УДК 517.55

Ф. И. ГЕЧЕ

ДИАГРАММА НЬЮТОНА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИЗУЧЕНИЮ МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА КРАТНОГО РЯДА ЛОРАНА. I

Диаграмма (или ломаная) Ньютона, построенная по коэффициентам степенного ряда (или по заданной последовательности чисел) имеет многочисленные приложения [1—3]. В статье [4] Ж. Валирон использовал диаграмму Ньютона двойного степенного ряда при исследовании асимптотических свойств максимального члена ряда. Некоторую попытку построения диаграммы Ньютона двойного ряда можно найти в работе [5]. Диаграмма и мажоранта Ньютона двойных степенных рядов рассматривались в статьях А. Н. Костовского, А. И. Кардаша, И. И. Чулика (см., например, [6—9]). По сравнению с одномерным случаем диаграмма Ньютона кратного ряда имеет более сложную структуру и не исследована полностью.

В первой части настоящей работы мы изучаем свойства диаграммы Ньютона кратного ряда Лорана. Хотя диаграмма Ньютона в общем случае может совпадать (частично или полностью) даже с границей выпуклого конуса, ее локальные свойства относительно опорных гиперплоскостей такие, как у выпуклых многогранников (см. теорему 3). В связи с диаграммой рассматривается мажоранта Ньютона и изучается ее область сходимости. Эта задача была поставлена авторами работы [6]. Теорема о совпадении областей сходимости кратного степенного ряда и его мажоранты Ньютона (частный случай теоремы 4), установленная нами в [10], была применена при сравнении роста целой функции с ростом ее мажоранты Ньютона [11]. Эта же теорема доказывалась в двумерном случае в статье [7].

Изучая диаграмму Ньютона, естественно приходим к исследованию функций максимального члена и центрального индекса. Они являлись объектом исследования многих авторов. Укажем только работы [4, 12—14]. Вопросы, которые мы затрагиваем во второй части этой работы, наиболее близки к вопросам, изучаемым в работе [14] в случае кратных рядов Тейлора. Задача нахождения характеристических свойств функции максимального члена была поставлена и частично решена нами в [10]. Теоремы 10 и 12 полностью решают эту проблему. Теорема 7 дополняет важную теорему 2.10 работы [14] и дает представление об областях постоянства центральной индексной системы: локально, но не глобально они устроены так, как выпуклые многогранники (точный смысл этого утверждения см. в теореме 7). Работа [14] оказала существенное влияние на характер нашего исследования.

§ 1. Основные обозначения и определения

Через $\boldsymbol{R}^n$ и $\boldsymbol{C}^n$ обозначаются соответственно вещественное и комплексное пространства размерности $n \geqslant 1$; $\overline{\boldsymbol{R}}$ — расширенная числовая ось; $\overline{\boldsymbol{C}}^n$ — пространство теории функций. Если $x \in \boldsymbol{R}^n$, $z \in \overline{\boldsymbol{C}}^n$, то $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Далее полагаем

$\overline{\boldsymbol{R}}^n_+ = \{x \in \overline{\boldsymbol{R}}^n : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}$; $\widehat{\boldsymbol{R}^n} = \{x \in \boldsymbol{R}^n : x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}$; $\widehat{\boldsymbol{C}^n} = \{z \in \boldsymbol{C}^n : (|z_1|, \ldots, |z_n|) \in \widehat{\boldsymbol{R}^n}\}$; $\boldsymbol{R}^n_+ = \boldsymbol{R}^n \cap \overline{\boldsymbol{R}}^n_+$, $\boldsymbol{R}^n_- = -\boldsymbol{R}^n_+$; $\boldsymbol{Z}^n_+ = \boldsymbol{Z}^n \cap R^n_+$; $\boldsymbol{Z}^n = \{k \in \boldsymbol{R}^n : k = (k_1, \ldots, k_n)$, $k_1, \ldots, k_n$ — целые числа$\}$.

Если x, $y \in \boldsymbol{R}^n$, $z \in \overline{\boldsymbol{C}}^n$, $k \in \boldsymbol{Z}^n$, $r \in \widehat{\boldsymbol{R}^n}$, то полагаем $|x| = |x_1| + \cdots + |x_n|$, $\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$, $z^k = z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$, $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$, $\ln r = (\ln r) = (\ln r_1, \ldots, \ln r_n)$, $e^x = (e^x) = (e^{x_1}, \ldots, e^{x_n})$.

Будем считать, что $0^a = \infty^b = 0$, $0^b = \infty^a = \infty$; если $a > 0$, $b < 0$; $0^0 = \infty^0 = 1$.

Образ произвольного множества $M \subset \widehat{\boldsymbol{R}^n}$ при отображении $x \to (\ln x)$ будем записывать в виде $\ln(M)$. Если M — подмножество некоторого топологического пространства, подразумевающегося из контекста, то через $\overset{\circ}{M}$, $\overline{M}$ и ∂M будем обозначать соответственно внутренность, замыкание и границу множества M. Иногда вместо $\overset{\circ}{M}$ пишем $\operatorname{int} M$ $(M \subset \boldsymbol{R}^n)$. Элементы декартова произведения $X \times Y$ множеств X и Y обозначаются через (x, y) $(x \in X$, $y \in Y)$. Мы пишем $M \Subset X$, если M ограничено и $\overline{M} \subset X$.

Будем рассматривать кратный ряд A:

$$\sum_{k \in K} A_k z^k,\ A_k = A_{k_1 \ldots k_n} \neq 0,\ k \in K \subset \boldsymbol{Z}^n, \tag{1}$$

причем не исключаем случай, когда K — конечное, но непустое множество.

Обозначим через Q выпуклую оболочку множества K в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Положим $a_k = |A_k|$ и поставим в соответствие коэффициенту A_k точку P_k в пространстве $\boldsymbol{R}^{n+1}$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, ξ с координатами $x_1 = k_1, \ldots, x_n = k_n$, $\xi = -\ln a_k$, $k \in K$. Точку P_k будем называть точкой представления коэффициента A_k ряда A. Из каждой точки P_k, как из начала, проведем луч V_k в направлении положительной полуоси $O\xi$:

$$V_k = \{(x, \xi) \in \boldsymbol{R}^{n+1} : x = k,\ \xi \geqslant -\ln a_k\}.$$

Полуось $O\xi$ будем считать направленной вверх. После этого приобретают очевидный смысл такие слова, как «над», или «выше», «под», или «ниже», «вертикальная прямая». Обозначим через $W = W_A$ замкнутую выпуклую оболочку множества точек, лежащих на лучах V_k, $k \in K$ (иначе говоря, W — наименьшее замкнутое выпуклое множество, включающее лучи V_k, $k \in K$). Положим $Q_\delta = \{x \in \boldsymbol{R}^n : (\exists \xi)(x, \xi) \in W\}$, а через $L(x_0)$ обозначим вертикальную прямую $L(x_0) = \{(x, \xi) \in \boldsymbol{R}^{n+1} : x = x_0, -\infty < \xi < +\infty\}$.

Определение. *Скажем, что ряд A обладает диаграммой Ньютона, если $L(x) \not\subset W$, каково бы ни было $x \in \boldsymbol{R}^n$. Если существует прямая $L(x_0)$, такая, что $L(x_0) \subset W$, то ряд A не имеет диаграммы Ньютона.*

Диаграммой Ньютона ряда A называется множество $\delta_A = \{(x, s_x) \in \boldsymbol{R}^{n+1} : x \in Q_\delta : s_x = \inf\limits_{(x, \xi) \in W} \xi\}$.

