим набором преднорм, $A_0(CF)$ — пространство Фреше (см. [5]). Положим теперь для любой функции y из $K(F)$ и для любой преднормы p из P $q_p(y) = p(\hat{y})$. В топологии, определяемой набором преднорм $\{q_p\}$, $K(F)$ — пространство Фреше, изоморфное $A_0(CF)$. Между пространством $A_0(CF)$ и пространством $A(F)$ локально-аналитических на множестве F функций устанавливается двойственная связь посредством билинейной формы $\langle x, y\rangle_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} x(t)\,y(t)\,dt$, $x(t) \in A(F)$, $y(t) \in A_0(CF)$, $\Gamma = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m)$, контур Γ лежит в CF и разделяет особенности $x(t)$ и $y(t)$ $(\Gamma = \Gamma(x))$.

Пусть G_n — открытые ограниченные множества, состоящие из конечного числа m_n компонент и «стягивающиеся» к F как к «ядру» (см. [6]). Если ввести в $A(F)$ топологию индуктивного предела F-пространств $A(G_n)$, то $A(F)$ — LN^*-пространство (см. [7]) и топология сильного сопряженного $(A(F))'_\beta$ совпадает с топологией в $A_0(CF)$, определяемой набором преднорм P (см. [4]). Билинейная форма $\langle x, y\rangle_1 = \langle x, \hat{y}\rangle_1$, $x(t) \in A(F)$, $y(t) \in K(F)$, устанавливает отделимую двойственность между $A(F)$ и $K(F)$; при этом $K(F)$ отождествляется с $(A(F))'_\beta = A_0(CF)$.

Пусть теперь G — открытое множество, не содержащее бесконечно-удаленной точки и не разбивающее плоскость; $A(G)$ — пространство локально-аналитических в G функций с топологией, определяемой набором преднорм $P = \{p\}$, где $p(y) = \sup\limits_{z \in F}|y(z)|$, F — произвольное замкнутое подмножество (компакт) G. Учитывая, что G не разбивает плоскость, можно в наборе преднорм P ограничиться всеми компактами G, не разбивающими плоскость. При этом $A(G) = \lim pr A(F)$, где F — все такие компакты, и проективный предел берется относительно операции вложения.

Пусть $E(G) = \bigcup\limits_{F \subset G} K(F)$, где объединение берется по всем компактам G, не разбивающим плоскость. Введем в $E(G)$ топологию индуктивного предела пространств Фреше $K(F)$ (относительно операции тождественного вложения). Тогда (см. [8]) $(A(G))'_\beta = (\lim pr A(F))'_\beta = \lim \operatorname{ind}(A(F))'_\beta = \lim \operatorname{ind} K(F) = E(G)$. Двойственная связь между пространствами $H = A(G)$ и $E = E(G)$ устанавливается билинейной формой $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} x(t)\hat{y}(t)\,dt$, $x \in H$, $y \in E$, где $\Gamma = \Gamma(y)$ — контур, лежащий в G и такой, что $\hat{y}(t)$ локально-аналитична в замкнутой области, ограниченной контуром и содержащей бесконечно-удаленную точку.

Так как оператор D_f действует из $K(F)$ в $K(F)$, где F — любой компакт конечной плоскости со связным дополнением, то D_f действует на E и E, то же справедливо и для оператора D_f^{-1}, если $0 \in G$.

§ 2. Оператор умножения на функцию в пространстве H и его сопряженный

Приведем в начале две леммы, которыми будем неоднократно пользоваться в дальнейшем.

Лемма 1. *Любую функцию $h(z)$, локально-аналитическую на контуре Γ, можно представить и притом единственным образом на Γ в виде $h(z) = h^-(z) + h^+(z)$, где функция $h^+(z)$ локально-аналитична на множестве $\overline{\operatorname{int}\Gamma}$, а $h^-(z)$ — на $\overline{\operatorname{ext}\Gamma}$, причем $h^-(\infty) = 0$ (компоненту $h^-(z)$ будем обозначать иногда еще символом $(h(z))_-$).*

