УДК 517.97

В. К. ДУБОВОЙ

ОТКРЫТЫЕ ПОЛЯ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С УРАВНЕНИЕМ ДАФФИНА ДЛЯ СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ

§ 1. Постановка задачи и основные определения

1. Постановка задачи. Рассмотрим в линейном комплексном пространстве $\tilde{H}(\dim \tilde{H} = 5)$ уравнение Даффина для скалярных частиц [1, 2]: $\sum_{k=0}^{3} \tilde{L}_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + i\chi\psi = 0$, где $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = (\hat{\psi}, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$ состоит из скаляра $\hat{\psi}$ и вектора $(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$, т. е. ψ является величиной, отвечающей представлению собственной группы Лоренца $G_+\, g \to T_g$: $T_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$.

Как известно, оператор $\tilde{L}_0$ в каноническом базисе представления $g \to T_g$ (будем этот базис считать ортонормированным в $\tilde{H}$) задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а соответствующую инвариантную билинейную форму можно задать оператором $\tilde{J} = \operatorname{diag}(1, 1, -1, -1, -1)$ *.

Операторы $\tilde{L}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ определяются по $\tilde{L}_0$ и инфинитезимальным операторам представления $g \to T_g$, χ — вещественное число.

Рассмотрим гильбертово пространство $H = \tilde{H} \oplus \tilde{H} \oplus \tilde{H} \oplus \ldots$ и определим в нем операторы

$$L_k = \tilde{L}_k \oplus \tilde{L}_k \oplus \tilde{L}_k \oplus \ldots$$
$$J_H = \tilde{J} \oplus \tilde{J} \oplus \tilde{J} \oplus \ldots$$
$$u_g = T_g \oplus T_g \oplus T_g \oplus \ldots$$

Рассмотрим далее уравнения открытого поля [3]

$$\begin{cases} \frac{1}{i} \sum_{k=0}^{3} L_k \frac{\partial h(x)}{\partial x_k} + Ah(x) = K^+ \varphi^-(x), \\ \varphi^+(x) = \varphi^-(x) - iKh(x), \end{cases} \tag{1}$$

* Через $\operatorname{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ будем обозначать квазидиагональную матрицу с матрицами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на диагонали.

где $x=(x_0, x_1, x_2, x_3)$, а совокупность (A, H_u, K, E_v) является инвариантным узлом [4]*.

Будем считать, что условие узла имеет вид

$$\frac{1}{i}(A-A^+)=K^+K,\ A^+=J_H A^* J_H, \tag{2}$$

т. е. за основную метрику в H принимается метрика, порожденная оператором J_H.

В том случае, когда выполнены условия

$$L_0 A = A L_0, \tag{3}$$

$\operatorname{Ker} K$ и Δ_{K^+} — подпространства, инвариантные относительно L_0, (4)

будем говорить, что уравнения (1) определяют даффиновское открытое поле**.

Данная работа посвящена изучению открытых даффиновских полей для случая $\dim E<\infty$. В дальнейшем будут использованы утверждения и обозначения из [3, 4].

2. Общий вид операторов A и K.

Пусть G_0 — группа вращений трехмерного пространства. Сузим представление $g\to u_g$ на G_0. Пусть M^k — максимальное подпространство, на котором представление $g_0\to u_{g_0}$, $g_0\in G_0$ кратно неприводимому представлению веса k, а M_j^k — подпространство в M^k, отвечающее собственному значению j инфинитезимального оператора H_3 представления $g_0\to u_{g_0}$ (см. [1, 2]). Тогда $H=M^0\oplus\oplus M_{-1}^1\oplus M_0^1\oplus M_1^1$.

Пусть H^0 и H^1 — максимальное подпространства в H, на которых представление $g\to u_g$, $g\in G_+$ кратно неприводимым представлениям, задаваемым соответственно парами (0,1) и (0,2). Положим $M^{00}=M^0\cap H^0$; $M^{01}=M^0\cap H^1$.

