УДК 517.43

В. А. КАКИЧЕВ

ОБОБЩЕННЫЙ ОПЕРАТОР РИМАНА СО МНОГИМИ ПРОЕКТОРАМИ

§ 1. Определения. Введение

1⁰. Пусть: V — банахово пространство, представимое в виде прямой суммы

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_n = \bigoplus_{k=0}^{n} V_k \tag{1.1}$$

своих подпространств V_k и $U_k = V \ominus V_k$; $\Lambda(V)$ — алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в V, а $K(V)$ — ее двусторонний идеал, состоящий из компактных операторов; $I \in \Lambda(V)$ — единичный (тождественный) оператор, а P_j ($Q_j = I$ —

$-P_j) \in \Lambda(V)$ — проектор, проектирующий V на V_j (на U_j) параллельно $U_j(V_j)$ и, значит,

$$\sum_{j=0}^{n} P_j = I, \; P_i P_j = \delta_{ij} P_j, \; 0 \leqslant i, \; j \leqslant n. \tag{1.2}$$

Здесь $\delta_{ii} = 1$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Обратно, если задан набор операторов $P_j \in \Lambda(V)$, удовлетворяющих условиям (1.2), то пространство V представимо в виде прямой суммы (1.1), в которой $V_j = P_j V$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

2°. Обобщенным оператором Римана с $n+1$ проекторами назовем оператор

$$R = \sum_{j=0}^{n} A_j P_j B_j \in \Lambda(V), \tag{1.3}$$

где операторы A_j и $B_j \in \Lambda(V)$ и обратимы, а проекторы $P_j \in \Lambda(V)$ и удовлетворяют условиям (1.2).

В силу равенств (1.2) оператор R представим в виде произведения $R = R^+ R^-$, в котором

$$R^+ = \sum_{j=0}^{n} A_j P_j \text{ и } R^- = \sum_{j=0}^{n} P_j B_j. \tag{1.4}$$

Оператор $R^+(R^-)$ будем называть оператором Римана с внешними (внутренними) коэффициентами.

Если для каждого оператора $B_j(A_j)$, входящего в правую часть (1.3), найдется (ср. [1]) обратимый оператор $B_j' \in \Lambda(V)\,(A_j'' \in \Lambda(V))$ такой, что $K_j' = P_j B_j - B_j' P_j \in K(V)\,(K_j'' = A_j P_j - P_j A_j'' \in K(V))$, то $T_R' = \sum_{j=0}^{n} A_j K_j' \in K(V)\,(T_R'' = \sum_{j=0}^{n} K_j'' B_j \in K(V))$ и поэтому оператор R можно записать в виде суммы $R = S_R^+ + T_R'\,(R = S_R^- + T_R'')$, где

$$S_R^+ = \sum_{j=0}^{n} A_j B_j' P_j \in \Lambda(V)\,\Bigl(S_R^- = \sum_{j=0}^{n} P_j A_j'' B_j \in \Lambda(V)\Bigr). \tag{1.5}$$

Оператор $S_R^+(S_R^-)$, имеющий структуру оператора $R^+(R^-)$, часто называют характеристической (или сингулярной) частью с внешними (внутренними) коэффициентами обобщенного оператора R, а компактный оператор $T_R'(T_R'')$ — его регулярной частью.

Замечание 1. Оператор (1.3) является частным случаем оператора

$$\tilde{R} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{m_j} A_{jk} P_j B_{jk}, \; A_{jk}, \; B_{jk} \in \Lambda(V). \tag{1.6}$$

Если, как и выше, существуют операторы $B_{js}' \in \Lambda(V)\,(A_{js}'' \in \Lambda(V))$ такие, что операторы $K_{js}' = P_j B_{js} - B_{js}' P_j\,(K_{js}'' = A_{js} P_j - P_j A_{js}'')$ компактны и, кроме того, операторы $\widetilde{A}_j = \sum_{k=0}^{m_j} A_{jk}B'_{jk}$ $(\widetilde{B}_j = \sum_{k=0}^{m_j} A''_{jk}B_{jk})$ обратимы, то характеристическая часть оператора (1.6) имеет вид $S_{\widetilde{R}}^{+} = \sum_{j=0}^{n} \widetilde{A}_j P_j$ $(S_{\widetilde{R}}^{-} = \sum_{j=0}^{n} P_j \widetilde{B}_j)$.

3⁰. Полагая в (1.3) $n = 1$, $P_0 = P$, $P_1 = Q$, $A_0 = A$, $A_1 = C$, $B_0 = B$, $B_1 = D$, получим оператор

$$R = APB + CQD \in \Lambda(V) \tag{1.7}$$

с двумя проекторами P и Q, изученный в работе [2].

Как показано в [2], уравнение $R\varphi = h$, $h \in V$ равносильно двум уравнениям:

$$AP\psi + CQ\psi = h,\ \psi, h \in V \tag{1.8}$$

и

$$D^{-1}P\chi - B^{-1}Q\chi = g,\ \chi \in V, \tag{1.9}$$

где $g = D^{-1}Q\psi - B^{-1}P\psi \in V$.