Доказательство. Пусть $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m)$, и $h(z) = (h_1(z), h_2(z), \ldots, h_m(z))$, где $h_i(z)$ аналитичны на Γ_i. Приведем контуры $\Gamma'(\Gamma_1', \ldots, \Gamma_m')$ и $\Gamma''(\Gamma_1'', \ldots, \Gamma_m'')$ настолько близко к Γ, чтобы $\Gamma_i' \subset \operatorname{int}\Gamma_i$, $\Gamma_i \subset \operatorname{int}\Gamma_i''$ и чтобы $h(z)$ была локально-аналитична на замкнутом множестве Q, ограниченном контурами Γ' и Γ''. Положим $\forall_i \leqslant m$ $h_i^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_i''}\frac{h_i(t)}{t-z}\,dt$, $h_i^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_i'}\frac{h_i(t)}{r-t}\,dt$. Если $z \in \operatorname{int}\Gamma''$, то существует единственный номер $i \leqslant m$ такой, что $z \in \operatorname{int}\Gamma_i''$, и мы полагаем $h^+(z) = h_i^+(z) - \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} h_j^-(z)$. Если же $z \in \operatorname{ext}\Gamma'$, то положим $h^-(z) = \sum\limits_{j=1}^{m} h_j^-(z)$. Тогда всюду на Γ $h(z) = h^-(z) + h^+(z)$. При этом $\forall z \in \operatorname{ext}\Gamma$ $h^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{h(t)}{z-t}\,dt$. Наконец, единственность представления следует из теоремы Лиувилля.

Представление $h(z) = h^-(z) + h^+(z)$ будем называть каноническим. Лемма 1 не является новой и мы привели ее доказательство для того, чтобы обратить внимание читателя на способ эффективного построения нужных в дальнейшем компонент $h^+(z)$ и $h^-(z)$ канонического представления.

Следующая лемма является обобщением одной леммы Полиа (см. [9]).

Лемма 2. Пусть $f(z) \in A_0$, $f^{(k)}(0) \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $b(z)$ — *локально-аналитическая на контуре* Γ *функция, такая, что при всех достаточно малых* $z \int\limits_\Gamma f(zt)\, b(t)\, dt = 0$. *Тогда компонента* $b^-(z)$ *в каноническом представлении* $b(t)$ *на* Γ *равна тождественно нулю.*

Пусть R настолько велико, что $\Gamma \subset \operatorname{int} C_R$. Если $|z| \leqslant \delta$, то $0 = \int\limits_\Gamma f(zt)\, b(t)\, dt = \int\limits_\Gamma f(zt)(b^-(t) + b^+(t))\, dt = \int\limits_\Gamma f(zt)\, b^-(t)\, dt =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \int\limits_\Gamma t^k b^-(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \int\limits_{C_R} t^k b^-(t)\, dt.$$ Отсюда

$\int\limits_{C_R} t^k b^-(t)\, dt = 0$, $\forall K \geqslant 0$ и $b^-(t) \equiv 0$.

Пусть $g(z)$ — некоторая фиксированная функция из $H = A(G)$. Линейный оператор $l: \forall y \in H \to gy$ непрерывно действует из H в H. Как известно (см. [8]), сопряженный оператор l' слабо непрерывен в $E = E(G)$, а, значит, и непрерывен в силу бочечности E. Найдем его представление. По определению $\langle lx, y \rangle = \langle x, l'y \rangle$, $\forall x \in H$, $\forall y \in E$. Но $\langle l, x, y \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma g(t)\, x(t)\, \hat{y}(t)\, dt$, $\Gamma \subset G$, $\Gamma = \Gamma(y)$. Если a — любое конечное число, то $e^{az} \in H$ и $\langle e^{az} l' y \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} e^{az} (\hat{l' y})(t)\, dt$, $\Gamma_1 \subset G$, $\Gamma_1 = \Gamma(y)$. Отсюда $\exists \Gamma_2 \subset G$, $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_2} e^{at} \{(l'\hat{y})(t) - g(t)\, \hat{y}(t)\}\, dt = 0$. По лемме 2 $(\widehat{l'y})(t) - g(t)\, \hat{y}(t) = \mu^+(t)$, где μ^+ регулярна на $\overline{\operatorname{int} \Gamma_2}$. Тогда для всех достаточно малых z $(l'y)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_2} f(zt)(\widehat{l'y})(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_3} f(zt)\, g(t)\, \hat{y}(t)\, dt$, где Γ_3 — любой контур, находящийся в G и такой, что $\hat{y}(t)$ локально-аналитична на $\operatorname{ext} \Gamma_3$. Это представление справедливо, в частности, при $|z| < \frac{R_0}{d_2}$, где $d_2 = \sup\{|t| : t \in \Gamma_3\}$.

