УДК 517.5

А. А. КОНДРАТЮК, М. Н. ШЕРЕМЕТА

АСИМПТОТИКА ОДНОГО КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ С ТРАНСФИНИТНО ИЗМЕРИМОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ НУЛЕЙ

Пусть $N_0(x)$ — неубывающая неотрицательная на $[0, \infty)$ функция, тождественно равная нулю на $[0, a)$ при некотором $a > 0$. Класс таких функций обозначим через L. Пусть далее

$$N_k(r) = \int_0^r (N_{k-1}(t)/t)\,dt,\ k \geqslant 1, \text{ и}$$

$$d_k = \varliminf_{r\to\infty} N_k(r)/V(r),\ D_k = \varlimsup_{r\to\infty} N_k(r)/V(r), \tag{1}$$

где $V(r) = r^{\rho(r)}$, а $\rho(r)$ — некоторый уточненный порядок [1, с. 69], причем $\rho(r) \to \rho \neq 0, \infty$ при $r \to \infty$. В предположении $D_k < \infty$, $k \geqslant 0$, для всякого $\varepsilon > 0$ при $r \geqslant r_0(\varepsilon)$ имеем $N_{k+1}(r) \leqslant O(1) + \int_{r_0}^r ((D_k + \varepsilon) V(t)/t)\,dt$, откуда (см. [1, с. 73]) $D_{k+1} \leqslant (D_k + \varepsilon)/\rho$, т. е. ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем $\rho D_{k+1} \leqslant D_k$. В случае, когда $D_k = \infty$, последнее неравенство очевидно. Аналогично получаем $\rho d_{k+1} \geqslant d_k$. Таким образом, имеем цепочку неравенств

$$d_0 \leqslant \rho d_1 \leqslant \cdots \leqslant \rho^k d_k \leqslant \cdots \leqslant \rho^k D_k \leqslant \cdots \leqslant \rho D_1 \leqslant D_0. \tag{2}$$

Наряду с оценкой в (2) для $\rho^k D_k$ сверху мы укажем оценку этой величины снизу. Так как $N_{k+1}(er) \geqslant N_k(r)$ (при $k = 0$ см. [1, с. 63]), то $D_{k+1} \geqslant D_k e^{-\rho}$, т. е. $D_k \geqslant D_0 e^{-k\rho}$. Однако последнее неравенство можно уточнить. Действительно, при $R > r$ имеем

$$N_k(R) \geqslant \int_r^R \frac{dt_1}{t_1} \int_r^{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \cdots \int_r^{t_{k-1}} \frac{N_0(t_k)}{t_k}\,dt_k \geqslant$$

$$\geqslant N_0(r) \int_r^R \frac{dt_1}{t_1} \int_r^{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \cdots \int_r^{t_{k-1}} \frac{dt_k}{t_k} = N_0(r) \frac{\ln^k \frac{R}{r}}{k!}.$$

Выбирая $R = e^k r$, получаем $N_k(e^k r) \geqslant k^k (k!)^{-1} N_0(r)$, откуда, учитывая свойства уточненного порядка [1, с. 73], получаем $D_k \geqslant \geqslant k^k e^{-k\rho} (k!)^{-1} D_0$ или

$$\rho^k D_k \geqslant \rho^k e^{(1-\rho)k} (2\pi (k+1))^{-\frac{1}{2}} D_0. \tag{3}$$

В частности при $\rho = 1$ имеем $D_0 \geqslant D_k \geqslant (2\pi (k+1))^{-\frac{1}{2}} D_0$.

Отметим, что методами Шанкара [2—3] и других авторов (библиографию см. в [4]) можно получить более тонкие оценки роста D_k, а также d_k, чем (3).

Отметим также, что если в (1) существует предел хотя бы при одном $k \geqslant 0$, то он существует для всех $k \geqslant 0$, что легко получить, использовав результат [3], где доказано, что если $d_k = D_k$, то $D_{k-1} = d_{k-1}$ на случай, когда $k = 1$.