Очевидно, $M^0=M^{00}\oplus M^{01}$ и, значит,

$$H=M^{00}\oplus M^{01}\oplus M_{-1}^1\oplus M_0^1\oplus M_1^1. \tag{5}$$

Так как узел (A, H_u, K, E_v) инвариантен, то выполнены условия

$$u_g A = A u_g; \tag{6}$$

$$v_g K = K u_g; \tag{7}$$

$$u_g K^+ = K^+ v_g. \tag{8}$$

Из условия (6), используя известную лемму Шура, находим, что при разложении (5) оператор A имеет вид $A=\operatorname{diag}(A_0,\ A_1,$

---

* Операторы, рассматриваемые в работе, предполагаются линейными и ограниченными.

** Смысл условий (3) и (4) выясняется в лемме 1 на с. 46.

A_1, A_1, A_1). Так как при этом

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

то из (3) следует $A_0 = A_1$. Итак, при разложении (5) оператор A имеет вид:

$$A = \operatorname{diag}(A_0, A_0, A_0, A_0, A_0). \tag{10}$$

Отметим, что при этом

$$J_H = \operatorname{diag}(I, I, -I, -I, -I). \tag{11}$$

В дальнейшем будем предполагать, что узел (A, H, K, E) не содержит травиального удлинения [4]. Тогда из унитарности представления $g \to u_g$ и результатов работы [4], следует, что представление $g \to v_g$, $g \in G_+$ можно считать унитарным и распадающимся в прямую сумму неприводимых представлений, определяемых парами (0,1) и (0,2).

Пусть E^k — максимальное подпространство, на котором представление $g_0 \to v_{g_0}$, $g_0 \in G_0$ кратно неприводимому представлению веса k. По аналогии с M_j^k введем подпространства E_j^k и E^{00}, E^{01}. Тогда

$$E = E^{00} \oplus E^{01} \oplus E^1_{-1} \oplus E^1_0 \oplus E^1_1. \tag{12}$$

В силу известных результатов об инвариантных билинейных формах [1, 2], из унитарности представления $g \to v_g$, $g \in G_+$ следует, что E можно считать гильбертовым пространством, разложение (12) ортогональным, а соответствующую индефинитную инвариантную метрику порожденной оператором J_E, который при разложении (12) имеет вид

$$J_E = \operatorname{diag}(J_E^{(0)}, J_E^{(1)}, -J_E^{(1)}, -J_E^{(1)}, -J_E^{(1)}); \tag{13}$$
$$J_E^{(i)} = (J_E^{(i)})^* = (J_E^{(i)})^{-1} \ (i = 1, 2).$$

Из (7) следует, что при разложении (5) и (12) оператор K будет иметь вид

$$K = \operatorname{diag}(K_0, K_1, K_1, K_1, K_1). \tag{14}$$

Используя результаты работы [4], можно показать, что справедлива следующая

Лемма 1. *При выполнении условий (3) и (4) в E можно определить оператор Q_0 такой, что*

$$Q_0 K = K L_0; \tag{15}$$
$$L_0 K^+ = K^+ Q_0, \tag{16}$$

при этом в подпространствах разложения (12) можно выбрать ортонормированные базисы таким образом, что

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

а в (13) и (14) будет выполнено:

$$J_E^{(0)} = J_E^{(1)};\ K_0 = K_1. \tag{18}$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что в E выбран указанный в лемме базис, который будем называть каноническим.

3. Проекторы $Q_{\vec{p}}$ и $L_{\vec{p}}$. Пусть $\vec{p} = (p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3) \in R^4$, при этом p_0 будем считать временной, а $p_1,\ p_2,\ p_3$ — пространственными координатами. Пусть далее $l_2(\vec{p}) = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$. Напомним, что уравнение $l^2(\vec{p}) = 0$ определяет в R^4 конус, который называют световым. Внутренность светового конуса, т. е. область $l^2(\vec{p}) > 0$ обозначим через D. Всюду в дальнейшем вектор $\vec{p}$ предполагаем принадлежащим D. Под окрестностью бесконечно удаленной точки светового конуса будем понимать любое в D множество, содержащее область вида $l^2(\vec{p}) > \rho,\ \rho > 0$.