Таким образом, оператор L:

$$\forall y \in E \to \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma f(zt)\, g(t)\, \hat{y}(t)\, dt, \quad \Gamma = \Gamma(y), \quad z \in Q_r \tag{5}$$

является непрерывным оператором в E, сопряженным к l. В силу рефлексивности монтелевских пространств H и E оператор l будет сопряженным к L.

Заметим, что оператор L выражается через оператор обобщенного сдвига. Именно, пусть $y \in E$, тогда $y \in K(F)$, где F — некоторый компакт G, не разбивающий плоскость. Если $\Gamma \subset G$

и $F \subset \operatorname{int}\Gamma$, то $\hat{y}(t)$ — локально-аналитична на $\overline{\operatorname{ext}\Gamma}$ и $\forall z \in Q_r$: $(Ly)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(zt)\, g(t)\, \hat{y}(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} g(t)\,(f(zt)\,\hat{y}(t))\, dt$ и при всех достаточно малых z $(Ly)z = \langle g,\ T(y,\ z)\rangle$. В частности, если $f(z)$ — целая функция ($f \in A_\infty$), то $E \leqslant A_\infty$, соотношение $T(y, \alpha) \times (t) = (f(\alpha t)\,\hat{y}(t))$ справедливо для любого конечного α и любого $t \in CF$, если $y \in K(F)$. Тогда для всех конечных z $(Ly)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(zt)\, g(t)\, \hat{y}(t)\, dt = \langle g,\ T(y,\ z)\rangle$, $\Gamma \subset CF$, $\Gamma = \Gamma(y)$.

Отметим важный частный случай, когда $f(z) = e^z$, тогда $E \subseteq [1, \infty)$ и для всех конечных z и α $T(y,\ z)(\alpha) = y(z+\alpha)$, $(Ly)(z) = \langle g(t),\ (\widehat{y(z+\alpha)})(t)\rangle$, где $(\widehat{y(z+\alpha)})(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} y^{(k)}(z)\, t^{-k-1}$ (иначе говоря, $\hat{y}(z+\alpha)$ является функцией, ассоциированной по Борелю со сдвижкой $y(z+\alpha)$, где α — независимое переменное, а z — параметр). В этом случае также $(Ly)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{zt} g(t)\, \hat{y} \times (t)\, dt$, $\Gamma = \Gamma(y)$, $\Gamma \subset CF$, где $\hat{y}(t)$ — борелевское преобразование экспоненциальной функции $y(z)$.

Остановимся еще на случае, когда область G совпадает с кругом V_R, $0 < R < \infty$, В этом случае $E \subseteq A\left(\frac{R_0}{R}\right)$; для любой функции $y(z)$ из E $(Ly)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho} g(t)\, f(zt)\, \hat{y}(t)\, dt$, где $\rho = \rho(y)$, $0 < \rho < R$, $\hat{y}(t)$ регулярна на $\overline{\operatorname{ext} C_\rho}$, $|z| < \frac{R_0}{\rho}$. Пусть $\hat{y}(t) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m t^{-m-1}$, $\varlimsup\limits_{m\to\infty} |b_m|^{\frac{1}{m}} = \rho_1$, $0 \leqslant \rho_1 < \rho$. Имеем $(Ly)(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} g_m \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho} t^m f(zt)\, \hat{y}(t)\, dt$, $|z| < \frac{R_0}{\rho}$. Полагая $F = \{t : |t| \leqslant \rho_1\}$ убеждаемся, что $y(z) \in K(F)$ и $(D_f^m y)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho} t^m f(zt)\, \hat{y}(t)\, dt$, $|z| < \frac{R_0}{\rho_1}$. Итак, если $|z| \leqslant \frac{R_0}{\rho_1} = r(y)$, то

$$(Ly)(z) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m\, (D_f^m y)(z), \quad \varlimsup_{m\to\infty} |g_m|^{\frac{1}{m}} \leqslant \frac{1}{R}, \tag{6}$$

и оператор L представляется (при достаточно малых z) в виде оператора бесконечного порядка в обобщенных производных с постоянными коэффициентами. Обратно, любой оператор вида (6) записывается в форме (5).