Из (2) следует существование пределов $d = \lim\limits_{k\to\infty} \rho^k d_k$ и $D = \lim\limits_{k\to\infty} \rho^k D_k$. Возникает вопрос: что можно сказать о равенстве $d = D$ в случае, когда $d_0 \neq D_0$? Мы покажем, что существуют функции из L, для которых $d_0 \neq D_0$, а $d = D$, а также существуют функции из L, для которых $d_0 = d \neq D = D_0$. Ограничимся случаем, когда $\rho(r) \equiv 1$. Положим $\omega_k(x) = N_k(x)/x$ и допустим, что функция $\omega_0(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, \infty)$, $a > 0$ и удовлетворяет условию $x\omega_0'(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Покажем, что тогда такому же условию удовлетворяет функция $\omega_k(x)$, $k \geqslant 1$. Действительно, интегрируя по частям, имеем $\omega_{k+1}(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x \omega_k(t)\,dt = \omega_k(x) - \frac{1}{x}\int\limits_0^x t\omega_k'(t)\,dt$, откуда

$$\omega_{k+1}(x) - \omega_k(x) = -\frac{1}{x}\int\limits_0^x t\omega_k'(t)\,dt. \tag{4}$$

С другой стороны, дифференцируя тождество $x\omega_{k+1}(x) = \int\limits_0^x \omega_k(t)\,dt$, получаем

$$\omega_{k+1}(x) - \omega_k(x) = x\omega_{k+1}'(x), \tag{5}$$

откуда, ввиду (4), имеем

$$x\omega_{k+1}'(x) = -\frac{1}{x}\int\limits_0^x t\omega_k'(t)\,dt. \tag{6}$$

Из (6) следует, что если $x\omega_k'(x) \to 0$ при $x \to \infty$, то и $x\omega_{k+1}'(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Таким образом, если $x\omega_0'(x) \to 0$ при $x \to \infty$, то из (5) следует, что $\omega_{k+1}(x)=\omega_k(x)+0(1)$ при $x\to\infty$, т. е. для всех $k\geqslant 0$ выполняется $d_k=d_0$ и $D_k=D_0$, откуда $d=d_0$ и $D=D_0$.

Примером функции, удовлетворяющей условию $x\omega_0'(x)\to 0$ при $x\to\infty$, может служить функция $N_0(x)=x(2+\sin(\ln\ln x))$, $x\geqslant\geqslant a=e$. Для этой функции $d_0=d=1$ и $D_0=D=3$.

Рассмотрим функцию $N_0(x)=x(2+\sin(\ln x))$. Для нее выполняется $d_{2k}=2-2^{-k}$, $D_{2k}=2+2^{-k}$, $d_{2k+1}=2-2^{-k-1/2}$, $D_{2k+1}==2+2^{-k-1/2}$, $k\geqslant 0$, и $d=D=2$. (Вычисление соответствующих интегралов см. [5, № 1826, 1827]). Отметим, что для этой функции выполняется $x\omega_0'(x)=\cos(\ln x)\nrightarrow 0$ при $x\to\infty$.

Пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность комплексных чисел; $0<|\lambda_1|\leqslant\leqslant\cdots\leqslant|\lambda_n|\to\infty$ при $n\to\infty$; $N_0(r)=\sum\limits_{|\lambda_n|\leqslant r}1$ — считающая функция этой последовательности. Ясно, что $N_0(r)\in L$. Если для этой функции $N_0(r)$ выполняется $d=D$, то их общее значение обозначим через Δ и назовем трансфинитно усредненной плотностью последовательности $\{\lambda_n\}$, а саму последовательность $\{\lambda_n\}$ трансфинитно измеримой относительно уточненного порядка $\rho(r)$.