При этом решение $\varphi \in V$ исходного уравнения может быть найдено, например, по такой формуле: $\varphi = B^{-1}P\psi + B^{-1}Q\chi$, где ψ и χ — решения соответственно уравнений (1.8) и (1.9).

Операторы, стоящие слева в (1.8) и (1.9), являются абстрактными аналогами оператора краевой задачи Римана [3], содержащего два проектора. По этой причине оператор (1.3) и назван обобщенным оператором Римана с $n+1$ проекторами.

Необходимость изучения обобщенных операторов Римана (1.3), наряду с операторами R^{+}, вытекает из того факта, что если алгебра $\Lambda(V)$ является C^*-алгеброй, то даже в простейшем случае, когда $P_j^* = DP_jD^{-1}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, где D и $D^{-1} \in \Lambda(V)$, оператор $(R^{+})^* = \sum_{j=0}^{n} DP_jD^{-1}A_j^* \in \Lambda(V)$, сопряженный к оператору R^{+}, имеет структуру оператора (1.3), отличную от структуры оператора R^{+}.

Во всех известных нам случаях решение уравнения $R^{-}\varphi = h$, $h \in V$ приводится к решению некоторого уравнения с оператором типа R^{+}.

Этот факт и послужил отправной точкой в работе [2] при сведении уравнения с оператором (1.7) к двум уравнениям (1.8) и (1.9). Если $n > 1$, то, как будет показано в § 2, разрешимое уравнение $R\varphi = h$, $h \in V$ с оператором (1.3) равносильно уравнению $R^{+}\psi = h$ с оператором (1.4) и некоторому уравнению с оператором Римана типа R^{+} с внешними операторными коэффициентами, действующими в пространстве $V^{(n)} = V \oplus \cdots \oplus V = \bigoplus_{k=1}^{n} V$.

В § 3 приведены примеры, дополняющие и обобщающие примеры из работы [2].

§ 2. Сведение уравнения $R\varphi = h$, $h \in V$ к системе уравнений с внешними коэффициентами

1^0. Применяя к обеим частям уравнения $R\varphi = h$ $h \in V$ оператор A_0^{-1}, а затем заменяя $B_0\varphi$, $A_0^{-1}A_k$, $B_kB_0^{-1}$ и $A_0^{-1}h$ соответственно на φ, A_k, B_k и h, получим каноническую форму этого уравнения:

$$R\varphi \equiv P_0\varphi + \sum_{k=1}^{n} A_kP_kB_k\varphi = h, \ \varphi, h \in V, \tag{2.1}$$

где A_k и B_k — обратимые операторы из $\Lambda(V)$, причем предполагаются выполненными условия

$$B_k \neq B_l, \ 1 \leqslant k, l \leqslant n. \tag{2.2}$$

Если уравнение (2.1), (2.2) разрешимо и φ — его решение, то найдутся единственным образом определяемые элементы u_0, $u_1, \ldots, u_n \in V$ такие, что

$$\varphi = \sum_{l=0}^{n} P_lu_l \tag{2.3}$$

и

$$B_k\varphi = P_ku_0 + Q_ku_k, \ k = 1, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Подставляя значения φ и $B_k\varphi$, описываемые равенствами (2.3) и (2.4), в уравнение (2.1) и учитывая, что $P_kQ_k = Q_kP_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$, получаем уравнение

$$R^+u_0 \equiv P_0u_0 + \sum_{k=1}^{n} A_kP_ku_0 = h, \tag{2.5}$$

которому удовлетворяет элемент u_0.

Исключая затем φ из соотношений (2.3) и (2.4), получим систему уравнений относительно $u_1, \ldots, u_n$:

$$\Big(-B_kP_k + \sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} P_j\Big) u_k - B_k \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} P_ju_j = h_k, \ k = 1, \ldots, n, \tag{2.6}$$

где

$$h_k = h_k(u_0) \equiv (B_kP_0 - P_k)\, u_0, \ k = 1, \ldots, n. \tag{2.7}$$

Система (2.6), (2.7) в векторно-матричной форме может быть записана так:

$$\hat{R}^+U \equiv \sum_{l=0}^{n} \hat{B}_lP_lU = H, \tag{2.8}$$

где $U = (u_1, \ldots, u_n)' \in V^{(n)}$, $H = (h_1, \ldots, h_n)' \in V^{(n)}$,

$$\hat{B}_0 = \begin{pmatrix} I, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & I, & \ldots, & 0 \\ . & . & . & . \\ 0, & 0, & \ldots, & I \end{pmatrix}; \quad \hat{B}_j = \begin{pmatrix} I, & \ldots, & 0, & -B_1, & 0, & \ldots, & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0, & \ldots, & I, & -B_{j-1}, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \ldots, & 0, & -B_j, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \ldots, & 0, & -B_{j+1}, & I, & \ldots, & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0, & \ldots, & 0, & -B_n, & 0, & \ldots, & I \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

причем операторы $-B_1, \ldots, -B_n$ в матрице $\hat{B}_j$ заполняют j-ю колонну.

