УДК 513.88

С. М. ГУТМАН

О ГОМЕОМОРФИЗМАХ НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫХ *B*-ПРОСТРАНСТВ. ЧАСТЬ I

Введение

Настоящая работа связана с проблемой гомеоморфной классификации банаховых пространств. Полный обзор полученных ранее результатов содержится в книге Бессаги и Пельчинского [8]. Мы будем в основном придерживаться ее обозначений. Доказательство, приведенное в работе, развивает метод, использованный М. И. Кадецом в [1].

1. Основные результаты статьи

Теорема 1. *Пусть X и Y — B-пространства с базисами одинакового типа. Тогда X гомеоморфно Y.*

Напомним, что проекционный базис $\{S_\tau\}_{\tau<\xi}$ называется базисом типа ξ, если $\dim(S_{\tau+1})-S_\tau)X=1$ $\forall\tau<\xi$. В этом случае ему соответствует базис Шаудера $\{e_\tau\}_{\tau<\xi}$.

Вес пространства X (обозначается wX) — минимальная мощность всюду плотного (в сильной топологии) подмножества в X. То же в топологии $\sigma(X, X^*)$ будем обозначать $w(X, X^*)$ и т. п. Всюду далее $W(X)$ — единичный шар и $U(X)$ — единичная сфера пространства X.

Получим некоторые следствия из теоремы 1, используя следующий результат Бессаги и Пельчинского [5].

Предложение 1. *Пусть X — B-пространство, содержащее такое подпространство Y, что $wX=wY$, $Y\cong l_1(\Gamma)$. Тогда $X\cong l_1(\Gamma)$.*
Непосредственно из этого предложения и теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть B-пространство X содержит подпространство с базисом Y, причем $wX=wY$. Тогда $X\cong l_1(\Gamma)$, для соответствующего множества* Γ.

Лемма 1. *Пусть X — нормированное пространство, причем $wX=w(X^*, X)$. Тогда существует Y — подпространство в X, $wX=wY$, содержащее базис (типа ξ).*

Доказательство: Согласно [3], достаточно построить систему векторов $\{e_\alpha\}_{\alpha<\xi}$ в $X\setminus\{0\}$ такую, что (1) $\forall\alpha<\xi$ $\forall x\in \operatorname{sp}\{e_\tau\}_{\tau<\alpha}$ выполняется $\|x+e_\alpha\|\geqslant\|x\|$.

Воспользуемся трансфинитной индукцией. Пусть $e_1\in X\setminus\{0\}$, и предположим, что векторы $\{e_\tau\}_{\tau<\alpha}$ удовлетворяют условию (1) при $\operatorname{card}\alpha<wX$. Обозначим A_α — множество всех рациональных комбинаций векторов $\{e_\tau\}_{\tau<\alpha}$. Сопоставим каждому $x\in A_\alpha$ опорный в x функционал f_x (вообще говоря не однозначно). Обозначим полученное множество B_α. Поскольку $\operatorname{card}B_\alpha<wX$, то замыкание

B_α в топологии $\sigma(X^*, X)$ не совпадает с X^* и, следовательно, $B_\alpha^\perp \setminus \{0\} \neq \emptyset$.

Пусть $e_\alpha \in B_\alpha^\perp \setminus \{0\}$, $u \in A_\alpha$, тогда, $\| u + e_\alpha \| \geqslant f_u(u + e_\alpha) = f(u) = \| u \|$.

Поскольку A_α плотно в $\overline{\mathrm{sp}}\{e_\tau\}_{\tau<\alpha}$, то векторы $\{e_\tau\}_{\tau \leqslant \alpha}$ удовлетворяют условию (1).

Теорема 2. *Пусть X — B-пространство, причем $wX = w(X^*, X)$. Тогда X гомеоморфно $l_1(\Gamma)$, для соответствующего* Γ.

Доказательство. В силу леммы 1 существует подпространство Y, $Y \subset X$, содержащее базис. Утверждение теоремы следует из следствия 1.