Если еще функция $f(z)$ — целая, то представление (6) справедливо при всех z; наконец, в случае $f(z)=e^z$, L превращается в линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами: $(Ly)(z)=\sum_{m=0}^{\infty} g_m y^{(m)}(z)$. В последнем случае $E=[1, R]$.

Все последующее изложение будет посвящено исследованию разрешимости уравнения

$$(Ly)(z)=h(z) \tag{7}$$

в классах $E(G)$ и $K(F)$.

Отметим некоторые общие свойства операторов L и l. Прежде всего, множество $l(H)$ замкнуто в H; следовательно, (см. [8]) и множество $l'(H')=L(E)$ замкнуто (слабо и сильно) в E. Таким образом, L — нормально-разрешимый оператор.

Открытое множество G представляется (единственным образом) в виде объединения не более чем счетного числа непересекающихся областей C_k. Очевидно, что $l^{-1}(0)=\{0\}$ тогда и только тогда, когда функция $g(z)$ не обращается в тождественный нуль ни в одной из компонент G_k. (Следуя Диксону (см. [9]), будем в этом случае писать, что $g \# 0$ в G). В силу общих положений теории двойственности (см. [8, с. 705]), множество $L(E)$ плотно в E тогда и только тогда, когда $l^{-1}(0)=\{0\}$. Итак, $L(E)=E$ в том и только в том случае, если $g \# 0$ в G.

Обозначим символом G° объединение всех тех компонент G, в которых $g(z)\equiv 0$, а символом G' — объединение остальных компонент G. Можно всегда считать, что функция $g(z)$ отлична от тождественного нуля в G (в противном случае $L(E)=\{0\}$ и $L^{-1}(0)=E$). Поэтому $G^1\neq\varnothing$, $G=G^\circ\cup G^1$ и $G^\circ=\varnothing$ тогда и только тогда, когда $g\neq 0$ в G. Положим $E_0=E(G^0)$ и $E_1=E(G^1)$. Очевидно, что E_i — векторные подпространства E, причем $E=E_0\dotplus E_1$. Нетрудно проверить, что множества G^0 и G^1 не разбивают плотность и оператор L действует из E_i в E_i $(i=0, 1)$, причем $L(E_0)=\{0\}$.

Если L_i — сужение L на E_i, то общий вид решения уравнения $Ly=0$ из E дается формулой $y=y_1+y_2$, где y_1 — любая функция из E_0, а $y_2\in L_1^{-1}\{0\}$.

Пусть g_1 — функция локально-аналитическая на открытом множестве G^1 и состоящая из всех ненулевых компонент g (т. е. $g(z)\equiv g_1(z)$ на G^1). Из изложенного выше следует, что оператор l_1: $\forall v\in A(G^1)\to g_1 v\in A(G^1)=H_1$ отображает взаимно-однозначно и непрерывно F-пространство H_1 на его замкнутое подпространство. Нетрудно убедиться, что L_1 — сопряженный к l_1 оператор. Отсюда $L_1(E_1)=E_1$. Таким образом, $L(E)=E_1$, и вопрос разрешимости уравнения $Ly=h$ в пространстве E выяснен полностью. В дальнейшем нас будут интересовать два вопроса: 1) как охарактеризовать ядро оператора L; 2) как построить эффективно частное решение уравнения $Ly=h$, где $h\in E_1$.

Допустим, что нам удалось описать множество $L_1^{-1}(0)$ и указать метод эффективного построения в пространстве $L_1^{-1}(0)$ частного решения уравнения $L_1 y = h$, где $h \in E_1$. Очевидно, что тем самым решены и оба интересующих нас вопроса.

Поэтому всюду в дальнейшем мы будем иметь дело с множеством G_1 и пространством E_1. Для простоты письма можно просто предположить, что $g \# 0$ в G (т. е. G_1 будет играть роль G, а оператор L_1 — роль оператора L).

Метод исследования уравнения (7), который используется в последующих параграфах, является фактически развитием метода, примененного еще Муггли и А. О. Гельфондом (см. [9, 11]) при исследовании дифференциальных уравнений бесконечного порядка с постоянными коэффициентами в классах экспоненциальных функций.