Обратимость матрицы $\hat{B}_0$ очевидна, а матрица $\hat{B}_j^{-1}$, обратная к матрице $\hat{B}_j$, имеет вид

$$\hat{B}_j^{-1} = \begin{pmatrix} I, & \ldots, & 0, & -B_1 B_j^{-1}, & 0, & \ldots, & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0, & \ldots, & I, & -B_{j-1} B_j^{-1}, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \ldots, & 0, & -B_j^{-1}, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \ldots, & 0, & -B_{j+1} B_j^{-1}, & I, & \ldots, & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0, & \ldots, & 0, & -B_n B_j^{-1}, & 0, & \ldots, & I \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

в чем нетрудно убедиться непосредственно.

Итак, если уравнение (2.1), (2.2) разрешимо, то разрешимы уравнение (2.5) и система (2.6), (2.7). Обратно, если u_0 и $U = (u_1, \ldots, u_n)'$ — решения уравнения (2.5) и системы (2.6), (2.7) соответственно, то определяя φ с помощью равенства (2.3) и используя (2.5) — (2.7), убедимся в справедливости равенств (2.4), а тем самым и в разрешимости уравнения (2.1), (2.2), решение которого определяет формула (2.3).

Нами доказана основная в статье

Теорема. *Уравнение (2.1), (2.2) равносильно уравнению (2.5) и системе уравнений (2.8), (2.9), (2.7) с внешними обратимыми коэффициентами.*

Общее решение уравнения (2.1), (2.2) определяется по формуле (2.3), где $u_0 \in V$ — общее решение уравнения (2.5), а $U = (u_1, \ldots, u_n)' \in V^{(n)}$ — соответствующее ему общее решение системы (2.6), (2.7).

Если все $A_k = I$, то из (2.5) следует, что $u_0 = h$. Отсюда и из теоремы вытекает

Следствие 1. *Уравнение $R^- \varphi = h$ равносильно уравнению $\hat{R}^+ U = H$, где $h_k = (B_k P_0 - P_k) h$, $k = 1, \ldots, n$, а их решения связаны соотношением $\varphi = R_0 h + P_1 u_1 + \cdots + P_n u_n$.*

Так как $R = R^+ R^-$, то из следствия 1 и теоремы Юда [4] получаем

Следствие 2. *Если оператор R является Φ_+ (Φ_-)-оператором, то оператор $\hat{R}^+$ (R^+) также Φ_+ (Φ_-)-оператор. В частности, если оператор R нетеров, то $\hat{R}^+$ есть Φ_+-оператор, а R^+ есть Φ_--оператор.*

Если любые два из трех операторов R, R^+ и $\hat{R}^+$ нетеровы, то и третий нетеров, причем $\operatorname{Ind} R = \operatorname{Ind} R^+ + \operatorname{Ind} \hat{R}^+$.

2°. Сделаем несколько полезных замечаний.

Замечание 2. Сохраняя представление φ по формуле (2.3) вместо (2.4), можно взять, например, такие разложения:

$$B_k\varphi = \sum_{j=0}^{k-1} P_j u_{n+j+1-k} + P_k u_0 + \sum_{j=k+1}^{n} P_j u_{j-k} =$$

$$= P_k u_0 + \sum_{l=1}^{n-k} P_{k+l} u_l + \sum_{l=n+1-k}^{n} P_{l+k-n-1} u_l, \quad k = 1, \ldots, n. \qquad (2.4)$$

В этом случае снова получим систему (2.8), (2.7), в которой матрицы $\hat{B}_j$ получаются из матриц (2.9 заменой подматриц $\begin{pmatrix} I, & \ldots, & 0 \\ . & . & . \\ 0, & \ldots, & I \end{pmatrix}$ на подматрицы $\begin{pmatrix} 0, & \ldots, & I \\ . & . & . \\ I, & \ldots, & 0 \end{pmatrix}$.

Замечание 3. Пусть теперь условие (2.2) не выполняется и для простоты

$$B_k \neq B_l, \ 1 \leqslant k, l \leqslant r \ \text{ и } \ B_{r+1} = \cdots = B_n = I. \qquad (2.2)$$

Тогда, используя вместо замены (2.3) и (2.4) такую

$$\varphi = \sum_{l=0}^{r} P_l u_l + \sum_{l=r+1}^{n} P_l u_0, \ B_k\varphi = P_k u_0 + Q_k u_k, \ k = 1, \ldots r, \qquad (2.11)$$

снова придем к уравнению (2.5) и системе вида (2.8), порядок которой в этом случае будет равен r.

Аналогичным образом надо рассуждать и тогда, когда некоторые из операторов A_i или B_i являются нулевыми и, значит, оператор (1.3) вырожден. Пусть, для определенности, $B_{r+1} = \cdots = B_n = 0$, тогда замена (2.11) дает уравнение $P_0 u_0 + \sum_{k=1}^{r} A_k P_k u_0 = h$ и систему вида (2.8) порядка r.