Если ряд A обладает диаграммой Ньютона, то $s_x \in \boldsymbol{R}$ при $x \in Q_\delta$ и δ_A определено корректно. Заметим еще, что если $L(x_0) \subset W$ при некотором x_0, то $L(x) \subset W$ при любом $x \in Q_\delta$.

Имеют место включения

$$Q \subset Q_\delta \subset \overline{Q}. \tag{2}$$

Как будет видно из нижеследующих примеров, последние включения могут быть строгими или могут превращаться в равенства. Эти факты не учтены в работе [8].

Множество W является замкнутой областью в аффинной оболочке множества W размерности $\leqslant n+1$. При сталкивании с топологическими понятиями, связанными с множествами Q и W, будем считать, что Q и W — подмножества своих аффинных оболочек. Например, если Q — прямая или плоскость в R^n, то $Q = \overline{Q} = \mathring{Q}$, $\partial Q = \varnothing$. Всегда $\mathring{Q} \neq \varnothing$. В обозначениях книги [15] $\mathring{Q} = \mathrm{ri}\, Q$, $\mathring{W} = \mathrm{ri}\, W$.

Примеры. 1. Пусть $K = \{k \in \boldsymbol{Z}_+^n : k_1 = k_2 = \cdots = k_n\}$, $A_k = \exp(-|k|)$. Тогда $Q = \overline{Q} = \{x \in \boldsymbol{R}_+^n : x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$, $\partial Q = \{0\}$, $0 \in \boldsymbol{R}^n$, $\mathring{Q} = \{x \in \widehat{\boldsymbol{R}^n} : x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$, $W = \{(x, \xi) \in \boldsymbol{R}_+^{n+1} : x_1 = x_2 = \cdots = x_n, \xi \geqslant |x|\}$, $\delta_A = \{(x, \xi) \in \boldsymbol{R}_+^{n+1} : x_1 = x_2 = \cdots = x_n, \xi = |x|\}$. В данном примере как Q ($Q_\delta = Q$), так и δ_A вырождаются в полупрямые.

2. $K = \{k \in \boldsymbol{Z}_+^n : k_1 > 0\} \cup \{0\}$, $A_k = c > 0$. В этом случае $Q = \{x \in \boldsymbol{R}_+^n : x_1 > 0\} \cup \{0\}$ $(0 \in \boldsymbol{R}^n)$, $\mathring{Q} = \widehat{\boldsymbol{R}^n}$, $\overline{Q} = \boldsymbol{R}_+^n$, $\delta_A = \{(x, \xi) \in \boldsymbol{R}^{n+1} : x \in \boldsymbol{R}_+^n, \xi = -\ln c\}$. Следовательно, $Q_\delta = \overline{Q}$, $Q_\delta \neq Q$.

3. $K = \boldsymbol{Z}^n$, $A_0 = 1$, $A_k = \exp(-\|k\| - 1)$, если $k \neq 0$. Очевидно, $Q = \overline{Q} = Q_\delta = \boldsymbol{R}^n$, $\delta_A = \{(x, \xi) \in \boldsymbol{R}^{n+1} : x \in \boldsymbol{R}^n, \xi = \|x\|\}$. В данном примере диаграмма δ_A является границей выпуклого конуса, причем на диаграмме δ_A лежит единственная точка представления коэффициентов ряда, именно, точка P_0.

4. $K = \{k \in Z_+^n : k_1 > 0\} \cup \{0\}$, $A_k = \dfrac{1}{k_1! \ldots kn!}$. Теперь $Q_\delta = Q = \{x \in \boldsymbol{R}_+^n : x_1 > 0\} \cup \{0\}$, $\overline{Q} = \boldsymbol{R}_+^n$, а диаграмма δ_A обладает следу-

ющими свойствами: 1) она проходит через точки представления всех коэффициентов данного ряда; 2) $\lim\limits_{x \to x_0} s_x = +\infty$, если $x_0 \in \bar{Q} \setminus Q = \{x \in \boldsymbol{R}_+^n : x_1 = 0\} \setminus \{0\}$.

5. Если K — конечное множество, то диаграмма δ_A существует. Если K — одноточечное множество, то δ_A также одноточечно; если K состоит из двух точек, то δ_A — прямолинейный отрезок; если K состоит из трех точек, то диаграмма δ_A может быть треугольником, прямолинейным отрезком или ломаной, состоящей из двух прямолинейных отрезков.

Введем следующие обозначения: $K_\delta = \boldsymbol{Z}^n \bigcap Q_\delta$, $T_k = \exp(-s_k)$, $k \in K_\delta$. Составим ряд T_A:

$$\sum_{k \in K_\delta} T_k z^k. \tag{3}$$

Очевидно, $T_k > 0$ при $k \in K_\delta$ и $a_k \leqslant T_k$, если $k \in K$. Следовательно, ряд (3) мажорирует ряд (1). Ряд T_A называется *мажорантой Ньютона* ряда A. Нетрудно видеть, что

$$\delta_A = \delta_{T_A}, \; T_A = T_{T_A}. \tag{4}$$

Точки представления коэффициентов ряда A, лежащие на диаграмме δ_A, называются диаграммными точками. Ряд вида (1) называется нормальным рядом, если $K_\delta = K$ и точки представления всех его коэффициентов являются диаграммными точками. Очевидно, ряд T_A является нормальным рядом.

§ 2. Простейшие свойства диаграммы Ньютона

Сначала докажем две простых теоремы существования диаграммы Ньютона.

Теорема 1. *Ряд* (1) *имеет диаграмму Ньютона и, следовательно существует мажорантный ряд (3) тогда и только тогда, когда выполняется условие: существуют* $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$ *и* $\xi_0 \in \boldsymbol{R}$, *такие, что при всех* $k \in K$ *имеют место неравенства*

$$-\ln a_k \geqslant \xi_0 + \langle \alpha, k \rangle. \tag{5}$$

Условие теоремы 1 геометрически означает, что в пространстве $\boldsymbol{R}^{n+1}$ существует гиперплоскость такая, что точка представления произвольного коэффициента ряда (1) лежит на этой гиперплоскости или выше нее.

Доказательство. Пусть ряд (1) обладает диаграммой δ_A. Через каждую точку $S_k = (k, s_k)$ диаграммы δ_A, как граничную точку выпуклого множества, можно провести опорную гиперплоскость множества W_A (называемую в дальнейшем опорной гиперплоскостью диаграммы δ_A) с уравнением $\xi = s_k + \langle \alpha, x - k \rangle$, $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$, или же

$$\xi = \xi_0 + \langle \alpha, x \rangle, \quad \xi_0 = s_k - \langle \alpha, k \rangle. \tag{6}$$

Точка представления любого коэффициента ряда A лежит выше или на этой гиперплоскости, т. е. справедливы неравенства (5).

Наоборот, пусть при некоторых $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$, $\xi_0 \in \boldsymbol{R}$ и всех $k \in K$ имеют место неравенства (5). Тогда множество W_A лежит не ниже гиперплоскости (6) и какая бы ни была вертикальния прямая $L(x)$, верно соотношение $L(x) \subset W_A$. Значит, существует диаграмма Ньютона δ_A.

Теорема доказана.

Введем следующие обозначения. Если $r \in \hat{\boldsymbol{R}}^n$, то через Q_r будем обозначать гиперплоскость с уравнением $\xi = \langle \ln r, x \rangle$. Через Λ_A будем обозначать множество таких точек $r \in \hat{\boldsymbol{R}}^n$, которые обладают следующим свойством: если $(x, s_x) \in \delta_A$ и $(x, \xi_x) \in Q_r$, то $\xi_x < s_x$, как только $\| x \| > R$, где $R = R(r)$ — достаточно большое число. Гиперплоскости Q_r с $r \in \Lambda_A$ будем называть Λ-*плоскостями*. Если ряд A не имеет диаграммы Ньютона, то полагаем $\Lambda_A = \varnothing$.