§ 3. Эффективное построение частного решения неоднородного уравнения. Представление общего решения однородного уравнения

Пусть $h(z) \in E(G)$, $g(z) \in A(G)$, где G — открытое множество, не содержащее бесконечно-удаленную точку и не разбивающее плоскость. Тогда найдется замкнутое ограниченное подмножество F множества G, также не разбивающее плоскость и такое, что $h(z) \in K(F)$. Покажем, что существует частное решение уравнения (7) из $K(F)$, и укажем способ его построения.

В силу того, что $g \# 0$ в G, найдется число $\delta \in (0, \rho(F, \partial G))$ такое, что если $K_z = \{t : |t - z| \leqslant \delta\}$ и $V = \bigcup\limits_{z \in F} K_z$ то $g(z) \neq 0$ на множестве $V \cap CF$. Возьмем последовательность $\delta_n \downarrow 0$, $\delta_n < \delta$ и выберем в G последовательность контуров $\Gamma^{(n)}$ со следующими свойствами: $\forall n \geqslant 1$ $F \subset \operatorname{int} \Gamma^{(n)}$; $\Gamma^{(n+1)} \subset \operatorname{int} \Gamma^{(n)}$; $\sup\{\rho(z, F) : z \in \Gamma^{(n)}\} < \delta_n$.

Локально-аналитическую на $\Gamma^{(n)}$ функцию $\dfrac{\hat{h}(t)}{g(t)}$ представим по лемме 1 в виде

$$\frac{\hat{h}(t)}{g(t)} = \left(\frac{h}{g}\right)_n^-(t) + \left(\frac{h}{g}\right)_n^+(t), \ t \in \Gamma^{(n)}. \tag{8}$$

Пусть $\tau \in \operatorname{ext} \Gamma^{(n)}$ и $\lambda_n(\tau) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\Gamma^{(n)}} \frac{\hat{h}(t)\, dt}{g(t)(\tau - t)}$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда $\lambda_n(\tau) = \left(\dfrac{\hat{h}}{g}\right)_n^-(\tau)$ и $\lambda_n(\tau)$ регулярна в области $\operatorname{ext} \Gamma^{(n)}$ и локально-аналитична на $\overline{\operatorname{ext}}\, \Gamma^{(n)}$. Кроме того, $\forall \tau \in \operatorname{ext} \Gamma^{(n)} \lambda_{n+1}(\tau) = \lambda_n(\tau)$ или $\left(\dfrac{\hat{h}}{g}\right)_n^-(\tau) = \left(\dfrac{\hat{h}}{g}\right)_{n+1}^-(\tau)$. Так как правая часть последнего равенства регулярна в области $\operatorname{ext} \Gamma^{(n+1)}$ а левая — локально-аналитична на $\operatorname{ext} \Gamma^{(n)}$, то это равенство справедливо и на $\Gamma^{(n)}$. Последовательность $\{\lambda_n(\tau)\}$ сходится равномерно внутри CF к функции $\lambda(\tau)$; очевидно, что $\lambda(\tau) \in A_0(CF)$ и $\lambda(\tau) \equiv \lambda_n(\tau)$, $\forall \tau \in \operatorname{ext} \Gamma^{(n)}$.

Положим $\gamma_n = \sup\{|t| : t \in \Gamma^{(n)}\}$ и рассмотрим функцию

$$\omega_F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^{(n)}} f(zt)\,\lambda(t)\,dt, \quad |z| < \frac{R_0}{\gamma_1}, \tag{9}$$

при каком-либо значении $n \geqslant 1$ (результат интегрирования для указанных значений z не зависит от n). Очевидно, что $\omega_F(z) \in \overline{A}_0$, $\hat{\omega}_F(t) = \lambda(t)$ и $\omega_F \in K(F)$. Отсюда для всех достаточно малых z $|z| < \frac{R_0}{\gamma_1}$

$$(L\omega_F)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^{(n)}} f(zt)\,g(t)\,\lambda(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^{(n)}} f(zt)\,g(t) \left(\frac{\hat{h}}{g}\right)_n^{-}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^{(n)}} f(zt)\,\hat{h}(t)\,dt = h(z).$$

Таким образом, $\omega_F(z)$ является частным решением уравнения (7) из класса $K(F)$.