Замечание 4. Допустим, что надо найти элемент $\varphi \in V$, удовлетворяющий конечной системе вырожденных уравнений, например, следующего вида:

$$P_0\varphi + \sum_{k=1}^{r} A_k P_k B_k \varphi = h \ \text{ и } \ \sum_{k=r+1}^{n} A_k P_k B_k \varphi = g, \qquad (2.12)$$

где $1 < r < n$, h и $g \in V$ и выполняется условие (2.2). Тогда замена (2.3), (2.4) приводит систему (2.12) к системе

$$P_0 u_0 + \sum_{k=1}^{r} A_k P_k u_0 = h, \ \sum_{k=r+1}^{n} A_k P_k u_0 = g, \qquad (2.5)$$

появляющейся вместо уравнения (2.5), и к той же системе (2.6), (2.7).

Если нарушено условие (2.2), то надо воспользоваться замечанием 3.

Замечание 5. Пусть пространство V является некоммутативным кольцом с единицей e, а оператор R определен равенством

$$R\varphi = \sum_{j=0}^{n} a_j \left[P_j (b_j \varphi c_j)\right] d_j, \quad \varphi \in V. \tag{2.13}$$

Здесь a_j, b_j, c_j и d_j — обратимые элементы кольца V. Тогда замена $b_0\varphi c_0 = \sum_{l=0}^{n} P_l u_l$, $b_k \varphi c_k = P_k u_0 + Q_k u_k$, $k = 1, \ldots, n$ приводит уравнение $R\varphi = h$, $h \in V$ к более простому уравнению

$$R_0 u_0 \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j (P_j u_0) d_j = h, \; u_0, \; h \in V \tag{2.14}$$

относительно u_0 и к системе уравнений

$$b_0 b_k^{-1} \Big(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} P_j u_k\Big) - \Big(\sum_{j=1}^{n} P_j u_j\Big) c_0^{-1} c_k = h_k, \; k = 1, \ldots, n, \tag{2.15}$$

где

$$h_k = (P_0 u_0) c_0^{-1} c_k - b_0 b_k^{-1} (P_k u_0), \; k = 1, \ldots, n, \tag{2.16}$$

относительно $u_1, \ldots, u_n \in V$. Системе (2.15), (2.16) можно придать векторно-матричную форму вида (2.14), если $c_j = e$, или $b_j = e$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Система (2.15) — (2.16) существенно упрощается, если, кроме изученного выше случая $c_j = d_j = e$, $j = 0, 1, \ldots, n$, выполняется одно из условий: 1) $c_j = a_j = e$, 2) $a_j = b_j = e$, 3) $b_j = d_j = e$, где $j = 0, 1, \ldots, n$.

§ 3. Примеры

Пример 1. Начнем со следующего замечания. Пусть $n = 1$, тогда оператор $J = P_0 - P_1$ является инволютивным оператором второго порядка: $J^2 = I$. Наоборот, каждому оператору J с условием $J^2 = I$ однозначно соответствуют проекторы $P_0 = (I + J)/2$ и $P_1 = (I - J)/2$. Так как конечная коммутативная группа является прямой суммой своих циклических подгрупп, то только что отмеченный факт допускает такое обобщение: каждой конечной коммутативной группе $G \subset \Lambda(V)$ операторов однозначно соответствует система проекторов, удовлетворяющих условиям (1.2) и являющихся линейными комбинациями элементов группы G.

Используя теорию представлений групп [5] и следуя работе [6], мы опишем здесь одну общую схему построения проекторов, удовлетворяющих условиям (1.2) и порожденных конечной группой операторов алгебры $\Lambda(V)$.

Пусть G — некоторая конечная группа порядка N и каждому элементу $g \in G$ однозначно соответствует оператор «сдвига» $\tau_g \in \Lambda(V)$: $\tau_e = I$ и $\tau_h \tau_g = \tau_{gh} \; \forall \, h, \; g \in G$, где e — единица группы G. Группа G обладает конечным числом неэквивалентных представлений D^j размерности δ_j, $j = 0, 1, \ldots, n$. Пусть $D^j(g) = (d^i_{kl}(g))_{1 \leqslant k, \; l \leqslant \delta_j}$ и $\chi_j(g) = \sum\limits_{k=1}^{\delta_j} d^i_{kk}(g)$, $g \in G$ соответственно комплекснозначная матрица и характер представления D^j, тогда имеют место равенства [5]:

$$\sum_{j=0}^{n} \delta_j \chi_j(g) = \begin{cases} N & \text{при } g = e, \\ 0 & \text{при } g \neq e \end{cases} \tag{3.1}$$

и

$$\sum_{g \in G} \chi_i(g) \, \chi_j(fg^{-1}) = \frac{N}{\delta_j} \chi_j(f) \, \delta_{ij}, \quad f \in G. \tag{3.2}$$

В силу равенств (3.1) и (3.2) операторы

$$P_j = \frac{\delta_j}{N} \sum_{g \in G} \overline{\chi_j(g)} \, \tau_g, \; j = 0, 1, \ldots, n, \tag{3.3}$$

порожденные конечной группой сдвигов $\{\tau_g : g \in G\} \subset \Lambda(V)$, удовлетворяют условиям (1.2). В частности, если группа G коммутативна, то $\delta_i = 1$, $n + 1 = N$, формула (3.3) принимает вид

$$P_h = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \overline{\chi_h(g)} \, \tau_g, \; h \in G \tag{3.4}$$

и допускает обращение

$$\tau_g = \sum_{h \in G} \chi_g(h) \, P_h, \; g \in G. \tag{3.5}$$

Формулы (3.4) и (3.5) обобщают соответствующие формулы из работы [7].