Лемма 2. *Пусть X — WCG пространство. Тогда $wX = w(X^*, X)$.*

Доказательство. Поскольку для любого нормированного пространства X $wX \geqslant w(X^*, X)$, достаточно установить обратное неравенство.

Предположим, что $wX > w(X^*, X)$. Пусть B — соответствующее всюду плотное подмножество в X^*, $\mathrm{card}\, B < wX$. В [7] показано, что в случае WCG пространства, существует $\sigma(X^*, X)$-замкнутое пространство в X^*, не совпадающее с X^* и содержащее B, что противоречит фундаментальности B.

Следствие 2. *Если X, Y — WCG-пространства, $wX = wY$, то X гомеоморфно Y.*

2. Эквивалентные нормы в пространствах с базисом

Определение. *B-пространство называется локально равномерно выпуклым (имеет локально равномерно выпуклую норму), если из того, что $\{x_n\}_1^\infty \in X$; $x_0 \in X$; $\| x_n \| \underset{n}{\to} \| x_0 \|$; $\| x_n + x_0 \| \underset{n}{\to} 2 \| x_0 \|$, следует что $\| x_n - x_0 \| \underset{n}{\to} 0$.*

Лемма 3. *Пусть X — B-пространство с базисом $\{e_\tau\}_{\tau<\xi}$ типа ξ, тогда $Tx = \{f_\tau(x)\}_{\tau<\xi}$, является ограниченным линейным взаимно-однозначным отображением из X в $c_0(\Gamma)$.*

Доказательство. Не уменьшая общности, будем считать базис монотонным.

Пусть $\varepsilon > 0$ и возрастающая последовательность индексов $\{\alpha_i\}_1^\infty$ $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, такая что $| f_{\alpha_i}(x) | = \| (S_{\alpha_{i+1}} - S_{\alpha_i}) x \| > \varepsilon$. Ряд $\sum_1^\infty (S_{\alpha_{i+1}} - S_{\alpha_i}) x$ сходится, однако $\| (S_{\alpha_{i+1}} - S_{\alpha_i}) x \| \geqslant \| (S_{\alpha_{i+1}} - S_{\alpha_i}) x \| > \varepsilon$; следовательно, наше допущение неверно и $T: X \to c_0(\Gamma)$. Инъективность отображения T следует из однозначности разложения элементов по базису.

Лемма 4. *Пусть X — B-пространство с монотонным базисом $\{S_\alpha\}_{\alpha \leqslant \xi}$ типа ξ. Тогда в X существует эквивалентная локально равномерно выпуклая норма, по которой базис $\{S_\alpha\}_{\alpha \leqslant \xi}$ монотонен.*

Доказательство. Наличие системы проекторов $\{S_\alpha\}_{\alpha \leqslant \xi}$ и инъективного отображения $T: X \to c_0(\Gamma)$ (лемма 3) позволяет получить требуемый результат методом Троянского [6].

3. Индикаторные функционалы

Пусть в пространстве X введена локально равномерно выпуклая норма $\|\cdot\|$, относительно которой базис $\{e_\alpha\}_{\alpha<\xi}$ монотонен. Следуя [1], введем функционал $\omega(x, \delta)$, $x \in U(X)$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$ (локальный модуль выпуклости): $\omega(x, \delta) = \frac{1}{2}\sup\|x - z\|$ по $z \in G(x, \delta)$, где $G(x, \delta) = \{z \in W(X) : \min\limits_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1}\|\lambda x + (1-\lambda)z\| \geqslant 1 - \delta\}$.

Если пространство X локально равномерно выпукло, то $\omega(x, \delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Предложение 2 [1]. *Пусть X — B-пространство. Тогда $\omega(x, \delta)$ равномерно непрерывен на множестве $U(X) \times [\delta_0, 1]$. Если же X — локально равномерно выпуклое пространство, то $\omega(x, \delta)$, сверх того, непрерывен на множестве $U(X) \times [0, 1]$, $(0 < \delta_0 < 1)$.*

Там же установлено соотношение $\omega(x, \delta + h) - \omega(x, \delta) \leqslant \frac{2h}{\delta^2}$.