Выясним теперь структуру общего решения из класса $K(F)$ однородного уравнения. Пусть $\varphi \in K(F)$ и $L\varphi = 0$. Тогда $\int\limits_{\Gamma} f(zt)\,g(t)\,\hat{\varphi}(t)\,dt = 0$, где Γ — любой контур, лежащий в G и содержащий внутри себя F, а $|z| < b(\Gamma)$. Выберем контур Γ так, чтобы $\sup\limits_{t \in \Gamma} \rho(t, F) < \delta$, где число δ выбрано выше. По лемме 2 на Γ $g(t)\,\hat{\varphi}(t) = \Phi^+(t)$, где функция $\Phi^+(t)$ локально-аналитична на множестве $\overline{\operatorname{int}} \Gamma$. Тогда для тех же z

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(zt)\,\hat{\varphi}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(zt)\,\frac{\Phi^+(t)}{g(t)}\,dt.$$

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — нули $g(z)$ кратности $p_1, p_2, \ldots, p_s$, принадлежащие F $(s = s(F),\ s < \infty)$. На основании теории вычетов

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{l=0}^{p_j - 1} a_{l,j} z^l f^{(l)}(\alpha_j, z), \ |z| < b_0. \tag{10}$$

Пусть, обратно, $\varphi(z)$ имеет представление (10), где $a_{l,j}$ — произвольные постоянные. Тогда $\varphi(z) \in K(F)$ и

$$\hat{\varphi}(t) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{l=0}^{p_j - 1} \frac{al,\ jl!}{(t - \alpha_j)^{l+1}}.$$

Если Г — любой контур, разделяющий F и ∂G, $|z| < b(\Gamma)$, то по теореме Коши $(L\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(zt)\, g(t)\, \hat{\varphi}(t)\, dt = 0$. Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. *Пусть G — открытое множество, не содержащее бесконечно-удаленную точку и не разбивающее плоскость, F — произвольный компакт G со связным дополнением; $g \in A(G)$, $g \# O$ в G. Тогда уравнение (7) для любой правой части h из $K(F)$ имеет частное решение $\omega_F(z)$ из класса $K(F)$, определяемое по формуле (9). Общее представление решения уравнения из класса $K(F)$ дается формулой $y(z) = \omega_F(z) + \varphi_F(z)$, где $\varphi_F(z)$ — произвольная функция вида (10).*

Следствие 1. *Пусть G и g те же, что и в теореме 1 и $h \in E(G)$, а F — компакт G, не разбивающий плоскость и такой, что $h \in K(F)$. Тогда общее представление решения уравнения (7) из $E(G)$ дается формулой $y(z) = \omega_F(z) + \varphi_{F_1}(z)$, где F_1 — любой компакт G_1 со связным дополнением, содержащий F.*

Отметим в заключение еще теорему общего характера, вытекающую из теоремы 1 и результатов § 2.

Теорема 2. *Пусть G — открытое множество со связным дополнением, не содержащее бесконечно-удаленную точку. Пусть, далее, $g(z) \in A(G)$. Для того чтобы оператор L был эпиморфизмом (соответственно, изоморфизмом) $E(G)$, необходимо и достаточно, чтобы $g \# 0$ в G (соответственно, $g(z) \neq 0$ в G).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евграфов М. А. Интерполяционная задача Абеля—Гончарова. М., ГИТТЛ, 1954. 126 с.
2. Гельфонд А. О., Леонтьев А. Ф. Об одном обобщении ряда Фурье.— «Мат. сб.», 1951, т. 29 (71), с. 477—500.
3. Громов В. П. О полноте систем аналитических функций в области.— «Мат. сб.», 1963, т. 62 (104), № 3, с. 320—334.
4. Aronszajn N. Sur les dècompositions des fonctions analytiques uniformes et sur leurs applications.— «Acta Math.», 1935, 6, 65, N 1, p. 1—156.
5. Хавин В. П. Пространства аналитических функций.— Сб. «Итоги науки», сер. мат. анализ, 1964, М., ВИНИТИ, 1966, с. 76—164.
6. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций.— М., ГИТТЛ, 1950. 703 с.
7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., ГИФМЛ, 1959. 684 с.
8. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М., «Мир», 1969. 1071 с.
9. Muggli H. Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit constanten Koeffitienten.— «Commentarii Mathem. Helvetici», 1938, vol. 1, 1, p. 151—179.
10. Dickson D. G. Convolution equations and harmonis analysis in spaces of entire functions.— «Transactions of the American Mathematical Society», 1973, vol. 184, п. 373—386.
11. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М., ГИФМЛ, 1959. 400 с.

Поступила 10 февраля 1975 г.