Теорема 2. *Для существования диаграммы δ_A достаточно выполнения условия: существуют такие $r \in \hat{\boldsymbol{R}}^n$ и $c \in \boldsymbol{R}_+$, что точка представления P_k произвольного коэффициента A_k ряда A с $|k| > c$ лежит выше гиперплоскости Q_r. Это условие является также необходимым, если $K \subset \boldsymbol{Z}_+^n$. Более того, если $K \subset Z_+^n$ и существует диаграмма δ_A, то $\Lambda_A \neq \varnothing$.*

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы 1. В самом деле, если $-\xi_0$ достаточно большое число, то гиперплоскость с уравнением $\xi = \xi_0 + \langle \ln r, \ x \rangle$ удовлетворяет условию теоремы 1.

Пусть $K \subset \boldsymbol{Z}_+^n$ и существует диаграмма Ньютона δ_A. Тогда существует некоторая опорная гиперплоскость диаграммы δ_A, имеющая уравнение $\xi = \xi_0 + \langle \alpha, x \rangle$. Пусть $\eta \in \hat{R}^n$ и $\ln r_0 = \alpha - \eta$. Выберем число R настолько большим, чтобы при $x \in \boldsymbol{R}_+^n$, $\| x \| > R$ имело место неравенство $\langle \eta, \ x \rangle + \xi_0 > 0$. Если $(x, \ s_x) \in \delta_A$, то при $x \in \boldsymbol{R}_+^n$, $\| x \| > R$ справедливы соотношения $s_x \geqslant \langle \alpha, \ x \rangle + \xi_0 = \langle \alpha - \eta, \ x \rangle + \langle \eta, \ x \rangle + \xi_0 > \langle \ln r_0, \ x \rangle$.

Следовательно, $r_0 \in \Lambda_A$, и теорема доказана.

Замечание. Если K — произвольное подмножество $\boldsymbol{Z}^n$, то условие теоремы 2 не является необходимым для существования диаграммы Ньютона. Это показывает пример ряда вида (1), в котором $A_k = e$, $k \in K = \boldsymbol{Z}^n$; $\delta_A = \{(x, \ \xi) \in \boldsymbol{R}^{n+1} : x \in \boldsymbol{R}^n, \ \ \xi = -1\}$.

Лемма 1. *Для произвольного ряда A множество Λ_A логарифмически выпукло.*

Доказательство. Пусть $\Lambda_A \neq \varnothing$ и r, $\rho \in \Lambda_A$. Тогда существует такое $R > 0$, что при $\| x \| > R$ и $x \in Q_\delta$ $s_x > \langle \ln r, \ x \rangle$, $s_x > \langle \ln \rho, \ x \rangle$, где $(x, \ s_x)$ — точка диаграммы δ_A. Из этих неравенств получаем $s_x > \langle x, \ \tau \ln r + (1 - \tau) \ln \rho \rangle$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, $\| x \| > R$. Следовательно, $(r_1^\tau \rho_1^{1-\tau}, \ \ldots, \ r_n^\tau \rho_n^{1-\tau}) \in \Lambda_A$.

Лемма 1 доказана.

Определение. *Подмножество X множества $\hat{\boldsymbol{R}}^n$ называется полным, если вместе с точкой x^0 множество X содержит любую точку x, удовлетворяющую условию $x_1 \leqslant x_1^0, \ldots, x_n \leqslant x_n^0$.*

Следующая лемма является непосредственным следствием определения множества Λ_A и леммы 1.

Лемма 2. *Если ряд (1) удовлетворяет условию $K \subset \boldsymbol{Z}_+^n$, то множество Λ_A полно и логарифмически выпукло.*

Диаграмма Ньютона в одномерном случае ($n=1$) имеет довольно простой вид: она является выпуклой ломаной линией. Как показывают примеры § 1, при $n>1$ диаграмма Ньютона имеет более сложную структуру (см. особенно пример 3 из § 1). Тем не менее, в многомерном случае также можно установить некоторые простые свойства диаграммы.

Согласно ранее сказанному опорную гиперплоскость множества W_A называем опорной гиперплоскостью диаграммы δ_A. Но существуют различные определения опорной гиперплоскости H выпуклого множества (см., например, [15, с. 115] и [16. с. 17]). Мы следуем работе [16], т. е. не исключаем возможности равенства $H \cap W_A = \varnothing$. Например, координатные оси являются опорными прямыми множества $\{(x, y) \in \hat{\boldsymbol{R}}^2 : xy \geqslant 1\}$.

Лемма 3. *Пусть $\Lambda_A \neq \varnothing$ и $r \in \Lambda_A$. Тогда существует опорная гиперплоскость диаграммы δ_A, имеющая уравнение*

$$\xi = \xi_r + \langle \ln r, x\rangle \quad (\xi_r \in \boldsymbol{R}). \tag{7}$$

Доказательство. Согласно определению Λ-плоскости Q_r существует такое число $c = c(r) \in \boldsymbol{R}_+$, что при $k \in K$, $|k| > c$ справедливы неравенства $-\ln a_k > \langle k, \ln r\rangle$. Выбирая $\xi_0 \in \boldsymbol{R}_-$ так, чтобы выполнялось неравенство $\xi_0 \leqslant \min\{-\ln a_k - \langle \ln r, k\rangle : k \in K, |k| \leqslant c\}$, мы получаем неравенства $-\ln a_k \geqslant \xi_0 + \langle k, \ln r\rangle$, $k \in K$.

Итак, множество W_A вместе с точками представления всех коэффициентов ряда (1) лежат в полупространстве $\{(x, \xi) \in \boldsymbol{R}^{n+1} : x \in \boldsymbol{R}^n, \xi > \xi_0 + \langle \ln r, x\rangle\}$. Следовательно, существует опорная гиперплоскость диаграммы δ_A, которая параллельна границе этого полупространства. Ее уравнение, очевидно, имеет вид (7). Лемма 3 доказана.

Через $H_A(r)$ будем обозначать в дальнейшем опорную гиперплоскость диаграммы δ_A с уравнением (7), а через Λ_A^* — множество всех $r \in \hat{\boldsymbol{R}}^n$, для которых $H_A(r)$ существует. Нетрудно доказать включения (первое утверждается леммой 3):

$$\Lambda_A \subset \Lambda_A^* \subset \overline{\Lambda}_A \quad (\Lambda_A \neq \varnothing). \tag{8}$$

Лемма 4. *В пространстве $\boldsymbol{R}^n$ пусть $\mathring{\Lambda}_A \neq \varnothing$ и $r \in \mathring{\Lambda}_A$. Любая гиперплоскость H с уравнением $\xi = \xi_0 + \langle \ln r, x\rangle$ обладает следующим свойством: если $(x, s_x) \in \delta_A$ и $(x, \xi_x) \in H$, то*

$\xi_x < s_x$, *как только* $\|x\| > R$, *где* $R = R(H)$ — *достаточно большое число*.

