УДК 517.535.4

Б. Н. ГИНЗБУРГ, Н. Д. СЕРЫХ

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ НУЛЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ЦЕЛЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГОМЕРНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В монографии Ю. В. Линника и И. В. Островского [1, с. 398] в качестве одной из актуальных проблем теории характеристических функций (х. ф.) сформулирована проблема описания нулевых поверхностей целых характеристических функций многомерных вероятностных распределений. Насколько нам известно, эта проблема до настоящего времени не рассматривалась. В настоящей работе мы изучаем ее частный случай: какими могут быть алгебраические нулевые поверхности целых характеристических функций конечного порядка?

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, являющаяся основным результатом работы.

Теорема 1. *Пусть* $Q(t)$, $t=(t_1, \ldots, t_n)\in C^n$ — *полином*, $Q(0)=1$. *Для того чтобы существовала целая характеристическая функция* $\varphi(t)$ *конечного порядка, такая, что частное* $\varphi(t)\diagdown Q(t)$ *является целой функцией без корней, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: а)* $\overline{Q(-\bar{t})}=Q(t)$; *б) расстояние в* C^n *между множествами* $\{t:\mathrm{Re}\,t=0\}$, $\{t:Q(t)=0\}$, *где* $\mathrm{Re}\,t=(\mathrm{Re}\,t_1, \ldots, \mathrm{Re}\,t_n)$, *положительно.*

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится следующий результат, представляющий, возможно, некоторый самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Пусть* $Q(t)$, $t=(t_1, \ldots, t_n)\in C^n$ — *полином, удовлетворяющий для некоторых* $m_1, \ldots, m_n\in Z_+$ *условиям:*

$$\frac{(-1)^{m_j-1}}{(m_j-1)!}\,\mathrm{Re}\,(\partial/\partial t_j)^{m_j}\ln Q(t)\Big|_{\mathrm{Im}\,t=0}\leqslant M_j,\ j=1, \ldots, n, \qquad (1)$$

где M_j — *некоторые положительные постоянные;* $\mathrm{Im}\,t=(\mathrm{Im}\,t_1, \ldots, \mathrm{Im}\,t_2)$. *Тогда полином* $Q(t)$ *не обращается в нуль в области* $\left\{t:\sum_{j=1}^{n}|\mathrm{Im}\,t_j|\,[M_j(a(m_j))^{-1}[1+(a(m_j))^{-1}b(m_j)]^{n_j-1}]^{1/m_j}<1\right\}$, *где* n_j — *степень полинома* $Q(t)$ *по переменной* t_j, $a(m)=\sum_{l=0}^{[m/2]}(-1)^l C_m^{2l}\times$ $\times\left(2\left|\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2m}\right|\right)^{m-2l}\left[\left(2\,\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2m}\right)^2+1\right]^{-m}$; $b(m)=\max\limits_{s}\left|\sum_{l=0}^{[m/2]}(-1)^l C_m^{2l}\times\right.$ $\left.\times|\mathrm{ctg}\,\varphi_s|^{m-2l}[(\mathrm{ctg}\,\varphi_s)^2+1]^{-m}\right|$; $\varphi_s=\pi/(2m+2)+\pi s/(m+1)$, $s=0$, 1, ..., $[m/2]$. Теорема 2 дополняет следующий результат, полученный в одномерном случае* В. Э. Кацнельсоном, и распространенный на многомерный случай Л. И. Ронкиным.

Теорема [2]. *Пусть* $Q(t)$, $t \in C^n$ — *полином, удовлетворяющий условиям* $|(\partial/\partial t_j) \ln Q(t)|_{\operatorname{Im} t=0}| \leqslant M_j$, $j = 1, \ldots, n$. *Тогда полином* $Q(t)$ *не обращается в нуль в области* $\left\{t : \sum_{j=1}^{n} |\operatorname{Im} t_j| M_j (\ln n_j + 1) \leqslant \leqslant A\right\}$, *где* A — *абсолютная постоянная.*