Пусть

$$Q_\alpha = [Q_0,\ B_\alpha^{(v)}]\ \ (\alpha = 1,\ 2,\ 3), \tag{19}$$

где $B_\alpha^{(v)}\ (\alpha = 1,\ 2,\ 3)$ — инфинитезимальные операторы представления $g \to v_g$, отвечающие гиперболическим вращениям в плоскостях $(p_0,\ p_1,\ 0,\ 0)$; $(p_0,\ 0,\ p_2,\ 0)$ и $(p_0,\ 0,\ 0,\ p_3)$ соответственно, и $Q(\vec{p}) = -Q_0 p_0 + \sum\limits_{\alpha=1}^{3} Q_\alpha p_\alpha$. Очевидно,

$$Q(g\vec{p}) = v_g Q(\vec{p})\, v_g^{-1}. \tag{20}$$

Введем операторы

$$Q_{\vec{p}} = \frac{1}{l^2(\vec{p})} Q^2(\vec{p}). \tag{21}$$

Из (20) следует

$$Q_{g\vec{p}} = v_g Q_{\vec{p}} v_g^{-1}. \tag{22}$$

По аналогии с $Q_{\vec{p}}$ введем в H операторы

$$L_{\vec{p}} = \frac{1}{l^2(\vec{p})} L^2(\vec{p});\ \ L(\vec{p}) = -L_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} L_\alpha p_\alpha. \tag{23}$$

Очевидно,

$$L_{g\vec{p}} = u_g L_{\vec{p}} u_g^{-1}. \tag{24}$$

Для любого $\vec{p} \in D$ существует элемент g собственной группы Лоренца G_+ такой, что

$$\vec{p} = q\vec{p}_0; \ \vec{p}_0 = (l(\vec{p}) \operatorname{sgn} p_0, \ 0, \ 0, \ 0); \ l(\vec{p}) = \sqrt{l^2(\vec{p})}. \tag{25}$$

Поэтому из (21) — (24) получаем $Q_{\vec{p}} = Q_{g\vec{p}_0} = v_g Q_{\vec{p}_0} v_g^{-1} = v_g Q_0^2 v_g^{-1}$; $L_{\vec{p}} = L_{g\vec{p}_0} = u_g L_{\vec{p}_0} u_g^{-1} = u_g L_0^2 u_g^{-1}$, откуда следует, что $Q_{g\vec{p}_0}$ и $L_{g\vec{p}_0}$ — проекторы на подпространства $v_g E^0$ и $u_g M^0$ соответственно*.

Заметим, что из (7), (8) и (15), (16) имеем

$$Q(\vec{p}) K = KL(\vec{p}); \tag{26}$$

$$L(\vec{p}) K^+ = K^+ Q(\vec{p}). \tag{27}$$

Отсюда сразу получаем

$$Q_{\vec{p}} K = KL_{\vec{p}}; \tag{28}$$

$$L_{\vec{p}} K^+ = K^+ Q_{\vec{p}}. \tag{29}$$

4. Даффиновское семейство узлов. Как и в работах [3, 5, 6], даффиновскому открытому полю поставим в соответствие даффиновское семейство операторных узлов

$$\tau(\vec{p}) = (A + L(\vec{p}), \ H_u, \ K, \ E_v), \tag{30}$$

где H и E считаются пространствами с метриками, порожденными операторами J_H и J_E. В дальнейшем существенную роль будет играть инвариантный узел $\theta = \tau(0) = (A, \ H_u, \ K, \ E_v)$, который назовем даффиновским. Введем в рассмотрение х. о.-ф. узла θ: $W_\theta(\lambda) = I + iK(A - \lambda I)^{-1} K^+$.

Учитывая, что $A^+ = J_H A^* J_H$; $K^+ = J_H K^* J_E$; $J_H A^* = A^* J_H$; $J_H^2 = J$; $J_H K^* J_E = K^* J$, где оператор J при разложении (12) имеет вид

$$J = \operatorname{diag}\left(J_E^{(0)}, \ J_E^{(0)}, \ J_E^{(0)}, \ J_E^{(0)}, \ J_E^{(0)}\right), \tag{31}$$

перепишем условие узла (2) в виде $\frac{1}{i}(A - A^*) = K^* J K$.

Отсюда следует, что функция $W_\theta(\lambda)$ принадлежит классу $\Omega_J^{(q)}$, т. е. обладает следующими свойствами: $(I^{(q)})$ $W_\theta(\lambda)$ голоморфна в области G_W, получающейся при исключении из расширен-

* Стоит заметить, что $Q_{\vec{p}}$ и $L_{\vec{p}}$ — операторы ортогонального проектирования относительно соответствующих индефинитных метрик.