Через $G(\rho(r),\Delta)$ обозначим класс целых функций $f(z)$ порядка ρ с положительными нулями, имеющими трансфинитно усредненную плотность Δ относительно уточненного порядка $\rho(r)$, $\rho(r)\to\rho$ при $r\to\infty$. Через $H(\varphi)$ и $h(\varphi)$ обозначим индикатор и нижний индикатор функции $f(z)$:

$$H(\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{V(r)},\quad h(\varphi)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{V(r)}.$$

Теорема 1. *Для всякой целой функции $f(z)\in G(\rho(r),\Delta)$ нецелого порядка ρ выполняется* $h(\varphi)\leqslant\frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho}\cos\rho(\varphi-\pi)\leqslant H(\varphi)$.

Доказательство. Не уменьшая общности, будем считать, что $f(z)$ — каноническое произведение рода $p=[\rho]$. Пусть σ — произвольное число, $\rho<\sigma<p+1$. Тогда [6] (см. (13))

$$\int\limits_0^\infty\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{1+\sigma}}dr=\frac{\pi\cos\sigma(\varphi-\pi)}{\sin\pi\sigma}\int\limits_0^\infty\frac{N_0(r)}{r^{1+\sigma}}dr.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_0^\infty\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{1+\sigma}}dr=\frac{\pi\sigma^k\cos\sigma(\varphi-\pi)}{\sin\pi\sigma}\int\limits_0^\infty\frac{N_k(r)}{r^{1+\sigma}}dr.$$

Отсюда по теореме (А) из [6] имеем

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{N_k(r)}\geqslant\frac{\pi\rho^k\cos\rho(\varphi-\pi)}{\sin\pi\rho}\geqslant\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{N_k(r)}. \qquad (7)$$

Так же, как и в [7—8], из (7) находим $H(\varphi) \geqslant \frac{\pi\rho^k}{\sin \pi\rho}\left\{\frac{d_k + D_k}{2} \times \right.$ $\left.\times \cos\rho(\varphi-\pi) - (-1)^p \frac{D_k - d_k}{2} |\cos\rho(\varphi-\pi)|\right\}$, $h(\varphi) \leqslant \frac{\pi\rho^k}{\sin\pi\rho} \times$ $\times \left\{\frac{D_k + d_k}{2} \cos\rho(\varphi-\pi) + (-1)^p \frac{D_k - d_k}{2} |\cos\rho(\varphi-\pi)|\right\}$. Устремляя $k \to \infty$, получаем утверждение теоремы 1.

В случае целого порядка ρ индикаторы будем измерять относительно подходящим образом подобранного уточненного порядка в зависимости от того, принадлежит $V(r)$ классу сходимости C или нет. (Класс C определяется [1, с. 62] сходимостью интеграла $\int\limits_1^\infty t^{\rho(t)-\rho-1} dt\Big)$.

Если $V(r) \overline{\in} C$, то обозначим $V_1(r) = r^\rho \int\limits_1^r t^{\rho(t)-\rho-1}\, dt$, $V_3(r) = r^\rho$ и положим $V_2(r) = r^\rho \int\limits_r^\infty t^{\rho(t)-\rho-1}\, dt$, если $V(r) \in G$. Обозначим также $H_i(\varphi) = \varlimsup\limits_{r\to\infty} (V_i(r))^{-1} \ln|f(re^{i\varphi})|$, $h_i(\varphi) = \varliminf\limits_{r\to\infty} (V_i(r))^{-1} \ln|f(re^{i\varphi})|$.

Если $f(z) \in G(\rho(r), \Delta)$ и $V(r) \in G$, то $D_0 < \infty$ и функция $f(z)$ представима [9] в виде $f(z) = \exp\{\alpha z^\rho + P(z)\} \prod\limits_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\lambda_n}, \rho - 1\right)$, где α — постоянная; $P(z)$ — многочлен степени не выше $\rho - 1$ и $\{\lambda_n\}$ — последовательность нулей функции $f(z)$.