Используя теорему из § 2, убедимся, что исследование оператора (1.3), (3.3) приводится к исследованию двух операторов вида

$$L = \sum_{g \in G} L_g \tau_g \;\text{ и }\; \hat{M} = \sum_{g \in G} \hat{M}_g \tau_g, \tag{3.6}$$

где $L_g = \frac{1}{N} \sum\limits_{j=0}^{n} \delta_j \overline{\chi_j(g)} \, A_j$ и $\hat{M}_g = \frac{1}{N} \sum\limits_{j=0}^{n} \delta_j \overline{\chi_j(g)} \, \hat{B}_j$.

Нетеровы операторы (3.6) с псевдодифференциальными коэффициентами L_g и $\hat{M}_g$ изучены в работе [6]. Таким образом, если коэффициенты A_j и B_j оператора (1.3), (3.3) являются псевдодифференциальными операторами и операторы B_j обратимы, то нетеровость операторов (3.6) влечет за собою нетеровость операторов (1.3), (3.3) и $\operatorname{Ind} R = \operatorname{Ind} L + \operatorname{Ind} \tilde{M}$.

Отметим еще одну деталь. Если группа G коммутативна, то в силу формул (3.4), (3.5) имеют место равенства:

$$R^{+} = \sum_{h \in G} A_h P_h = \sum_{g \in G} C_g \tau_g \text{ и } R^{-} = \sum_{h \in G} P_h A_h = \sum_{g \in G} \tau_g C_g, \tag{3.7}$$

в которых

$$C_g = \frac{1}{N} \sum_{h \in G} \overline{\chi_h(g)} \, A_h, \; A_h = \sum_{g \in G} \chi_g(h) \, C_g \in \Lambda(V). \tag{3.8}$$

Пример 2. Через $L_p^n(M)\,(L_p^{n\times n}(M))$ обозначим множество n-мерных вектор-столбцов (матриц типа $n \times n$), элементами которых являются функции, суммируемые с конечной степенью $p \geqslant 1$ на множестве M, а через $\overset{0}{H}{}_{\lambda}^{n\times n}(M)$ — множество невырожденных матриц с элементами, удовлетворяющими на M условию Гельдера с показателем $0 < \lambda \leqslant 1$.

Здесь мы рассмотрим пример оператора Римана, порожденного двумя коммутирующими инволютивными операторами второго порядка — интегралами типа Коши $(S_C\varphi)(t, \omega) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(\tau, \omega)\, d\tau}{\tau - t}$ и $(S_\Gamma\varphi)(t, \omega) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(t, \xi)\, d\xi}{\xi - \omega}$, где $C(\Gamma)$ — замкнутый контур Ляпунова, ограничивающий плоскую область $D^{+}(\Delta^{+})$, содержащую начало координат, и $\varphi(t, \omega) \in L_p^n(C \times \Gamma)$, $1 < p < +\infty$. Положим $2P_C^{\pm} = I \pm S_C$; $2P_\Gamma^{\pm} = I \pm S_\Gamma$; $P^{\pm\pm} = P_C^{\pm} P_\Gamma^{\pm}$; $P^{\pm\mp} = P_C^{\pm} P_\Gamma^{\mp}$ и заметим, что $(P^{\pm\pm})^* = \theta P^{\mp\mp}\theta$; $(P^{\pm\mp})^* = \theta P^{\mp\pm}\theta$, где оператор θ имеет вид $(\theta\varphi)(t, \omega) = \overline{\varphi(t, \omega)} e^{-i(\theta_C(t) + \theta_\Gamma(\omega))}$, а $\theta_C(t)\,(\theta_\Gamma(\omega))$ есть угол, образованный касательной к контуру $C(\Gamma)$ в точке $t \in C\,(\omega \in \Gamma)$ и осью абсцисс [2].

Оператор (1.3) в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} R\varphi &= \alpha P^{++}(a\varphi) + \beta P^{-+}(b\varphi) + \gamma P^{+-}(c\varphi) + \delta P^{--}(d\varphi) = \\ &= r_0\varphi + S_C(r_1\varphi) + S_\Gamma(r_2\varphi) + S(r_{12}\varphi), \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $S = S_C S_\Gamma = S_\Gamma S_C$, α, a, β, b, γ, c, δ, $d \in \overset{0}{H}{}_{\lambda}^{n\times n}(C \times \Gamma)$; $4r_0(t, \omega) = \alpha(t, \omega)\, a(t, \omega) + \beta(t, \omega)\, b(t, \omega) + \gamma(t, \omega)\, c(t, \omega) + \delta(t, \omega) \times d(t, \omega)$; $4r_1(t, \tau;\ \omega) = \alpha(t, \omega)\, a(\tau, \omega) - \beta(t, \omega)\, b(\tau, \omega) + \gamma(t, \omega) \times c(\tau, \omega) - \delta(t, \omega)\, d(\tau, \omega)$; $4r_2(t;\ \omega, \xi) = \alpha(t, \omega)\, a(t, \xi) + \beta(t, \omega) \times b(t, \xi) - \gamma(t, \omega)\, c(t, \xi) - \delta(t, \omega)\, d(t, \xi)$; $4r_{12}(t, \tau;\ \omega, \xi) = \alpha(t, \omega) \times a(\tau, \xi) - \beta(t, \omega)\, b(\tau, \xi) - \gamma(t, \omega)\, c(\tau, \xi) + \delta(t, \omega)\, d(\tau, \xi)$.