Сначала проведем доказательство теоремы 2. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $P(z)$, $z \in C^1$ — *полином степени* n, *удовлетворяющий для некоторого* $m \in Z_+$ *условию*

$$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \operatorname{Re} (d/dz)^m \ln P(z)|_{\operatorname{Im} z=0} \leqslant M, \tag{2}$$

где M — *положительная постоянная. Тогда полином* $P(z)$ *не обращается в нуль в полосе*

$$|\operatorname{Im} z| < [a(m) M^{-1} [1 + (a(m))^{-1} b(m)]^{-n+1}]^{1/m}. \tag{3}$$

Заметим, что в случае, когда условие (2) заменено условием $(d^2/dz^2) \ln P(z)|_{\operatorname{Im} z=0}| \leqslant M$, в работе А. О. Гельфонда [4] получена более сильная, чем [3], оценка для ширины полосы без корней.

Доказательство леммы 1. Пусть $z = x + iy$, $z_k = x_k + iy_k$ — корни полинома $P(z)$. Обозначим через

$$L_k(x) = \operatorname{Re} \left[\frac{x - x_k - iy_k}{(x - x_k)^2 + y_k^2}\right]^m = \sum_{l=0}^{[m/2]} (-1)^l \frac{C_m^{2l} (x - x_k)^{m-2l} y_k^{2l}}{\left[(x - x_k)^2 + y_k^2\right]^m}.$$

Тогда неравенство (2) можно переписать в виде

$$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \operatorname{Re} (d/dz)^m \ln P(z)|_{z=x} = \sum_{k=1}^{n} L_k(x) \leqslant M. \tag{4}$$

Пусть $x - x_k - iy_k = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, тогда $L_k(x) = r^{-m} \cos m\varphi$. Из соотношения $\cos\varphi_p = (x - x_k)[(x - x_k)^2 + y_k^2]^{-\frac{1}{2}}$, где $\varphi_p = = \pi(2m)^{-1} + \pi p(m)^{-1}$ — корни уравнения $\cos m\varphi = 0$, находим, что корни $L_k(x)$ имеют вид $x_k \pm |y_k \operatorname{ctg} \varphi_p|$.

---

* Этот результат был получен в связи со следующей задачей Е. А. Горина [3]. Найти $\inf\limits_{\alpha \in E} |\operatorname{Im} \alpha|$, где E — множество всех чисел, которые могут служить корнями полинома, удовлетворяющего условию $|P'(x)/P(x)| < 1$, $x \in R_1$.

Обозначим через $x_0^k = x_k + \left| y_k \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m} \right|$ — наибольший среди корней $L_k(x)$. Корни полинома $P(z)$ перенумеруем так, чтобы $x_0^{(1)} \leqslant \cdots \leqslant x_0^{(n)}$.

Положим в неравенстве (4) $x = x_0^{(n)} + \left| y_n \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m} \right| = x_n + 2\left| y_n \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m} \right|$. Тогда каждое слагаемое в левой части неравенства $\sum_{k=1}^{n} L_k\left(x_n + 2\left| y_n \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m} \right|\right) \leqslant M$ положительно, поэтому

$$L_n\left(x_n + 2\left| y_n \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m} \right|\right) = |y_n|^{-m} \sum_{l=0}^{[m/2]} (-1)^l \frac{C_m^{2l}\left(2\left|\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2m}\right|\right)^{m-2l}}{\left[\left(2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2m}\right)^2 + 1\right]^m} = a(m)\,|y_n|^{-m} \leqslant M.$$

Для $|y_n|$ получаем оценку $|y_n| \geqslant (a(m)/M)^{1/m}$. Оценим $|L_k(x)|$ сверху. Имеем

$$(d/dx)\,L_k(x) = -mr^{-(m+1)} \cos(m+1)\,\varphi. \tag{5}$$

Из (5) следует, что в точках $x_k \pm |y_k \operatorname{ctg} \varphi_s|$, где $\varphi_s = \pi/(2m+1) + \pi s/(m+1)$, $s = 0, 1, \ldots, [m/2]$, функция $L_k(x)$ имеет экстремум. Следовательно,

$$|L_k(x_k \pm |y_k \operatorname{ctg}\varphi_s|)| \leqslant \max_{0 \leqslant s \leqslant [m/2]} \left| \sum_{l=0}^{[m/2]} (-1)^l \frac{|y_k|^{-m} C_m^{2l} |\operatorname{ctg}\varphi_s|^{m-2l}}{[(\operatorname{ctg}\varphi_s)^2 + 1]^m} \right| = b(m)\,|y_k|^{-m}.$$