Теорема 2. *Если $f(z) \in G(\rho(r), \Delta)$, то при $V(r) \in G$ выполняется $H_2(\varphi) = h_2(\varphi) = \Delta\cos\rho\varphi$, когда $\alpha = 0$, и $H_3(\varphi) = h_3(\varphi) = |\alpha|\cos(\rho\varphi + \arg\alpha)$, когда $\alpha \neq 0$, а при $V(r) \overline{\in} G$ выполняется $H_1(\varphi) = h_1(\varphi) = \Delta\cos\rho\varphi$ для $\varphi \in (0, 2\pi)$.*

Доказательство. Ограничимся случаем $V(r) \overline{\in} C$. Функцию $f(z)$ можно [9, с. 437] представить в виде $f(z) = f_r^{(1)}(z) f_r^{(2)}(z)$, где $f_r^{(1)}(z) = \exp\left\{\frac{z^\rho}{\rho} \sum\limits_{\lambda_n \leqslant r} \lambda_n^{-\rho}\right\}$, а $\ln|f_r^{(2)}(z)| = 0\,(V_1(r))$ при $r \to \infty$ и $\delta \leqslant$ $\leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \delta$, $\delta > 0$. Далее, $\ln|f_r^{(1)}(re^{i\varphi})| = \frac{z^\rho}{\rho} \sum\limits_{\lambda_n \leqslant r} \lambda_n^{-\rho} = \frac{r^\rho}{\rho} \times$ $\times \cos\rho\varphi \int\limits_0^r \frac{dN_0(t)}{t^\rho}$. Интегрируя по частям, получаем

$$\ln|f_r^{(1)}(re^{i\varphi})| = \frac{\cos\rho\varphi}{\rho} \left\{\sum_{i=0}^{k} \rho^i N_i(r) + \rho^{k+1} r^\rho \int\limits_0^r \frac{N_k(t)}{t^{\rho+1}}\, dt\right\}. \qquad (8)$$

Учитывая, что $N_k(r) = o(V(r)) = 0(V_1(r))$, из (8) получаем $\ln|f_r^{(1)}(re^{i\varphi})| = \frac{\cos\rho\varphi}{\rho}\left\{0(V_1(r)) + \rho^{k+1}r^\rho \int_0^r \frac{N_k(t)}{t^{\rho(t)}} t^{\rho(t)-\rho-1}\,dt\right\}$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \frac{\rho^k N_k(t)}{V(t)} = \Delta$, из последнего соотношения имеем $\ln|f_r^{(1)}(re^{i\varphi})| = \Delta V_1(r)(1 + 0(1))\cos\rho\varphi$. Таким образом, при $r\to\infty$ выполнятся $\ln|f(re^{i\varphi})| \sim \Delta V_1(r)\cos\rho\varphi$ при $\delta \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \delta$, $\delta > 0$. В силу произвольности числа $\delta > 0$ теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970. 591 с.
2. Shankar H. On the characteristic function of a meromorphic function. I.— „Tôhoku Math. J.", 1957, v. 9, № 3, p. 243—246.
3. Shankar H. An oscillation theorem of Tauberian type.— „Tôhoku Math. J.", 1968, v. 20, № 2, p. 137—145.
4. Гольдберг А. А. Мероморфные функции.— Сб. «Итоги науки и техники. Математический анализ». 1973. т. 10, с. 5—97.
5. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., «Наука», 1966. 516 с.
6. Островский И. В. О некоторых асимптотических свойствах целых функций с вещественными отрицательными нулями.— «Учен. зап. Харьк. ун-та, 1961, т. 120. Зап. мех.-мат. фак. и Харьк. мат. о-ва», т. 28, с. 23—32.
7. Гольдберг А. А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. IV.— «Мат. сб.», 1965, т. 66, № 3, с. 411—457.
8. Кондратюк А. А. Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями. II.— «Лит. мат. сб.», 1968, т. 8, № 1, с. 65—85.
9. Гольдберг А. А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. III.— «Мат. сб.», 1964, т. 65, № 3, с. 414—453.

Поступила 26 мая 1975 г.