ной комплексной плоскости некоторого ограниченного множества, не имеющего невещественных предельных точек;

$$(\mathrm{II}^{(q)})\quad \lim_{\lambda\to\infty} W_\theta(\lambda) = I;$$

$$(\mathrm{III}^{(q)})\quad W_\theta^*(\lambda)\, J W_\theta(\lambda) - J \geqslant 0\ (\operatorname{Im}\lambda > 0,\ \lambda\in G_W);$$

$$(\mathrm{IV}^{(q)})\quad W_\theta^*(\lambda)\, J W_\theta(\lambda) - J = 0\ (\operatorname{Im}\lambda = 0,\ \lambda\in G_W).$$

Наконец, отметим, что из инвариантности узла θ и (26), (27) следует

$$v_g W_\theta(\lambda) = W_\theta(\lambda)\, v_g; \tag{32}$$

$$Q(\vec{p})\, W_\theta(\lambda) = W_\theta(\lambda)\, Q(\vec{p}). \tag{33}$$

Замечание. Используя результаты работы [4], нетрудно показать, что условия (3), (4) эквивалентны соотношению $Q_0 W_\theta(\lambda) = W_\theta(\lambda)\, Q_0$, которое является частным случаем (33). В связи с этим в дальнейшем даффиновское семейство узлов будем обозначать следующим образом: $\tau(\vec{p}) = (A + L(\vec{p}),\ H_u,\ K,\ E_{v,\,Q_0})$.

§ 2. Характеристическая оператор-функция даффиновского семейства узлов

1. Определение и основные свойства х. о.-ф. даффиновского семейства узлов. Из условий инвариантности получаем $AL_{\vec{p}} = L_{\vec{p}}A$. Поэтому $L_{\vec{p}}(A + L(\vec{p})) = (A + L(\vec{p}))\, L_{\vec{p}}$. Обозначим через $(A + L(\vec{p}))^{-1}$ оператор, обратный к оператору $A + L(\vec{p})$ на подпространстве $H_{\vec{p}} = L_{\vec{p}}H$ (если он, конечно, существует).

Определим х. о.-ф. даффиновского семейства узлов следующим образом:

$$W_\tau(\vec{p}) = I - iK(A + L(\vec{p}))^{-1}K^+ Q_{\vec{p}}. \tag{34}$$

Из (29) следует $W_\tau(\vec{p}) = I - iK(A + L(\vec{p}))^{-1} L_{\vec{p}} K^+$.

Под областью определения $W_\tau(\vec{p})$ будем понимать множество векторов $D_W \subset D$, для которых оператор $A + L(\vec{p})$ имеет на подпространстве $H_{\vec{p}}$ ограниченный обратный.

Из (22) и условий инвариантности получаем: $W_\tau(g\vec{p}) = I - iK(A + L(g\vec{p}))^{-1}K^+ Q_{g\vec{p}} = I - iKu_g(A + L(\vec{p}))^{-1} u_g^{-1} K^+ v_g Q_{\vec{p}} v_g^{-1} = v_g W_\tau(\vec{p})\, v_g^{-1}$.

Итак, х. о.-ф. даффиновского семейства узлов удовлетворяет групповому закону преобразования

$$W_\tau(g\vec{p}) = v_g W_\tau(\vec{p})\, v_g^{-1}, \tag{35}$$

откуда видно, что с каждым $\vec{p}'$ в область определения D_W входит соответствующая пола гиперболоида $l^2(\vec{p}) = l^2(\vec{p}')$, $\operatorname{sgn} p_0 = \operatorname{sgn} p_0'$. Кроме того, из группового закона преобразования следует, что для описания свойств х. о.-ф. $W_\tau(\vec{p})$ достаточно изучить свойства функции $W_\tau(\vec{p}_0) = W_\tau(p_0, 0, 0, 0) = I - iK(A - L_0 p_0)^{-1} K^+ Q_0^2 = I - iK(A - L_0 p_0)^{-1} L_0^2 K^+$. Так как, при $|p_0| > \|A\|$

$$(A - L_0 p_0)^{-1} L_0^2 = (AL_0 - p_0 I)^{-1} L_0 = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(AL_0)^n}{p_0^{n+1}} L_0 =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(AL_0)^{2n}}{p_0^{2n+1}} L_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(AL_0)^{2n+1}}{p_0^{2n+2}} L_0 = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n}}{p_0^{2n+2}} L_0 p_0 -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n+1}}{p_0^{2n+2}} L_0^2,$$