Из этого неравенства и неравенства (4) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} L_k(x) \leqslant M + |L_n(x)| \leqslant M + b(m)\,|y_n|^{-m} \leqslant M\,[1 + (a(m))^{-1}\,b(m)]. \tag{6}$$

Положим в (6) $x = x_0^{(n-1)} + \left| y_{n-1} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m} \right|$. Проводя аналогичные рассуждения, получим, что $|y_{n-1}| \geqslant [a(m)\,M^{-1}\,[1 + (a(m))^{-1} b(m)]^{-1}]^{1/m}$. Отсюда по индукции $|y_{n-k}| \geqslant [a(m)\,M^{-1}\,[1 + (a(m))^{-1}\,b(m)]^{-k}]^{1/m}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Мы будем применять такую теорему [5, с. 61], являющуюся следствием известной теоремы Бернштейна ([6], см. также [5, с. 48]).

Теорема 5. *Пусть функция $f(z_1, \ldots, z_n)$ определена на множестве $H \bigcup H_i(b_i)$, где $H_i(b_i) = \{(x_1, \ldots, z_i, \ldots, x_n),\ x_j \in R,\ j \neq i,\ |\operatorname{Im} z_i| < b_i\}$ и ограничена на каждом его компактном подмножестве. Пусть, далее, при каждом фиксированном $x_1, \ldots,$*

$x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n$) *функция* f *голоморфна по переменной* z_i *в полосе* $|\operatorname{Im} z_i| < b_i$. *Тогда существует и притом единственная функция* $F(z_1, \ldots, z_n)$, *голоморфная в области* $\{(z_1, \ldots, z_n): |\operatorname{Im} z_1| b_1^{-1} + \cdots + |\operatorname{Im} z_n| b_n^{-1} < 1\}$ *и совпадающая на* H *с функцией* f.

Рассмотрим функцию $f(z_1, \ldots, z_n) = 1/P(z_1, \ldots, z_n)$. Из условия (1) в силу леммы 1 вытекает, что $P(x_1, \ldots, z_j, \ldots, x_n)$ не имеет нулей в полосе $|\operatorname{Im} z_j| < c_j$, где $c_j = [a(m_j) M_j^{-1} [1 + (a(m_j))^{-1} b(m_j)]^{-n_j+1}]^{1/m_j}$, другими словами, $f(x_1, \ldots, z_j, \ldots, x_n)$ — голоморфна в этой полосе. Применяя сформулированную выше теорему из [5], получаем утверждение теоремы 2.

Перейдем к доказательству теоремы 1 в части необходимости. Пусть характеристическая функция $\varphi(t_1 \ldots, t_n)$ такая, что функция $\psi(t_1, \ldots, t_n) = \varphi(t_1, \ldots, t_n)/Q(t_1, \ldots, t_n)$ является целой функцией без корней. Каждая характеристическая функция имеет свойство «хребта» [1, с. 42], т. е. $|\varphi(t_1, \ldots, t_n)| \leqslant \varphi(i \operatorname{Im} t_1, \ldots, i \operatorname{Im} t_n)$ и, следовательно, принимает на мнимой гиперплоскости положительные значения. Для характеристической функции $\varphi(t)$, $t = (t_1, \ldots, t_n) \in C^n$ верно следующее соотношение $\overline{\varphi(-\bar{t})} = \varphi(t)$. которое можно переписать в виде

$$Q(t)/\overline{Q(-\bar{t})} = \overline{\psi(-\bar{t})}/\psi(t). \tag{7}$$

В равенстве (7) справа стоит целая функция без нулей, слева — рациональная, следовательно, $Q(t)/\overline{Q(-\bar{t})} = \mathrm{const}$. Из условия $Q(0) = 1$ заключаем, что полином $Q(t)$ должен удовлетворять условию а) теоремы 1.