Доказательство. Предположим, что некоторая гиперплоскость H не обладает требуемым свойством. Тогда существует последовательность $\{x^{(m)}\}$, такая, что $|x^{(m)}| \to \infty$ при $m \to \infty$, последовательности координат $\{x_i^{(m)}\}$, $i = 1, \dots, n$ сохраняют знак, и для точек $(x^{(m)}, s^{(m)}) \in \delta_A$, $(x^{(m)}, \xi^{(m)}) \in H$ справедливы неравенства

$$s^{(m)} \leqslant \xi^{(m)} = \xi_0 + \langle \ln r, x^{(m)} \rangle, \quad m = 1, 2, \dots \tag{9}$$

Определим числа ε_i условиями

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, \text{ если } x_i^{(m)} \geqslant 0; \\ -1, \text{ если } x_i^{(m)} < 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Пусть $q > 1$ и точка r' имеет координаты $r'_i = r_i q^{\varepsilon_i}$, $i = 1, \dots, n$. Если q достаточно близко к 1, то $r' \in \mathring{\Lambda}_A$. Следовательно, существует такое $R \in \boldsymbol{R}_+$, что для всех точек $(x, s_x) \in \delta_A$ с $\|x\| > R$ верны неравенства $s_x > \langle \ln r', x \rangle$ и, в частности,

$$s^{(m)} > \langle \ln r', x^{(m)} \rangle = \langle \ln r, x^{(m)} \rangle + |x^{(m)}| \ln q, \quad m \geqslant m_0. \tag{10}$$

Сравнивая соотношения (9) и (10), приходим к неравенствам $\xi_0 \geqslant |x^{(m)}| \ln q$, $m = m_0, m_0 + 1, \dots$. Но при достаточно больших m эти неравенства не имеют места. Лемма 4 доказана.

Напомним некоторые понятия, связанные с полиэдральными множествами [15]. *Полиэдральное множество* является пересечением конечного числа замкнутых полупространств. Ограниченное полиэдральное множество называется *выпуклым многогранником*. Его можно также определить, как выпуклую оболочку конечного числа точек пространства $\boldsymbol{R}^n$. Мы считаем известными понятия *размерности*, *вершины*, *p-мерной грани* полиэдрального множества. Считаем, что p-мерное полиэдральное множество является p-мерной гранью самого себя и пустое множество есть -1-мерный многогранник (открытый и замкнутый). При сталкивании с топологическими понятиями предполагаем, что полиэдральное множество является подмножеством своей аффинной оболочки. Согласно этому *p-мерным открытым множеством* называется полиэдральное множество без своих граней размерности меньше p. В частности, 0-мерное полиэдральное множество (т. е. точка) является открытым (и одновременно замкнутым) многогранником.

Обозначим через S_ρ опорную гиперплоскость p-мерного полиэдрального множества Π с уравнением

$$\langle \rho, x \rangle = c_\rho, \quad \rho \in \boldsymbol{R}^p, \quad x \in \boldsymbol{R}^p. \tag{11}$$

Лемма 5. *Пусть* Π — *полиэдральное множество размерности* p *в пространстве* $\boldsymbol{R}^p$ $(p \geqslant 1)$ *и* Γ — *его* q-*мерная грань* $(0 \leqslant q \leqslant p)$; λ — *произвольная точка* $\boldsymbol{R}^p$, *но при* $q < p$ *имеет* *место равенство* $\lambda = x_0 - x_1$, *где* $x_0 \in \Gamma$, $x_1 \in \Pi \setminus \Gamma$. *Тогда множество* $M_\Gamma = \{\rho \in \boldsymbol{R}^p : \Pi \cap S_\rho = \Gamma, \ \langle \rho, \ \lambda \rangle = 1\}$ *является* $(p - q - 1)$*-мерным открытым полиэдральным множеством. Если, кроме того,* $x_1 \in \mathring{\Pi}$, *то* M_Γ — $(p - q - 1)$*-мерный открытый выпуклый многогранник.*

Доказательство. Если $q = p$, то $\Gamma = \Pi$ и $M_\Gamma = \varnothing$ — (-1)-мерный многогранник. Если $q = p - 1$, то имеется единственная гиперплоскость S_ρ, такая, что $\Pi \cap S_\rho = \Gamma$, $\langle \rho, \lambda \rangle = 1$, т. е. M_Γ — одноточечное множество.

Пусть $0 \leqslant q \leqslant p - 2$ и $\Pi_1, \ldots, \Pi_s$ — всевозможные $(p-1)$-мерные грани многогранника Π, содержащие грань Γ. Обозначим через Q_i гиперплоскость, содержащую грань Π_i, $i = 1, \ldots, s$. Множество $\{1, \ldots, s\}$ можно разбить на два подмножества: $J_1 = \{i \in \{1, \ldots, s\} : x_i \overline{\in} \Pi_i\} \neq \varnothing$, $J_2 = \{1, \ldots, s\} \setminus J_1$. Если $x_1 \in \mathring{\Pi}$, то $J_2 = \varnothing$. Запишем уравнение гиперплоскости Q_i в виде

$$\langle \rho^{(i)}, x \rangle = c_i, \quad \rho^{(i)} \in \boldsymbol{R}^p, \ i = 1, \ldots, s, \tag{12}$$

таком, что $\langle \rho^{(i)}, \lambda \rangle = 1$ и, кроме того, множество Π лежит в пересечении B полупространств $B_i = \{x \in \boldsymbol{R}^p : \langle \rho^{(i)}, x \rangle \leqslant c_i\}$, $i = 1, \ldots, s$, если $i \in J_1$. Очевидно, $\langle \rho^{(i)}, \lambda \rangle = 0$, когда $i \in J_2$.

Какова бы ни была опорная гиперплоскость S_ρ полиэдрального множества Π, равенство $S_\rho \cap \Pi = \Gamma$ имеет место тогда и только тогда, когда $S_\rho \cap B = \Gamma$. Следовательно, $\rho \in M_\Gamma$ тогда и только тогда, когда $\rho_j = q_1 \rho_j^{(1)} + \cdots + q_s \rho_j^{(s)}$, $j = 1, \ldots, p$, $\langle \rho, \lambda \rangle = 1$, где $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_p)$, $\rho^{(i)} = (\rho_1^{(i)}, \ldots, \rho_p^{(i)})$, $q_i > 0$, $i = 1, \ldots, s$.

Условие $\langle \rho, \lambda \rangle = 1$ накладывает на числа $q_1, \ldots, q_s$ следующее ограничение: $1 = \sum_{i=1}^{s} q_i \langle \rho^{(i)}, \lambda \rangle = \sum_{i \in J_1} q_i$. Итак, множество M_Γ состоит из всех точек вида $\rho = q_1 \rho^{(1)} + \cdots + q_s \rho^{(s)}$, $\sum_{i \in J_1} q_i = 1$, $q_i > 0$, $i = 1, \ldots, s$.

Как известно [15, с. 188], такое множество является открытым полиэдральным множеством; а если, кроме того, $\boldsymbol{I}_1 = \{1, \ldots, s\}$, то это открытый выпуклый многогранник. Так как $\boldsymbol{I}_1 \neq \varnothing$ и ранг системы уравнений (12) равен $p - q$, то размерность множества M_Γ равна $p - q - 1$.

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть* Π — p*-мерное полиэдральное множество в пространстве* $\boldsymbol{R}^n$ $(1 \leqslant p \leqslant n)$ *и* Γ — *его* q*-мерная грань* $(0 \leqslant q < p)$. *Если* $x_0 \in \Gamma$, $x_1 \in \Pi \setminus \Gamma$, $\lambda = x_0 - x_1$, *то множество*

$$M_\Gamma = \{\rho \in \boldsymbol{R}^n : \Pi \cap S_\rho = \Gamma, \ \langle \rho, \lambda \rangle = 1\} \tag{13}$$

является $(n - q - 1)$*-мерным открытым полиэдральным множеством.*

Доказательство. В силу леммы 5 можем предположить, что $p < n$. Очевидно, множество M_Γ инвариантно относительно параллельного переноса системы координат. Следовательно, можно считать, что Π лежит в p-мерном подпространстве R_p пространства $\boldsymbol{R}^n$. Линейным ортогональным преобразованием $L: x \to y$ отобразим R_p на подпространство $\boldsymbol{R}^p$ переменных $y_1, \ldots, y_p$. Обозначим через $S_{\rho'}$ опорную гиперплоскость (размерности $p-1$) полиэдрального множества $L\Pi$ в пространстве $\boldsymbol{R}^p$. Тогда в силу леммы 5 при $\lambda' = (\lambda_1', \ldots, \lambda_p')$ $(L\lambda = (\lambda_1', \ldots, \lambda_p', 0, \ldots, 0))$ множество $M_\Gamma' = \{\rho' \in \boldsymbol{R}^p : (L\Pi) \cap S_{\rho'} = L\Gamma, \langle \rho', \lambda' \rangle = 1\}$ является $(p-q-1)$-мерным открытым полиэдральным множеством.