Аналогично [1] введем функционалы $(\forall x \in W(X))$, $\Phi(x) = \omega(x/\|x\|, 1 - \|x\|)$; $\Phi(0) = 1$ и $F(x) = \left(1 - \frac{1}{2}\|x\|\right)\min\limits_{y \in L(x)}\Phi(y)$, где $L(x)$ — ломаная, соединяющая точки $S_1x, S_2x, \ldots, x$.

Из предложения 2 следует непрерывность функционалов Φ и F на единичном шаре $W(X)$, равномерная их непрерывность на каждом шаре $\mu W(X)$ $(0 < \mu < 1)$ и, кроме того, $\frac{1}{2}(1 - \|x\|) \leqslant F(x) \leqslant 1$.

Определение. *Непрерывный функционал p, определенный на $W(X)$, удовлетворяет условию D на множестве $M \subset W(X)$ (обозначается $p \in D(M)$), если функции $\psi_\alpha(t) = p(S_\alpha x + te_\alpha)$ $(S_\alpha x + te_\alpha \in M)$, строго убывают с ростом модуля t.*

Заметим, что $F \in D[W(X)]$ и функции $\varphi_x(t) = F(tx)$, $t \geqslant 0$ строго убывают.

Аналогично [1] возможно установить следующее индикаторное свойство функционала F.

Лемма 5. *Пусть направленность $\{S_\alpha\}_{\alpha<\xi}$ $(S_\alpha \in W(X)$, $S_\alpha = \sum\limits_{\beta<\alpha} a_\beta e_\beta$, $a_\beta \in R)$ такова, что $F(S_\alpha) \underset{\alpha}{\to} 0$. Тогда направленность $\{S_\alpha\}_{\alpha<\xi}$ сходится.*

Отметим, наконец, что $F(-x) = F(x)$ (это следует из четности исходной нормы $\|\cdot\|$).

4. Вогнутые функционалы

Определение. *Функционал p называется вогнутым, если $\forall\lambda \in [0, 1]$ и всех x и y из его области определения $p[\lambda x + (1-\lambda)y] \geqslant \lambda p(x) + (1-\lambda)p(y)$.*

Будем говорить, что функционал p, определенный на $W(X)$, принадлежит классу $C(M)$, $M \subset W(X)$, если:

1) p непрерывен на $W(X)$;
2) $p(x) = p(-x)$ $\forall x \in M$;

3) множество $\{x \in W(X) : p(x) \geqslant a\}$ выпукло для любого a $(0 \leqslant a < p(0))$;

4) $\forall x \in \operatorname{int} M$ существует его окрестность, в которой p вогнут;

5) $\varphi_x(t) = p(tx)$ — невозрастающая функция при $t > 0$.

Локальным модулем вогнутости функционала p называется функционал $\omega(x, \delta, p) = \frac{1}{2} \sup\limits_{z \in G(x, \delta, p)} \| x - z \|$, где $G(x, \delta, p) = \{z \in W(X)$:

$$\max_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} [p[\lambda x + (1 - \lambda) z] - \lambda p(x) - (1 - \lambda) p(z)] \leqslant \delta\}.$$

Определение. *Функционал p называется локально равномерно вогнутым в области $M \subset W(X)$ $(p \in LC(M))$, если $p \in C(M)$ и $\omega(x, \delta, p) \to 0$ при $\delta \to 0$ $\forall x \in M$.*

Определение. *$p \in DLC(M)$, если $p \in LC(M)$ и $p \in D(M)$.*

Определение. *«Верхней огибающей» $\bar{p}$ функционала p называется функционал $\bar{p}(x) = \inf \{h(x) : h \in A_p,\ h(x) \geqslant p(x)\ \forall x \in O(p)\}$, где A_p — множество функционалов, аффинных на области определения $O(p)$ функционала p.*

Заметим, что $\bar{p} \geqslant p$, $\bar{p}$ — вогнутый.