Из теоремы Марцинкевича [1, с. 59] следует, что х. ф. $\varphi_j(t) = \varphi(0, \ldots, t, \ldots, 0)$, $t \in C^1$ не выше порядка 2, нормального типа и, значит, существует постоянная k_j такая, что справедливо асимптотическое неравенство $\ln \varphi_j(iy) < k_j y^2$, $y \in R^1$. В [7] доказано, что функция $\ln \varphi(iy_1, \ldots, iy_n)$ выпукла по совокупности переменных. Следовательно, $\ln \varphi(iy_1, \ldots, iy_n) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln \varphi(0, \ldots, iny_j, \ldots, 0)$ и, значит, найдется такое k, что справедливо асимптотическое неравенство $\ln \varphi(iy_1, \ldots, iy_n) < k|y|^2$. В силу свойства «хребта» отсюда заключаем, что целая х. ф. конечного порядка допускает оценку $|\varphi(t)| \leqslant \exp\{k|t|^2\}$.

Порядок функции $\psi(t_1, \ldots, t_n)$ не превосходит наибольшего из порядков функций $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$, $Q(t_1, \ldots, t_n)$, поэтому порядок функции $\psi(t_1, \ldots, t_n)$ не превосходит двух. Так как функция $\psi(t_1, \ldots, t_n)$ является целой функцией без корней порядка не выше двух, то она представима в виде $\psi(t_1, \ldots, t_n) = \exp\{Q_1(t_1, \ldots, t_n)\}$, где $Q_1(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{ij=1}^{n} A_{ij} t_i t_j + \sum_{s=1}^{n} B_s t_s$ — полином от переменных степени не выше двух. Заметим, что полином $Q_1(t_1,$

$\ldots, t_n)$ на мнимой гиперплоскости принимает вещественные значения, следовательно, $A_{jj}\,(j=1, \ldots, n)$ — вещественные числа. Из выпуклости функции $Q_1(iy_1, \ldots, iy_n)+\ln Q(iy_1, \ldots, iy_n)$ следует, что $(\partial/\partial y_j)^2 \ln Q(iy_1, \ldots, iy_n) \geqslant -A_{jj}$, $j=1, \ldots, n$, $(y_1, \ldots, y_n) \in R^n$. Используя теорему 2, заключаем, что расстояние между множествами $\{t: \mathrm{Re}\, t=0\}$ и $\{t: Q(t)=0\}$ должно быть положительным. Необходимость условия б) теоремы 1 доказана.

Для доказательства достаточности в теореме 1 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $P(x)$ — полином в R^n. Тогда справедливо соотношение*

$$P(-iD_1, \ldots, -iD_n)\, e^{-\|x^2\|/(4a^2)} = e^{-\|x^2\|/(4a^2)} \left[e^{-\Delta/(4a^2)} \tilde{P}(y)\right]_{y=x/(4a^2)}, \tag{8}$$

где $D_j=\partial/\partial x_j$, $\Delta=\sum_{j=1}^{n}(\partial/\partial x_j)^2$, $\|x^2\|=\sum_{j=1}^{n} x_j^2$, $\tilde{P}(y)=\tilde{P}(y_1, \ldots, y_n)=P(iy_1, \ldots, iy_n)$.

Доказательство этого соотношения мы проведем, используя выражение для полиномов Эрмита $H_k(x)=(-1)^k e^{x^2}(d^k/dx^k)(e^{-x^2})=k! \sum_{m=0}^{[k/2]}(-1)^m \frac{x^{k-2m}}{m!(k-2m)!}$, $x \in R^1$. Для любого целого неотрицательного k имеем

$$e^{x^2/(4a^2)}(-id/dx)^k e^{-x^2/(4a^2)} = i^k (1/(2a))^k H_k(x/(2a)) =$$

$$= i^k (1/(2a))^k k! \sum_{m=0}^{[k/2]} (-1)^m \frac{(x/(2a))^{k-2m}}{m!\,(k-2m)!} =$$

$$= i^k \sum_{m=0}^{[k/2)} \frac{(-1)^m}{m!}(1/(2a))^{2m} \frac{k!}{(k-2m)!}(x/(2a))^{k-2m} = \left[e^{-D^2/(4a^2)}(iy)^k\right]_{y=x/(4a^2)}, \tag{9}$$

где $D=d/dy$.