Обозначим через $\widetilde{S}_\rho$ опорную гиперплоскость множества $L\Pi$ в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ переменных $y_1, \ldots, y_n$.
Тогда

$$\widetilde{M}_\Gamma \overset{\mathrm{df}}{=} \{\rho \in \boldsymbol{R}^n : (L\Pi) \cap \widetilde{S}_\rho = L\Gamma, \langle \rho, L\lambda \rangle = 1\} =$$
$$= \{\rho \in \boldsymbol{R}^n : \rho = (\rho', \tau), \rho' \in M_\Gamma', \tau \in \boldsymbol{R}^{n-p}\}.$$

Так как $\langle \rho, y \rangle = \langle \rho, Lx \rangle = \langle L^{-1}\rho, x \rangle$, $1 = \langle \rho, L\lambda \rangle = \langle L^{-1}\rho, \lambda \rangle$, то справедливо равенство $M_\Gamma = L^{-1}\widetilde{M}_\Gamma$. Но множество $\widetilde{M}_\Gamma$ является $(n-q-1)$-мерным открытым полиэдральным множеством. Таким же множеством будет его образ при линейном ортогональном преобразовании L^{-1}.

Дополнение к лемме 6. Если Π — 0-мерный многогранник, т. е. точка пространства $\boldsymbol{R}^n$ и $\Gamma = \Pi$, то при любом $\lambda \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$ множество M_Γ, определенное равенством (13), является $(n-1)$-мерной плоскостью.

Лемма 7. *Пусть* $\mathring{\Lambda}_A \neq \varnothing$ и U — *некоторый* n-*мерный выпуклый многогранник, лежащий в* $\ln(\mathring{\Lambda}_A)$. *Тогда существует конечное подмножество* K_U *множества* K, *такое, что полиэдральное множество* Π_U, *совпадающее с выпуклой оболочкой множества точек лучей*

$$V_k = \{(x, \xi) \in \boldsymbol{R}^{n+1} : x = k, \xi \geqslant -\ln a_k\}, \ k \in K_U, \tag{14}$$

обладает следующими свойствами:

1) *при любом* $\ln r \in U$ *опорная гиперплоскость* $H_A(r)$ *диаграммы* δ_A *является также опорной гиперплоскостью множества* Π_U;

2) *при любом* $\ln r \in U$ *имеет место равенство*

$$\delta_A \cap H_A(r) = \Pi_U \cap H_A(r); \tag{15}$$

3) *множество* $\delta_A \cap H_A(r)$ $(\ln r \in U)$ *является выпуклым многогранником, вершины которого входят в множество* $\{P_k, k \in K_U\}$.

Доказательство. Пусть K_U — множество всех точек $k \in K$, для которых $P_k \in H_A(r)$ хотя бы при одном $\ln r \in U$. Докажем, что K_U — конечное множество. Предполагая противное, можем выбрать такую последовательность $\{k^{(m)}\}$ точек $k^{(m)} \in K_U$, что $P_{k^{(m)}} \in H_A(r^{(m)})$ $(\ln r^{(m)} \in U)$, $r^{(m)} \to r^0 \in \mathring{\Lambda}_A$ при $m \to \infty$ и последовательности $\{k_i^{(m)}\}$ сохраняют знак, $i=1, \ldots, n$. Выберем ε_i равным 1 или -1 в зависимости от того, $k_i^{(m)} \geqslant 0$ или $k_i^{(m)} < 0$, $i=1, \ldots, n$. Если $r_i' = r_i^0 q^{\varepsilon_i}$, $i=1, \ldots, n$ и $q\,(q>1)$ достаточно близко к 1, то $r' = (r_1', \ldots, r_n') \in \overset{\circ}{\Lambda}_A$. Пусть $k_0 \in K$. Тогда уравнение гиперплоскости $H_A(r^{(m)})$ можно записать в виде $\xi = \xi^{(m)} + \langle x, \ln r^{(m)} \rangle$, где $\xi^{(m)} \leqslant -\ln a_{k_0} - \langle k_0, \ln r^{(m)} \rangle$, $m=1, 2 \ldots$ Следовательно, условия $P_{k^{(m)}} \in H_A(r^{(m)})$ приводят к неравенствам

$$-\ln a_{k^{(m)}} \leqslant M + \langle k^{(m)}, \ln r^{(m)} \rangle, \quad M = \text{const}, \; m=1, 2, \ldots \tag{16}$$

С другой стороны, так как $Q_{r'}$ — Λ-плоскость, то при $m > m_0$ справедливы неравенства

$$-\ln a_{k^{(m)}} > \langle k^{(m)}, \ln r' \rangle = |k^{(m)}| \ln q + \langle k^{(m)}, \ln r^0 \rangle. \tag{17}$$

Очевидно, неравенства (16) и (17) противоречат друг другу при достаточно больших m. Итак, множество K_U конечно.

Пусть Π_U — выпуклая оболочка множества точек, лежащих на лучах (14). Очевидно, Π_U является полиэдральным множеством, удовлетворяющим требуемым утверждениям. В частности, множество $\delta_A \cap H_A(r)$ $(\ln r \in U)$ совпадает с выпуклой оболочкой тех точек из P_k, $k \in K_U$, которые лежат на гиперплоскости $H_A(r)$.

Лемма 7 доказана.

Определение. *Выпуклые многогранники* $\delta_A \cap H_A(r)$ $(\ln r \in \Lambda_A)$ *называются гранями диаграммы* δ_A. *При этом 0-мерная грань называется вершиной, а 1-мерная грань — ребром диаграммы* δ_A. *Точнее, вершиной диаграммы называем единственную точку одноточечного множества* $\delta_A \cap H_A(r)$.

Нетрудно доказать, что каждая вершина диаграммы δ_A является точкой представления некоторого коэффициента ряда A. Следовательно, множество вершин диаграммы δ_A конечно или счетно.

Докажем теперь основную теорему этого параграфа.

Теорема 3. *Пусть для ряда* (1) $\overset{\circ}{\Lambda}_A \neq \varnothing$. *Если* $r \in \overset{\circ}{\Lambda}_A$, *то множество* $\delta_A \cap H_A(r)$ *является* p_r-*мерным выпуклым многогранником* $\Pi_A(r)$ $(0 \leqslant p_r \leqslant n)$, *вершинами которого являются точки представления коэффициентов ряда* (1).

Любой q-*мерной грани* Γ *выпуклого многогранника* $\Pi_A(r)$ $(0 \leqslant q \leqslant p_r)$ *соответствует выпуклое множество* $\Delta_\Gamma \subset \ln(\overset{\circ}{\Lambda}_A)$, *которое обладает следующими свойствами:*

$$1) \;\; \Delta_\Gamma = \{\ln r \in \ln(\overset{\circ}{\Lambda}_A) : \delta_A \cap H_A(r) = \Gamma\}; \tag{18}$$

2) *какой бы ни был открытый* n-*мерный выпуклый многогранник* $U \subset \ln(\overset{\circ}{\Lambda}_A)$, *множество* $\Delta_\Gamma \cap U$ *либо пусто, либо является открытым* $(n-q)$-*мерным выпуклым многогранником* $(0 \leqslant q \leqslant p_r \leqslant n)$.