Лемма 6. *Пусть p — ограниченный сверху функционал, определенный на выпуклом подмножестве E пространства X, $p(x) > 0$ $\forall x \in \operatorname{int} E$. Тогда $\bar{p}$ непрерывен во всех внутренних точках множества E.*

Лемма 7. *Если $p \in D[W(X)]$, то $\bar{p}(x) \leqslant \bar{p}(S_\alpha x)$ $\forall x \in W(X)$, $\forall \alpha \leqslant \xi$.*

Лемма 8. *Пусть $p_1 \in D[W(X)]$; $p_2 \in DLC(M)$, тогда $p_3 = \frac{\bar{p}_1 + p_2}{2}$ принадлежит классу $DLC(M)$, причем $\omega(x, \delta, p_3) \leqslant \omega(x, 2\delta, p_2)$.*

Доказательство. Из вогнутости функционала $\bar{p}_1$ следует, что $G(x, \delta, p_3) \subset G(x, 2\delta, p_2)$ и, следовательно, $\omega(x, \delta, p_3) \leqslant \omega(x, 2\delta, p_2)$.

Лемма 9. *Пусть X — локально равномерно выпуклое пространство. Функционал $g(x)$ неотрицателен, ограничен, обращается в 0 на сфере $U(X)$ и непрерывен на ней. Тогда огибающая $\bar{g}$ непрерывна в шаре $W(X)$ и $\bar{g}|_{U(X)} = 0$.*

Доказательство. По лемме 6 $\bar{g}$ — непрерывен внутри шара $W(X)$. Пусть $x_0 \in U(X)$, функционал $H(x)$ — опорный в точке x_0. Тогда $H_1(x) = H(x_0) - H(x)$ обращается в 0 в точке x_0 и $H_1(x) \geqslant 0$ $\forall x \in W(X)$. Из непрерывности g и локальной равномерной выпуклости нормы $\| \cdot \|$ получим $\forall \varepsilon > 0$ $\exists t > 0 : \sup g(x) < \varepsilon$ при $x \in W(X) \cap \{y \in W(X) : 0 < tH_1(y) \leqslant 1\}$, но тогда функционал $H_2(x) = tH_1(x) + \varepsilon$ мажорирует g и в точке x_0 равен ε. Следовательно, $g(x_0) = 0$.

Лемма 10. *Пусть $p \in LC(M)$, где $M = \{x \in W(X) : 0 \leqslant c_1 \leqslant p(x) \leqslant c_2 < p(0)\}$. Кроме того, $p(x) = 0$ при $x \in U(X)$. Тогда $\forall a$ $c_1 \leqslant a < c_2$ множество $M_a = \{x \in W(X) : p(x) \geqslant a\}$, порождает экви-*

валентную локально равномерно выпуклую норму $|\cdot|_a$ *в* X. *Если* $p \in DLC(M)$, *то базис* $\{e_\alpha\}_{\alpha<\xi}$ *монотонен по норме* $|\cdot|_a$.