Пусть $x=(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$. Тогда из (9) следует, что $(-D_1)^{k_1} \cdots (-D_n)^{k_n} e^{-\|x^2\|/(4a^2)} = \prod_{j=1}^{n}(-\partial/\partial x_j)^{k_j} e^{-x_j^2/(4a^2)} = e^{-\|x^2\|/(4a^2)} \times$ $\times \left[e^{-\Delta/(4a^2)}(y_1)^{k_1} \cdots (y_n)^{k_n}\right]_{y=x/(4a^2)}$ и, значит, справедливо (8). Лемма доказана.

Докажем теорему 1 в части достаточности. Пусть полином удовлетворяет условиям теоремы 1. Докажем, что тогда функция

$$\frac{\tilde{Q}_a(y)}{Q(y)} = 1 + \sum_{k=1}^{l} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{1}{4a^2}\right)^k \frac{\Delta^k \tilde{Q}(y)}{\tilde{Q}(y)} \geqslant 0. \tag{10}$$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма (Хермандер [9, с. 137]). *Пусть* $l \geqslant 1$ *есть целое число. Существует такая константа* $C = C(l)$, *что для любого полинома* P *степени* l *для всех* $x \in R^n$, *для которых* $P(x) \neq 0$, *выполняется*

$$C^{-1} \leqslant d(x) \sum_{\|k\| \neq 0} \left| \frac{P^{(k)}(x)}{P(x)} \right|^{1/\|k\|} < C,$$

где $d(x)$ — *расстояние от точки* x *до множества нулей полинома* $P(x)$, $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — *мультииндекс*, $P^{(k)}(x) = (\partial/\partial x_1)^{k_1} \cdots (\partial/\partial x_n)^{k_n} P(x_1, \ldots, x_n)$.

В силу условия б) и леммы Хермандера имеем $\left| \frac{\Delta^k \widetilde{Q}(y)}{Q(y)} \right| < B$, где B — постоянная. Следовательно,

$$\left| \sum_{k=1}^{l} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{1}{4a^2} \right)^k \frac{\Delta^k \widetilde{Q}(y)}{\widetilde{Q}(y)} \right| < B \sum_{k=1}^{l} \left(\frac{1}{4a^2} \right)^k. \tag{11}$$

Из (11) видно, что при достаточно большом a справедливо неравенство (10) и, значит, $\varphi_a(t)$ является характеристической функцией $\varphi_a(t_1, \ldots, t_n) = Q(t_1, \ldots, t_n) \exp\{-a^2(t_1^2 + \cdots + t_n^2)\}$ при некотором a является характеристической функцией многомерного вероятностного закона.

Из условия а) следует, что полином $Q(t)$ принимает на мнимой гиперплоскости действительные значения. А так как из условия б) следует, что $Q(t)$ не имеет нулей при $\operatorname{Re} t = 0$ и $Q(0) = 1$, то $Q(i \operatorname{Jm} t) > 0$ для любого $t \in C^n$.

Пусть $f_a(x_1, \ldots, x_n)$ — преобразование Фурье функции $\varphi_a(t)$. Применяя лемму 2, получаем $f_a(x_1, \ldots, x_n) = \int_{R^n} e^{i(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n)} \times Q(t_1, \ldots, t_n) e^{-a^2\|t^2\|} dt_1 \cdots dt_n = Q(-iD_1, \ldots, -iD_n) e^{-\|x^2\|/(4a^2)} = e^{-\|x^2\|/(4a^2)} [e^{-\Delta/(4a^2)} \widetilde{Q}(y)]_{y = x/(4a^2)}$. Для того чтобы функция $\varphi_a(t)$ была характеристической функцией некоторого вероятностного закона, достаточно, чтобы $f_a(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$ всюду в R^n, т. е. достаточно, чтобы $\widetilde{Q_a}(y_1, \ldots, y_n) = e^{-\Delta/(4a^2)} Q(y_1, \ldots, y_n) \geqslant 0$, $\forall y \in R^n$. Так как $\widetilde{Q}(y_1, \ldots, y_n) > 0$, то это неравенство равносильно неравенству (10).