Доказательство. Первое предложение доказано в третьей части леммы 7. Выберем множество $K_U \subset K$ так, что $\Pi_A(r)$ является выпуклой оболочкой множества точек P_k с $k \in K_U$. Пусть Π_U — выпуклая оболочка множества точек лучей (14). Определим множество Δ_Γ равенством (18). Тогда в силу равенства (15) имеем

$$\begin{aligned}\Delta_\Gamma \cap U = \{\ln r \in U : \delta_A \cap H_A(r) = \Gamma\} = \\ = \{\ln r \in U : \Pi_U \cap H_A(r) = \Gamma\}.\end{aligned} \qquad (19)$$

Ясно, что Γ является q-мерной гранью не только многогранника $\Pi_A(r)$, но и множества Π_A. Пусть $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, x_{n+1}^0)$ — произвольная точка из Γ. Положим $x' = (x_1^0, \ldots, x_n^0, x_{n+1}^0 + 1)$. Очевидно, $x' \in \Pi_U$, но $x' \overline{\in} \Gamma$. Действительно, при условии $x' \in \Gamma$ множество Γ содержало бы весь луч, выходящий из точки x^0 через x'. Но это противоречит ограниченности множества Γ. Итак, к полиэдральному множеству Π_U можно применять лемму 6 с $\lambda = x^0 - x' = (0, \ldots 0, -1)$. Множество M_Γ, определенное равенством (13) (с $\Pi = \Pi_U$), является $(n-q)$-мерным открытым полиэдральным множеством. Уравнение (11) гиперплоскости S_ρ в данном случае имеет вид $\rho_1 x_1 + \cdots + \rho_n x_n + \rho_{n+1}\xi = c_\rho$. При выполнении условия $\langle \rho, \lambda \rangle = -\rho_{n+1} = 1$ его можно переписать так:

$$\xi = \rho_1 x_1 + \cdots + \rho_n x_n - c_\rho. \qquad (20)$$

Пусть $\rho \in M_\Gamma$ и $\ln r = (\rho_1, \ldots, \rho_n) \in U$. В силу первого утверждения леммы 7 опорная гиперплоскость $H_A(r)$ диаграммы δ_A является также опорной гиперплоскостью множества Π_U, и уравнение (20) определяет гиперплоскость $H_A(r)$, т. е.

$$S_\rho = H_A(r) \quad (\rho_1 = \ln r_1, \ldots, \rho_n = \ln r_n). \qquad (21)$$

Так как $\rho_{n+1} = -1$ для любой точки $\rho \in M_\Gamma$, то $M_\Gamma = N_\Gamma \times \{-1\}$, где $N_\Gamma = \{(\rho_1, \ldots, \rho_n) : \rho = (\rho_1, \ldots, \rho_{n+1}) \in M_\Gamma\}$. Множество N_Γ, как и M_Γ, является $(n-q)$-мерным открытым полиэдральным множеством. Из соотношений (19) и (21) получаем равенство $\Delta_\Gamma \cap U = N_\Gamma \cap U$ $(\rho_1 = \ln r_1, \ldots, \rho_n = \ln r_n)$, откуда немедленно следует последнее утверждение теоремы.

Наконец, множество $\ln(\mathring{\Lambda}_A)$, которое выпукло в силу леммы 1, можно исчерпать возрастающей последовательностью открытых выпуклых многогранников U_m. В силу доказанного множество $\Delta_\Gamma \cap U_m$ выпукло при любом $m = 1, 2, \ldots$. Следовательно, множество Δ_Γ также выпукло.

Теорема 3 доказана.

Замечание. В общем случае, как показывают нижеследующие примеры, множество Δ_Γ не является полиэдральным множеством.

Примеры 1. Рассмотрим пример 3 из § 1: $\delta_A = \{(x, \xi) \in \boldsymbol{R}^{n+1} : x \in \boldsymbol{R}^n, \xi = \|x\|\}$. Нетрудно проверить, что $\ln(\Lambda_A) = \{\ln r \in R^n : \|\ln r\| = 1\}$. При любом $r \in \Lambda_A$ имеет место равенство $\delta_A \cap H_A(r) = \{P_0\} = \{0\}$, следовательно, $\Pi_A(r)$ — 0-мерный многогранник. Если $\Gamma = \Pi_A(r)$, то $\Delta_\Gamma = \ln(\mathring{\Lambda}_A) = \{\ln r \in \boldsymbol{R}^n : \|\ln r\| < 1\}$. Множество Δ_Γ, как единичный открытый шар, выпукло, но не является полиэдральным множеством.

2. Рассмотрим ряд (1), в котором $K = \{(k_1, k_2) \in \boldsymbol{Z}_+^2 : k_1 = l^2, k_2 = l, l = 0, 1, 2, \ldots\}$; $A_0 = 1$, $A_k = l^{-l^2}$, $k = (l^2, l)$, $l = 1, 2, \ldots$ Диаграмма δ_A является объединением замкнутых треугольников с вершинами $\{(0, 0), (l^2, l), ((l+1)^2, l+1)\}$, $l = 1, 2, \ldots$ Хотя $\Lambda_A = \hat{\boldsymbol{R}}^2$, тем не менее Δ_Γ при $\Gamma = \{P_0\} = \{0\}$ не является полиэдральным множеством, а совпадает с пересечением бесконечного числа полуплоскостей. Заметим, что в данном примере $Q_\delta \neq \mathring{Q}$, и $Q_\delta \neq \overline{Q}$. Это замечание существенно, так как нетрудно доказать следующее утверждение.

Предложение. *Пусть $n = 2$ и $\Lambda_A = \hat{\boldsymbol{R}}^2$. Следующие утверждения равносильны:*

1) *каждая вершина лежит на конечном числе ребер диаграммы δ_A;*

2) $Q_\delta = \mathring{Q}$ *или* $Q_\delta = \overline{Q}$;

3) *для каждой q-мерной грани Γ диаграммы δ_A $(0 \leqslant q \leqslant 2)$ множество Δ_Γ, определенное равенством (18), является открытым полиэдральным множеством.*

§ 3. Область сходимости рядов

Под областью сходимости ряда (1) понимаем, как обычно, наибольшее открытое множество в пространстве $\overline{\boldsymbol{C}}^n$, в котором этот ряд сходится абсолютно. В дальнейшем область сходимости ряда A будем обозначать через D_A. Наряду с D_A будем рассматривать множество $\hat{D}_A = D_A \cap \hat{\boldsymbol{C}}^n$. Очевидно, зная D_A, легко построить $\hat{D}_A$. Наоборот, если известно $\hat{D}_A$, то область D_A строится следующим образом: если существует хотя бы одна точка $k \in K$, для которой $k_i < 0$ $(k_i > 0)$, то из замыкания множества $\hat{D}_A$ в топологическом пространстве $\overline{C}_n$ выбрасываем все те точки z, для которых $z_i = 0$ $(z_i = \infty)$, $i = 1, \ldots, n$. Внутренность так построенного множества совпадает с D_A. Итак, область D_A однозначно определяется множеством $\hat{D}_A$ и расположением множества K в пространстве R^n.