Доказательство. Поскольку $p(x) = p(-x)$ $\forall x \in W(x)$, то множество M_a порождает норму. Она эквивалентна исходной вследствие непрерывности функционала p. Из свойства D непосредственно следует монотонность базиса. Если $a = 0$, то $|\cdot|_a$ совпадает с исходной нормой $\|\cdot\|$. Пусть $x_0 \in M$, $p(x_0) = a > 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $p \in LC(M)$, можно выбрать $\varepsilon_1 < \varepsilon$ так, чтобы функционал p был равномерно непрерывен в окрестности $U(x_0, \varepsilon_1)$ и $h > 0$ так, чтобы $\forall z \overline{\in} U(x_0, \varepsilon_1)$ $\exists \lambda \in [0, 1] : p[\lambda x_0 + (1-\lambda) z] - \lambda p(x_0) - (1-\lambda) p(z) > h$. Из равномерной непрерывности p внутри $U(x_0, \varepsilon_1)$ следует $\exists \delta_1 : \forall x$, y $x \in U\left(x_0, \frac{\varepsilon_1}{2}\right)$, $p(x) = a$, $\|x - y\| < \delta_1$, $p(y) \geqslant a$ выполняется $p(y) - p(x) \leqslant h$. Поскольку нормы $\|\cdot\|$ и $|\cdot|_a$ эквивалентны, то $\exists \delta_2 : \forall x$, y $x \in U\left(x_0, \frac{\varepsilon_1}{2}\right)$, $1 - \delta_2 < |y|_a \leqslant 1$, выполняется $p(y) - p(x) = p(y) - a \leqslant h$. Пусть $|z|_a = 1$, $\min\limits_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} |\lambda x_0 + (1-\lambda) z|_a > 1 - \delta_2$. Тогда $\max\limits_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} p[\lambda x_0 + (1-\lambda) z] - a \leqslant h$. Следовательно, $\|z - x_0\| < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Так как ε выбиралось произвольно, то норма $|\cdot|_a$ — локально равномерно выпуклая.

5. Непрерывные семейства функционалов

Пусть в пространстве X задано семейство непрерывных на $W(X, \|\cdot\|)$ функционалов $g(x, a)$, где $x \in W(X)$, параметр a лежит в нормированном пространстве Z. Пусть также

$$g(t_1 x, a) - g(t_2 x, a) \geqslant T(t_2 - t_1) \qquad (\divideontimes)$$

для $t_1 \leqslant t_2$, $g(t_1 x, a) > 0$, $g(t_2 x, a) > 0$, $T > 0$.

Определение. *Будем называть семейство функционалов непрерывным в точке* $a_0 \in Z$, *если выполняется* $(\divideontimes)$ *и* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta : \forall a$, $\|a - a_0\| < \delta$, $\forall x \in W(X) \Rightarrow g[(1+\varepsilon)x, a_0] \leqslant g(x, a) \leqslant g[(1-\varepsilon)x, a_0]$.

Лемма 11. *Пусть семейство функционалов* $g(x, a)$ *непрерывно в точке* a_0. *Тогда семейство огибающих* $\overline{g(x, a)}$ *также непрерывно в точке* a_0.

Доказательство. Пусть $x_0 \in W(X)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем δ так, чтобы из $\|a - a_0\| < \delta$ следовало $g[(1-\varepsilon)x, a_0] \leqslant g(x, a) \leqslant g[(1-\varepsilon)x, a_0]$.

1) Пусть $\overline{g(x_0, a)} \leqslant \overline{g(x_0, a_0)}$. Выберем $H \in A_{g(x, a)}$ (т. е. $H(x) \geqslant g(x, a)$ $\forall x \in X$) так, чтобы $H(x_0) \leqslant \overline{g(x_0, a)} + \varepsilon'$ $(\varepsilon' > 0)$. Обозначим $H_1(x) \equiv H\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)$, тогда $H_1(x) \in A_{g(x, a)}$ и $g(x, a_0) \leqslant g\left(\frac{x}{1+\varepsilon}, a\right) \leqslant H\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right) = H_1(x)$, но тогда $g[(1+\varepsilon)x_0, a_0] \leqslant$

$\leqslant H_1[x_0(1+\varepsilon)] = H(x_0) \leqslant \overline{g(x_0, a)} + \varepsilon'$. Так как ε' может быть взято сколько угодно малым, то $\overline{g[(1+\varepsilon)x_0, a_0]} \leqslant \overline{g(x_0, a)}$. Далее,

$$\overline{g(x_0, a)} \leqslant \overline{g(x_0, a_0)} \leqslant \overline{[g(1-\varepsilon)x_0, a_0]}.$$

Последнее неравенство выполняется вследствие сохранения свойства ($\divideontimes$) при взятии огибающей (только положительными частями аффинных функционалов).

2) Случай $\overline{g(x_0, a)} \geqslant \overline{g(x_0, a_0)}$ аналогичен предыдущему.