Оператор (3.9) является частным случаем полного бисингулярного оператора [8]. В частности, оператору R^{+} соответствует задача Римана о нахождении четырех вектор-функций $\Phi^{\pm\pm}(z, w)$, голоморфных соответственно в биообластях $D^{\pm} \times \Delta^{\pm}$, где $D^{-}(\Delta^{-})$ дополняет $\overline{D^{+}}\,(\overline{\Delta^{+}})$ до расширенной плоскости переменного $z\,(w)$, по линейному соотношению [8, 9]:

$$\alpha(t, \omega)\Phi^{++}(t, \omega) - \beta(t, \omega)\Phi^{-+}(t, \omega) - \gamma(t, \omega)\Phi^{+-}(t, \omega) + \\ + \delta(t, \omega)\Phi^{--}(t, \omega) = f(t, \omega), \ (t, \omega) \in C \times \Gamma, \tag{3.10}$$

где $f \in L_p^n(C \times \Gamma)$, $\Phi^{\pm\pm} = (P^{\pm\pm}\varphi)(t, \omega)$, $\Phi^{\pm\mp} = -(P^{\pm\mp}\varphi)(t, \omega)$ и искомые вектор-функции удовлетворяют дополнительным условиям:

$$\Phi^{\pm=}(z, \infty) = 0 \ \forall z \in D^{\pm} \text{ и } \Phi^{=\pm}(\infty, w) = 0 \ \forall w \in \Delta^{\pm}. \tag{3.11}$$

Напомним, что решение задачи Римана (3.10), (3.11) получено в замкнутом виде для большого количества частных скалярных случаев [9—11]. Исследование на нетеровость бисингулярных операторов проведено в работах [8, 12—14].

Пусть теперь

$$(\tau_u\varphi)(t, u) = \varphi(u(t), \omega); \ (\sigma_v\varphi)(t, \omega) = \varphi(t, v(\omega)), \tag{3.12}$$

где $u(t)$ и $v(t)$ диффеоморфизмы соответственно контуров C и Γ такие, что

$$u(u(t)) \equiv t, \ u'(t) \neq 0 \ \forall t \in C \text{ и } u'(t) \in H_\lambda(C) \tag{3.13}$$

и $v(v(\omega)) \equiv \omega$, $v'(\omega) \neq 0$ $\forall \omega \in \Gamma$ и $v'(\omega) \in H_\lambda(\Gamma)$.

Образуем с помощью операторов сдвига τ_u и σ_v множество линейных операторов вида

$$A = A_0(t, \omega) I + A_1(t, \omega)\tau_u + A_2(t, \omega)\sigma_v + A_{12}(t, \omega)\tau_u\sigma_v, \tag{3.14}$$

где $\tau_u\sigma_v = \sigma_v\tau_u$ и $A_0, A_1, A_2, A_{12} \in H_\lambda^{n\times n}(C \times \Gamma)$, и укажем простое условие обратимости таких операторов.

Применяя к (3.14) последовательно операторы τ_u, σ_v, $\tau_u\sigma_v$ и рассматривая совместно операторы A, $\tau_u A$, $\sigma_v A$ и $\tau_u\sigma_v A$ как матричный оператор, применяемый к вектор-функции $(\varphi, \tau_u\varphi, \sigma_v\varphi, \tau_u\sigma_q\varphi)$, легко убедимся, что оператор A обратим, если отличен от нуля на $C \times \Gamma$ определитель блок-матрицы

$$\begin{pmatrix} A_0, & A_1, & A_2, & A_{12} \\ \tau_u A_1, & \tau_u A_0, & \tau_u A_{12}, & \tau_u A_2 \\ \sigma_v A_2, & \sigma_v A_{12}, & \sigma_v A_0, & \sigma_v A_1 \\ \tau_u\sigma_v A_{12}, & \tau_u\sigma_v A_2, & \tau_u\sigma_v A_1, & \tau_u\sigma_v A_0 \end{pmatrix}.$$

Заметим еще, что оператор, обратный оператору A, а также произведение любых двух операторов вида (3.14), имеют структуру оператора A. Поэтому операторы (3.14), (3.12), (3.13) образуют алгебру.

Предположим, что операторы α, a, β, b, γ, c и δ, d оператора (3.9) имеют структуру оператора (3.14) и обратимы. Получим обобщенный оператор Римана с матричными коэффициентами, содержащими операторы сдвига τ_u и σ_v. Такой оператор в скалярном случае при $a=b=c=d=1$ исследовался на нетеровость в работе [15].