Теорема 4. *Степенной ряд A и его мажорантный ряд T_A имеют одну и ту же (возможно, пустую) область сходимости $D = D_A = D_{T_A}$, удовлетворяющую условию $\hat{D} = G_A$, где $G_A = \{z \in C^n : (|z_1|, \ldots, |z_n|) \in \mathring{\Lambda}_A \subset \hat{\boldsymbol{R}}^n\}$,*

Доказательство. Прежде всего докажем, что из условия $\hat{D}_A = \hat{D}_{T_A}$ следует равенство $D_A = D_{T_A}$.

Каждая координатная гиперплоскость $x_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ делит пространство $\boldsymbol{R}^n$ на два выпуклых множества, именно, полупространства. Если множество K лежит в одном из этих замкнутых полупространств, то там же лежат множества Q и K_δ. Обратное утверждение, конечно, также верно. Поэтому множество K содержит точку k с координатой $k_j > 0$ ($k_j < 0$) тогда и только тогда, когда точку с подобным свойством содержит множество K_δ. В силу сказанного в начале этого параграфа следует требуемое утверждение.

Известно, что точка $z \in \hat{C}^n$ принадлежит области сходимости ряда (1) тогда и только тогда, когда имеет место неравенство $\overline{\lim\limits_{|k|\to\infty,\, k\in K}} \frac{1}{|k|} \ln |A_k z^k| < 0$ (K бесконечно).

Следовательно, для доказательства равенств $G_A = \hat{D}_A = \hat{D}_{T_A}$ достаточно получить следующие неравенства:

$$\overline{\lim_{|k|\to\infty,\, k\in K_\delta}} \frac{1}{|k|} \ln (T_k r^k) < 0, \ r \in \mathring{\Lambda}_A, \tag{22}$$

$$\overline{\lim_{|k|\to\infty,\, k\in K}} \frac{1}{|k|} \ln (a_k r^k) \geqslant 0, \ r \in \mathring{R}^n \setminus \Lambda_A. \tag{23}$$

При этом мы учитываем следующее обстоятельство: множество $\mathring{\Lambda}_A$ совпадает с внутренностью $\overline{\Lambda}_A$, а если $\mathring{\Lambda}_A \neq \varnothing$, то множества Λ_A и $\mathring{\Lambda}_A$ имеют одинаковое замыкание (см. лемму 1 и теорему 1.3 из [15]).

Пусть $P_k = (k, s_k)$ — точка представления коэффициента A_k ряда A (или коэффициента T_k ряда T_A). Проведем через точку P_k гиперплоскость H с уравнением $\xi = s_k + \langle x - k, \ln r \rangle$, $r \in \Lambda_A$. Обозначим через $C = (0, 0, \ldots, 0, -c_k)$ точку пересечения гиперплоскости H с координатной осью $O\xi$. Число $c_k = c_k(r)$ будем называть r-логарифмическим следом точки P_k. Справедливы равенства

$$c_k = -s_k + \ln r^k = -s_k + \langle k, \ln r \rangle, \tag{24}$$

$$c_k = \ln (a_k r^k), \text{ если } s_k = -\ln a_k, \tag{25}$$

$$c_k = \ln (T_k r^k), \text{ если } s_k = -\ln T_k. \tag{26}$$

Предположим теперь, что неравенство (22) не имеет места. Тогда для некоторой точки $r \in \mathring{\Lambda}_A$ существует последовательность точек $k^{(m)} \in K_\delta$, такая, что $|k^{(m)}| \to \infty$ при $m \to \infty$ и

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{|k^{(m)}|} \ln (T_{k^{(m)}} r^{k^{(m)}}) \geqslant 0. \tag{27}$$

Выбирая, если нужно, подпоследовательность из последовательности $\{k^{(m)}\}$, можем добиться того, что последовательность i-х координат точек $k^{(m)}$ знакопостоянна ($i = 1, \ldots, n$). Пусть ε_i принимает значение 1 или —1 в зависимости от того, какие из серий неравенств выполняются: $k_i^{(m)} \geqslant 0$ или $k_i^{(m)} < 0$, $m = 1, 2, \ldots$ $(i = 1, \ldots, n)$. Пусть $q > 1$ такое число, что точка r' с координатами $r'_i = r_i q^{\varepsilon_i}$, $i = 1, \ldots, n$ принадлежит $\mathring{\Lambda}_A$. Так как гиперплоскость $Q_{r'}$ есть Λ-плоскость, то все точки $P_k = (k, -\ln T_k)$ диаграммы δ_A, удовлетворяющие условию $|k| > R$ $(k \in K_\delta$, R — достаточно большое), лежат над гиперплоскостью $Q_{r'}$, которая, в свою очередь, проходит через начало координат. Поэтому r'-логарифмический след любой точки P_k с $|k| > R$ неположителен. В силу равенств 26

$$\varlimsup_{|k| \to \infty,\ k \in K_\delta} \frac{1}{|k|} \ln (T_k (r')^k) \leqslant 0.$$

Следовательно, вопреки неравенству (27) можем написать соотношения $\lim\limits_{m \to \infty} \frac{1}{|k^{(m)}|} \ln (T_{k^{(m)}} r^{k^{(m)}}) = \varlimsup\limits_{m \to \infty} \frac{1}{|k^{(m)}|} \ln (T_{k^{(m)}} (r')^{k^{(m)}}) - \ln q \leqslant -\ln q < 0$.

Тем самым доказано неравенство (22). Пусть $r \in \hat{\boldsymbol{R}}^n \setminus \Lambda_A$. Тогда существует бесконечное множество K_0 точек $k \in K$, таких, что точки представления P_k, $k \in K_0$ лежат на гиперплоскости Q_r или ниже ее. Следовательно, r-логарифмический след указанных точек неотрицателен и, учитывая равенства (25), можем написать неравенства $\varlimsup\limits_{|k| \to \infty,\ k \in K} \frac{1}{|k|} \ln (a_k r^k) \geqslant \varlimsup\limits_{|k| \to \infty,\ k \in K_0} \frac{1}{|k|} \ln (a_k r^k) \geqslant 0$.

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Для существования диаграммы δ_A достаточно, чтобы ряд (1) имел непустую область сходимости. Это условие является также необходимым, когда $K \subset \boldsymbol{Z}_+^n$.*

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы 4.

Пусть $K \subset \boldsymbol{Z}_+^n$. Тогда в силу теоремы 2 $\Lambda_A \neq \varnothing$. Из леммы 2 следует также соотношение $\mathring{\Lambda}_A \neq \varnothing$. Согласно теореме 4 ряд (1) имеет непустую область сходимости D_A, для которой $D_A = G_A \neq \varnothing$, что и требовалось доказать.

Известно, что ряд (1) может сходиться также в точках, лежащих вне области сходимости. К области сходимости D_A ряда (1) могут примыкать, например, некоторые множества меньшей размерности. Для простоты будем рассматривать случай степенного ряда с $K \subset \boldsymbol{Z}_+^n$.

Обозначим через $D_{j_1 \ldots j_m}$ пересечение области D_A с плоскостью $S_{j_1 \ldots j_m} = \{z \in \boldsymbol{C}^n : z_{j_1} = \cdots = z_{j_m} = 0\}$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leqslant n$, $1 \leqslant m < n$. Множество $D_{j_1 \ldots j_m}$ является областью в пространстве $\boldsymbol{C}^{n-m}$ переменных $z_{i_1}, \ldots, z_{i_{n-m}}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-m} \leqslant n$, $i_s \neq j_t$, если $1 \leqslant s \leqslant n-m$, $1 \leqslant t \leqslant m$. Известно, что ряд (1) может сходиться в плоскости $S_{j_1 \ldots j_m}$ в большей области, чем $D_{j_1 \ldots j_m}$. Тем не менее его мажоранта Ньютона расходится в любой точке $z \in S_{j_1 \ldots j_m}$, лежащей вне $\overline{D}_{j_1 \ldots j_m}$. В этом заключается утверждение следующей теоремы.