Лемма 12. *Пусть задано семейство норм $|\cdot|_a$ равномерно сходящихся к $|\cdot|_a$ и семейство непрерывных функционалов $g(x, a)$ для которых выполнено ($\divideontimes$) и $g(x, a) = 0$, если $x \,\bar{\in}\, W(X, |\cdot|_a)$. Если функционалы $g(x, a)$ сходятся при $a \to a_0$ к $g(x, a_0)$ равномерно внутри любого шара $\mu W(X, |\cdot|_a)$ $(\mu < 1)$, то семейство $g(x, a)$ непрерывно в точке a_0.*

Доказательство. Фиксируем $x_0 \in W(X, |\cdot|_a)$ и $\varepsilon > 0$. $\exists \delta_1 : \| a - a_0 \| < \delta_1 \Rightarrow | g(x, a) - g(x, a_0) | \leqslant \frac{\varepsilon T}{2}$ при $x \in \frac{1}{1+\varepsilon} W(X, |\cdot|_{a_0})$.

Если $x_0 \in \frac{1}{1+\varepsilon} W(X, |\cdot|_{a_0})$ то, используя ($\divideontimes$), $g(x_0, a) \leqslant g(x_0, a_0) + \frac{\varepsilon T}{2} \leqslant g[(1-\varepsilon)x_0, a_0] - \varepsilon T + \frac{\varepsilon T}{2} = g[(1-\varepsilon)x_0, a_0] - \frac{\varepsilon T}{2} \leqslant g[(1-\varepsilon)x_0, a_0]$. С другой стороны, $g(x_0, a) \geqslant g(x_0, a_0) - \frac{\varepsilon T}{2} \geqslant g[(1+\varepsilon)x_0, a_0] + \frac{\varepsilon T}{2} \geqslant g[(1+\varepsilon)x_0, a_0]$.

Если же $x_0 \,\bar{\in}\, \frac{1}{1+\varepsilon} W(X, |\cdot|_{a_0})$, то $g[(1+\varepsilon)x_0, a_0] = 0$, $g(x_0, a) \leqslant g[(1-\varepsilon)x_0, a_0] - \varepsilon T \leqslant g[(1-\varepsilon)x_0, a_0] - \varepsilon T + \frac{\varepsilon T}{2} \leqslant g[(1-\varepsilon) \times x_0, a_0]$.

Лемма 13. *Пусть нормы $|\cdot|_a$ $(|x_a| \geqslant \|x\|)$ сходятся к $|\cdot|_{a_0}$ равномерно. Тогда соответствующие им индикаторные функционалы $\Phi_a(x)$ сходятся (при $a \to a_0$) к $\Phi_0(x)$ равномерно внутри любого шара $\mu W(X, |\cdot|_{a_0})$ $(\mu < 1)$.*

Доказательство. Пусть $\forall x \in W(X, \|\cdot\|)$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $(1-\varepsilon)|x|_0 \leqslant |x|_a \leqslant (1+\varepsilon)|x|_0$ $(|\cdot|_0 \equiv |\cdot|_{a_0})$. Обозначим $|||x||| = (1-\varepsilon)|x|_0$. Тогда $|||x||| \leqslant |x|_a \leqslant (1+4\varepsilon)|||x|||$. Пусть $\min\limits_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} \left| \lambda \frac{x}{|x|_a} + (1-\lambda) \times z \right|_a \geqslant |x|_a$, тогда $\min\limits_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} \left\| \lambda \frac{x}{|||x|||} + (1-\lambda) z \right\| \geqslant \min\limits_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} \left| \lambda \frac{x}{|x|_a} \times \frac{|x|_a}{|||x|||} + (1-\lambda) z \right|_a \cdot \frac{1}{1+4\varepsilon} \geqslant \frac{1}{1+4\varepsilon} \min\limits_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} \left[\lambda \frac{|x|_a}{|||x|||} + (1-\lambda) \right] \times \min\limits_{0 \leqslant \nu \leqslant 1} \left| \nu \frac{x}{|x|_a} + (1-\nu) z \right|_a \geqslant \frac{|x|_a}{1+4\varepsilon} \geqslant (1-4\varepsilon)|||x|||$, т. е. $G\left(\frac{x}{|x|_a}, 1 - |x|_a\right) \subset G\left(\frac{x}{|||x|||}, 1 - |||x||| + 4\varepsilon |||x|||\right)$.