Пример 3. Пусть конечное число замкнутых конических множеств $\Gamma_j \in E_m$, $j=0, 1, \ldots, n$, не пересекающихся во внутренних точках, исчерпывает евклидово пространство E_m, причем проекция их объединенной границы на единичную сферу состоит из гладких замкнутых поверхностей. Тогда система операторов

$$(P_j f)(x) = \eta_j(x) f(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Gamma_j, \\ 0, & x \,\overline{\in}\, \Gamma_j, \end{cases} \tag{3.15}$$
$$j = 0, 1, \ldots, n,$$

где $f(x) \in L_p(E_m)$, $1 \leqslant p < +\infty$, удовлетворяет условиям (1.2).

В частности, если $\Gamma_0 = \Gamma = \{x : x_m > 0\}$ и $\Gamma_1 = E_m \diagdown \overline{\Gamma}$, то система проекторов (3.15) принимает вид $Q = I - P$ и

$$\text{и} \begin{matrix} (Pf)(x) = f(x) & \text{при } x_m > 0 \\ (Pf)(x) = 0 & \text{при } x_m < 0. \end{matrix} \tag{3.16}$$

Проекторам P и Q соответствует группа $\{I, J_m\}$, где $(J_m f)(x) = f(x) \operatorname{sgn} x_m$, а $\operatorname{sgn} x_m = \pm 1$ при $x_m \gtrless 0$.

Далее, при $m = 2$ положим

$$(P^{\pm\pm} f)(x_1, x_2) = \begin{cases} f(x_1, x_2), & \{x_1 \gtrless 0\} \cap \{x_2 \gtrless 0\}, \\ 0, & \{x_1 \gtrless 0\} \cup \{x_2 \gtrless 0\}. \end{cases} \tag{3.17}$$

В этом случае четырем проекторам $P^{\pm\pm}$ соответствует коммутативная группа операторов $\{I, J_1, J_2, J_1 J_2\}$ такая, что $4P^{\pm\pm} = (I \pm J_1)(I \pm J_2)$.

Если $m > 2$, то нетрудно построить систему проекторов вида (3.17), порожденную конечной группой $\{J_1^{k_1} \ldots J_m^{k_m} : k_j = 0, 1, j = 1, \ldots, m\}$.

Пусть для простоты (ср. [16])

$$(A_j f)(x) = f(x) - \int_{E_m} a_j(x-t) f(t)\, dt, \quad a_j(x) \in L_1^{n\times n}(E_m) \tag{3.18}$$

и операторы B_j определяются аналогично с помощью матриц $b_j(x) \in L_1^{n\times n}(E_m)$. Оператор A_j обратим, если матрица $e - \hat{a}_j(t)$ не выроздена на $\dot{E}_m$, где $\hat{a}_j(t)$ — преобразование Фурье матрицы $a_j(x)$, а $\dot{E}_m$ — компактификация E_m с помощью одной бесконечно удаленной точки, гомеоморфная m-мерной сфере.

Оператор (1.3), (3.15), (3.18) имеет вид

$$(Rf)(x) = f(x) - \int_{E_m} r(x, t) f(t)\, dt, \tag{3.19}$$

где

$$r(x, t) = \sum_{j=0}^{n} \{\eta_j(x) b_j^*(x-t) - \eta_j(t) a_j(x-t) + \\ + \int_{E_m} a_j(x-\tau) b_j(\tau-t) \eta_j(\tau) d\tau\}. \quad (3.20)$$

Оператор (3.19), (3.20), обобщающий оператор вида (1.4), (3.15), (3.18), изученный в работе [16], естественно называть обобщенной составной сверткой.

Напомним, что проекторы P и Q, где P определен в (3.16), при $m=1$ тесно связаны с краевой задачей Римана с краевым условием на действительной прямой E_1 (см. [2, 3]). Аналогичным образом можно изучать операторы (1.3) при $n=3$, связанные с двумерной задачей Римана (3.10). В этом случае плоскость E_2 пополним с помощью букета двух окружностей так, чтобы полученное замыкание $\hat{E_2}$ плоскоcти E_2 было гомеоморфно тору T^2, проекторы определим равенством (3.17), а вместо операторов (3.18) рассмотрим такие:

$$(Af)(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - \int_{-\infty}^{+\infty} a_1(x_1-t_1) f(t_1, x_2) dt_1 - \\ - \int_{-\infty}^{+\infty} a_2(x_2-t_2) f(x_1, t_2) dt_2 + \iint_{E_2} a_{12}(x_1-t_1, x_2 - \\ - t_2) f(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \quad (3.21)$$

Здесь матрицы $a_1, a_2 \in L_1^{n\times n}(E_1)$, $a_{12} \in L_1^{n\times n}(E_2)$ и не вырождена на $\hat{E}_2$ непрерывная матрица $e - \hat{a}_1 - \hat{a}_2 + \hat{a}_{12}$, где $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ и $\hat{a}_{12}$ — преобразования Фурье соответственно матриц $a_1(x_1)$, $a_2(x_2)$ и $a_{12}(x_1, x_2)$. Мы не приводим окончательный вид оператора (1.3), (3.17), (3.21) ввиду его громоздкости.