Теорема 6. *Пусть ряд (1) с* $K \subset \boldsymbol{Z}_+^n$ *имеет непустую область сходимости* D_A. *Тогда область сходимости* $(n-m)$*-кратного ряда* $\tilde{T}_A$*

$$\sum_{k \in K} T_k z^k \mid_{z_{j_1} = \ldots = z_{j_m} = 0}, \tag{28}$$

полученного из ряда (3) заменой $z_{j_1}, \ldots, z_{j_m}$ *нулями, совпадает с областью* $D_{j_1 \ldots j_m} \subset \boldsymbol{C}^{n-m}$.

Доказательство. Для ряда $\tilde{T}_A$ определяем множество $\Lambda_{\tilde{T}_A} \subset R^{n-m}$ аналогично тому, как это было сделано для ряда (1). Если ряд (28) не имеет отличных от нуля членов, то полагаем $\Lambda_{\tilde{T}_A} = \hat{R}^{n-m}$. В силу теоремы 4, очевидно, достаточно доказать равенство $\overline{\Lambda}_{\tilde{T}_A} = \{(r_{i_1}, \ldots, r_{i_{n-m}}) \in \boldsymbol{R}_+^{n-m} : r_{j_1} = \cdots r_{j_m} = 0 \Rightarrow (r_1, \ldots, r_n) \in \overline{\Lambda}_A\} \overset{\mathrm{df}}{=} \Lambda_0$. Здесь замыкание $\overline{\Lambda}_A$ берется в пространстве $\boldsymbol{R}^n$.

Включение $\Lambda_0 \subset \overline{\Lambda}_{\tilde{T}_A}$ очевидно. Докажем обратное включение в предположении, что $\Lambda_0 \neq \boldsymbol{R}_+^{n-m}$. Не ограничивая общности, можем считать, что $i_s = s$, $j_t = n - m + t$, $1 \leqslant s \leqslant n - m$, $1 \leqslant t \leqslant m$. Пусть $(r_1^0, \ldots, r_{n-m}^0)$ — внутренняя точка (относительно $\boldsymbol{R}^{n-m}$) множества $\overline{\Lambda}_{\tilde{T}_A}$. Тогда в силу леммы 3 существует такое число ξ_0, что уравнение

$$\xi = \xi_0 + x_1 \ln r_1^0 + \cdots + x_{n-m} \ln r_{n-m}^0 \tag{29}$$

задает опорную гиперплоскость диаграммы $\delta_{\tilde{T}_A}$ ряда (28). Так как $\delta_{\tilde{T}_A} = \delta_A \bigcap S_{j_1 \ldots j_m}$, то плоскость (29) является либо пересечением плоскости $S_{j_1 \ldots j_m}$ с некоторой опорной к диаграмме δ_A гиперплоскостью $\xi = \xi_0 + x_1 \ln r_1^0 + \cdots + x_{n-m} \ln r_{n-m}^0 + x_{n-m+1} \times \times \ln r_{n-m+1}^0 + \cdots + x_n \ln r_n^0$, либо пределом пересечений плоскости $S_{j_1 \ldots j_m}$ и опорных к δ_A гиперплоскостей $\xi = \xi_k + x_1 \ln r_1^{(k)} + \cdots + x_n \ln r_n^{(k)}$, таких, что $\xi_k \to \xi_0$, $r_m^{(k)} \to r_m^0$ при $k \to \infty$, $m = 1, \ldots, n$. Очевидно, в любом случае $(r_1^0, \ldots, r_n^0) \in \overline{\Lambda}_A$. В силу полноты множества $\overline{\Lambda}_A$ точка $(r_1^0, \ldots, r_{n-m}^0)$ принадлежит Λ_0. Но кроме того, множество Λ_0 замкнуто, значит, $\overline{\Lambda}_{\tilde{T}_A} \subset \Lambda_0$.

Теорема доказана.

Пример. Пусть $A_{00} = 1$, $A_{k_1 k_2} = 1$, если $k_1 = 1, 2, \ldots$; $k_2 = 0, 1, 2, \ldots$ и $A_{0l} = 0$, $l = 1, 2, \ldots$ Диаграмма Ньютона δ_A ряда (1) в данном случае определяется равенством $\delta_A = \{(x_1, x_2, \xi) \in R^3 : x_1 \geqslant \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \xi = 0\}$. Коэффициенты мажорантного ряда T_A удовлетворяют условию $T_{k_1 k_2} = 1$; $k_1, k_2 = 0, 1, \ldots$. Области сходи-

---

* Не исключена возможность, что множество отличных от нуля членов этого ряда конечно или даже пусто.

мости рядов A и T_A совпадают с бицилиндром $B = \{(z_1, z_2) \in \boldsymbol{C}^2: |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$. Но в то время как ряд A сходится во всей плоскости $\{(z_1, z_2): z_2 = 0\}$, ряд T_A расходится в любой внешней точке бицилиндра B.

Автор выражает благодарность проф. А. А. Гольдбергу за ценные замечания по данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Валирон Ж. Аналитические функции. М., Гостехиздат, 1957. 235 с.
2. Мандельбройт С. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. М., Изд-во иностр. лит., 1955. 267 с.
3. Костовский А. Локализация по модулям нулей ряда Лорана и его производных. Часть I. Изд-во Львовск. ун-та, 1967. 208 с.
4. Valiron G. Sur un théorème de M. Hadamard — „Bull .sci. mathem.", 2-e série, 1923, t. 47, p. 177—192.
5. Bose S. K., Sharma Devendra. Integral functions of two complex variables. — „Compositio Mathem.", 1962, v. 15, p. 210—226.
6. Кардаш А. І., Костовський О. М., Чулик І. І. Мажоранти та діаграми Ньютона функцій багатьох змінник. — «Вісн. Львівськ. ун-ту, серія мех.-мат.». Вип. 3, 1967, с. 97—116.
7. Кардаш А. І., Чулик І. І. Про області збіжності степеневого ряду та його мажоранти Ньютона для функції двох комплексних змінних. — «Вісн. Львівськ. ун-ту, серія мех.-мат.». Вип. 4, 1969, с. 62—65.
8. Кардаш А. І., Чулик І. І. Дослідження граничних властивостей мажоранти та діаграми Ньютона функцій двох комплексних змінних. — «Доп. АН УРСР», 1972, А, № 4, с. 316—319.
9. Кардаш А. І., Чулик І. І. Дослідження границі області збіжності степеневих рядів функції двох комплексних змінних. — «Доп. АН УРСР», 1972, А, № 5, с. 411—417.
10. Гече Ф. Й. Про мажоранту та діаграму Ньютона функцій двох комплексних змінних. — «Четверта наукова конференція молодих математиків України». Вид-во АН УРСР, Київ, 1968, с. 54—55.
11. Гече Ф. И. Сравнение роста целой функции многих комплексных переменных с ростом ее мажоранты Ньютона. Статья депонирована в ВИНИТИ за № 6715—73. 12 с.
12. Битлян И. Ф., Гольдберг А. А. Теоремы Вимана — Валирона для целых функций многих комплексных переменных. — «Вестн. Ленингр. ун-та, серия мат., мех., астр.». Вып. 2, № 13. 1959, с. 27—41.
13. Стрелиц Ш. И. Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. Вильнюс, «Минтис», 1972. 467 с.
14. Gopala J. Krishna. Maximum term of power series in one and several complex variables. — „Pacific J. Mathem.", 1969, v. 29 № 3, p. 609—622.
15. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М., «Мир», 1973. 469 с.
16. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., «Наука», 1971. 430 с.

Поступила 28 января 1974 г.