Используя неравенство предложения 2, получим $\Phi_a(x) \leqslant \leqslant \omega\left(\frac{x}{|||x|||}, 1 - |||x||| + 4\varepsilon |||x|||\right) \leqslant \omega\left(\frac{x}{|||x|||}, 1 - |||x|||\right) + \frac{8\varepsilon |||x|||}{(1 - |||x|||)^2} \leqslant \leqslant \Phi_0(x) + \frac{8\varepsilon(1-\varepsilon)|x|_0}{[1-(1-\varepsilon)|x|_0]^2}$. Аналогичное неравенство получается и в другую сторону (используя норму $|||x||| = (1+\varepsilon)|x|_0$).

Лемма 14. *Пусть семейство норм $|\cdot|_a$ таково, что*

1) *все они эквивалентны исходной норме $\|\cdot\|$, причем $|x|_a \geqslant \geqslant \|x\| \forall a$;*

2) *базис по каждой из норм монотонен;*

3) *при $a \to a_0$ $|\cdot|_a \to |\cdot|_{a_0}$ (равномерно).*

Тогда семейство индикаторных функционалов $F(x, a) = F_a(x)$ непрерывно в точке a_0 (вне шара $W(X, |\cdot|_a)$ доопределим $F(x, a)$ нулем).

Доказательство.

$$F_a(x) = \left(1 - \frac{1}{2}|x|_a\right) \cdot \min_{y \in L(x)} \Phi_a(y).$$

Пусть $\mu < 1$, $x_0 \in \mu W(X, |\cdot|_{a_0}$. Вследствие монотонности нормы $|\cdot|_{a_0}$ ломаная $L(x_0)$ лежит целиком в шаре $\mu W(X, |\cdot|_a)$. Так как функционалы $\Phi_a(x)$ равномерно сходятся к $\Phi_0(x)$ внутри этого шара (лемма 13), то и $F_a(x)$ равномерно сходятся к $F_0(x)$ внутри $\mu W(X, |\cdot|_{a_0})$. По лемме 12 семейство $F_a(x)$ непрерывно в точке a_0. (Свойство (⋇) выполнено с $T = 1/2$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кадец М. И. Доказательство топологической эквивалентности всех сепарабельных бесконечномерных пространств Банаха. — «Функц. анализ и его прилож.», 1967, т. 1, вып. 1, с. 61—70.
2. Bessaga C. and Pelczynski A. A topological proof that every separable Banach space is homeomorphic to a countable product of lines.-«Bull. Acad. Polon. Sci. math., astr. et phys.», 1969, vol. 17, p. 487—493.
3. Bessaga C. Topological equivalence of non-separable reflexive Banach spaces. — В кн.: «Simposium on infinite-dimensional topology. Annals of Math. Studies, 69».
4. Троянский С. Топологическая эквивалентность пространств $c_0(\Gamma)$ и $l_1(\Gamma)$. — «Bull. Acad. Polon. Sci.» 1967, vol. 15,p. 387—396.
5. Bessaga C. and Pelczynski A. Some remarks on homeomorphism of Banach speces. —«Bull. Acad. Polon. Sci.», 1960, vol. 8, p. 757—760.
6. Trojanski S. On locally uniformly convex and differentiable norms in certain non-separable Banach spaces. — «Studia math.», 1971, vol. 37, p. 173—180.
7. Amir D., Lindenstraus J. The structure of weakly compact sets in Banach spaces. — «Ann. of Math.», 1968, vol. 88, p. 35—46.
8. Bessaga C. and Pelczynski A. Selected topics in infinitedimensional topology. PWN, Warszawa, 1975. p. 96.

Поступила 14 июня 1977 г