Замечание. Рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, позволяют получить следующий результат, относящийся к «обратному» уравнению теплопроводности

$$\Delta u(t, x) = -(\partial/\partial t) u(t, x) \tag{12}$$

в области $\{0 < t < T,\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n\}$, $\Delta = \sum_{j=1}^{n} (\partial/\partial x_j)^2$.

Теорема 3. *Пусть* $u = u(t, x)$ — *решение уравнения (12), допускающее оценку*

$$|u(t, x)| < ce^{b|x|^2} \tag{13}$$

и удовлетворяющее начальному условию

$$u(0,\ x) = S(x),\ x = R^n, \tag{14}$$

где $S(x)$ — *полином, положительный при всех* $x \in R^n$. *Для того чтобы существовало такое* t_0, $0 < t_0 < T$, *что* $u(t,\ x) > 0$ *при* $0 < t < t_0$, $x \in R^n$, *необходимо и достаточно, чтобы расстояние в* C^n *между множествами* $\{z : \operatorname{Im} z = 0\}$ *и* $\{z : S(z) = 0\}$ *было положительным.*

Действительно, непосредственная проверка показывает, что функция $u(t,\ x) = e^{-t\Delta} S(x)$ является решением уравнения (12), удовлетворяющим начальному условию (14) и допускающим оценку (13). Известно [8, с. 73], что такое решение единственно.

Пусть $u(t,\ x) \geqslant 0$ при $0 < t < t_0$, $x \in R^n$. Тогда из рассуждений, приведенных при доказательстве достаточности в теореме 1, следует, что функция $\frac{S(iz)}{S(0)} \exp\left\{-\frac{1}{4t}(z_1^2 + \cdots + z_n^2)\right\}$, $0 < t < t_0$ является, как функция от z, характеристической функцией. Применяя теорему 1 в части необходимости, убеждаемся в том, что расстояние между множествами $\{z : \operatorname{Im} z = 0\}$ и $\{z : S(z) = 0\}$ положительно.

Наоборот, если это расстояние положительно, то, пользуясь как и при доказательстве достаточности в теореме 1, леммой Хермандера, заключаем, что функция $\frac{u(t,\ x)}{S(x)} = 1 + \sum_k \frac{(-1)^k}{k!} t^k \frac{\Delta^k S}{S}$ при достаточно малом t положительна.

Авторы выражают благодарность И. В. Островскому за постановку задачи и научное руководство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложение случайных величин и векторов. М., «Наука», 1972. 480 с.
2. Кацнельсон В. Э. О некоторых операторах, действующих в пространствах, порожденных функциями $1/t - z_k$. —В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1967. Вып. 4, Харьков, с. 58—62.
3. Горин Е. А. Частично гипоэллиптические дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. — «Сибирский математический журнал,» 1962, т. 3, № 4, с. 506—508.
4. Гельфонд А. О. Об оценке мнимых частей корней многочленов с ограниченными производными их логарифмов на действительной оси. — «Математический сборник», 1966, т. 71, № 3, с. 289—296.
5. Ронкин Л. И. Элементы теории аналитических функций многих переменных. Киев, «Наукова думка», 1977. 168 с.
6. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений, т. I. Изд-во АН СССР, М., 1952. 102 с.
7. Гинзбург Б. Н. О росте целых хребтовых функций многих переменных. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1976. Вып. 26. Харьков, с. 9—11.
8. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. (Обобщенные функции, вып. 2). М., Физматгиз, 1958. 308 с.
9. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., «Мир», 1965. 245 с.

Поступила 22 марта 1977 г.