Нетрудно было бы привести примеры двумерных и многомерных обобщенных дискретных сверток вида (1.3).

Пример 4. Решение уравнений вида (1.8) основано, вообще говоря, на двух фактах: разложении любого элемента $\varphi \in V$ в сумму $P\varphi + Q\varphi$ и канонической факторизации $B_Q B_P$ оператора $C^{-1}A$, в которой обратимые операторы B_Q и B_P принадлежат соответственно алгебре $\Lambda(QV)$ и $\Lambda(PV)$. Этого мало при изучении уравнений $R^+\varphi = h$, $h \in V$ при $n > 1$ (см. [9—16]). Приведем простейший пример такого уравнения, разрешимого методом проектирования [9] и методом последовательных приближений. В [17] рассмотрено конкретное уравнение, являющееся частным случаем такого:

$$(I - A) P_k\varphi + Q_k\varphi = h, \quad \varphi, h \in V. \quad (3.22)$$

Применяя к обеим частям уравнений (3.22) проектор P_k, получим уравнение $\psi - P_k(A\psi) = g$, $\psi = P_k\varphi$, $g = P_k h$, к которому при выполнении условия $\|A\| < 1$ применим метод последовательных приближений и, значит, $\psi = P_k\varphi = g + P_k(Ag) + P_k(AP_k(Ag)) + \ldots$, а $\varphi = P_k\varphi + Q_k\varphi = h + A\psi$. Аналогичным образом решается уравнение $P_k\varphi + (I - A)Q_k\varphi = h$, $\|A\| \leqslant \max\limits_k [1 + 2\|P_k\|]^{-1}$.

Замечание 6. После представления этой работы в печать Н. К. Карапетянц и Л. И. Сазонов обратили внимание автора на статью [18], из теоремы 1.1 которой вытекает другой метод «растяжения» оператора (1.3) в оператор вида (2.8) с матричными операторными коэффициентами порядка $n+2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карапетянц Н. К. и С. Г. Самко. Сингулярные интегральные уравнения со сдвигом Карлемана в случае разрывных коэффициентов и исследование нетеровости одного класса линейных операторов с инволюцией.— ДАН СССР, 1973, т. 211, № 2, с. 281—284.
2. Какичев В. А. Несколько замечаний и дополнений к теории сингулярных интегральных операторов.— Сб. трудов «Математический анализ и теория функций», М., 1973, вып. 2, с. 159—172.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963, с. 111—127.
4. Yood B. Properties of linear transformations preserved under addition of a completely continuons transformation.— „Duke Math. Jonrnal", 1951, vol. 18, № 3, p. 599—612.
5. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М., «Наука», 1968, с. 209—213.
6. Антоневич А. Б. Эллиптические псевдодифференциальные операторы с конечной группой сдвигов.— «Изв. АН СССР, сер. мат.», 1973, т. 37, с. 633—675.
7. Przeworska-Rolewicz D. On equations with rotations.— „Studia Mathem"., 1970, vol. XXXV, p. 51—68.
8. Какичев В. А. О регуляризации сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши для бицилиндрических областей.— «Изв. вузов, сер. мат.», 1967, № 7 (62), с. 54—64.
9. Какичев В. А. Методы решения краевых задач линейного сопряжения для функций, голоморфных в бицилиндрических областях.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 14. Харьков, 1971, с. 3—15.
10. Малышев В. А. Уравнения Винера-Хопфа в четверть-плоскости, дискретные группы и автоморфные функции.— «Мат. сб.», 1971, т. 84 (126), № 4, с. 499—525.
11. Сазонов Л. И. О решении задач линейного сопряжения аналитических функций двух комплексных переменных.— ДАН СССР, 1973, т. 209, № 6, с. 1288—1291.
12. Симоненко И. Б. К вопросу о разрешимости бисингулярных и полисингулярных уравнений.— «Функциональный анализ и его приложения», 1971, т. 5, вып. 1, с. 93—94.
13. Пилиди В. С. О бисингулярном уравнении в пространстве L_p.— «Мат. исследов.», Кишинев, 1972, т. VII, вып. 3, с. 167—175.
14. Rodino Z. Sistemi di eguazioni integrali bisingolari.— „Rend. Sem. Math. Università Politecnico Torino", 1973—74, vol. 32, p. 391—403.
15. Сазонов Л. И. Бисингулярное уравнение со сдвигом в пространстве L_p.— «Мат. заметки», 1973, т. 13, № 3, с. 385—393.
16. Симоненко И. Б. Операторы типа свертки в конусах.— «Мат. сб.», 1967, т. 74 (116), № 2, с. 298—313.

17. K r a u t E. A. On equations of the Wiener — Hopf type in several complex variables.— „Proc. Amer Math. Soc.", 1969, vol. 23, № 1, p. 24—26.
18. Г о х б е р г И. Ц., К р у п н и к И. Я. О сложных линейных сингулярных интегральных операторах.— «Мат. исследов.», г. Кишинев, 1969, т. 4, вып. 4, с. 20—32.

Поступила 22 июня 1974 г.