то

$$W_\tau(p_0, 0, 0, 0) = I + iK \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n}}{p_0^{2n+2}} L_0 p_0 K^+ + iK \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n+1}}{p_0^{2n+2}} L_0^2 K^+ =$$

$$= I + iK \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n}}{p_0^{2n+2}} K^+ Q_0 p_0 + iK \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n+1}}{p_0^{2n+2}} K^+ Q_0^2.$$

Пусть

$$\tilde{\omega}(\lambda) = iK \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n+1}}{\lambda^{n+1}} K^+; \qquad (|\lambda| > \|A\|^2)$$

$$\omega(\lambda) = -iK \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n}}{\lambda^{n+1}} K^+.$$

Тогда

$$W_\tau(p_0, 0, 0, 0) = I + \tilde{\omega}(p_0^2) Q_0^2 - \omega(p_0^2) Q_0 p_0. \tag{36}$$

Заметим, что при $|\lambda| > \|A\|^2$

$$W_\theta(\lambda) = I - iK(A - \lambda I)^{-1} K^+ = I - iK \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} K^+ =$$

$$= I + \tilde{\omega}(\lambda^2) - \omega(\lambda^2)\lambda.$$

Следовательно:

$$\tilde{\omega}(\lambda) = \frac{1}{2}\left(W_\theta(\sqrt{\lambda}) + W_\theta(-\sqrt{\lambda})\right) - I; \tag{37}$$

$$\omega(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left(W_\theta(\sqrt{\lambda}) - W_\theta \sqrt{\lambda}\right). \tag{38}$$

При этом, как легко видеть, безразлично с каким знаком берется $\sqrt{\lambda}$. Из (37), (38) и ($I^{(q)}$) следует, что $\tilde{\omega}(\lambda)$ и $\omega(\lambda)$ допускают аналитическое продолжение в область, получающуюся при исключении из расширенной комплексной плоскости некоторого ограниченного множества, все предельные точки которого (если они существуют) лежат на замкнутой положительной полуоси. Кроме того, из (32) и (33) имеем $v_g\tilde{\omega}(\lambda) = \tilde{\omega}(\lambda) v_g$; $v_g\omega(\lambda) = \omega(\lambda) v_g$; $Q(\vec{p})\tilde{\omega}(\lambda) = \tilde{\omega}(\lambda) Q(\vec{p})$; $Q(\vec{p})\omega(\lambda) = \omega(\lambda) Q(\vec{p})$, откуда для произвольного $\vec{p} \in D_W$, учитывая (25), групповой закон преобразования (35) и (20), (22), из (36) получим

$$W_\tau(\vec{p}) = W_\tau(g\vec{p}_0) = v_g W_\tau(\vec{p}_0) v_g^{-1} = I + \tilde{\omega}(p_0^2) v_g Q_0^2 v_g^{-1} - \\ - \omega(p_0^2) v_g Q_0 p_0 v_g^{-1} = I + \tilde{\omega}(l^2(\vec{p})) Q_{\vec{p}} + \omega(l^2(\vec{p})) Q(\vec{p}).$$

Итак, доказана

Теорема 1. Х. о.-ф. $W_\tau(\vec{p})$ *даффиновского семейства узлов (30) допускает представление в виде* $W_\tau(\vec{p}) = I + \tilde{\omega}(l^2(\vec{p})) Q_{\vec{p}} + \omega(l^2(\vec{p})) Q(\vec{p})$, *при этом функция* $I + \tilde{\omega}(\lambda^2) - \omega(\lambda^2)\lambda$ *принадлежит классу* $\Omega_J^{(q)}$, $Q(\vec{p}) = -Q_0 p_0 + \sum_{\alpha=0}^{3} Q_\alpha p_\alpha$, *операторы* J *и* Q_0 *при разложении (12) имеют соответственно вид (31) и (17), а операторы* Q_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ *определяются из соотношений (19). Кроме того, имеют место равенства*

$$v_g\tilde{\omega}(\lambda) = \tilde{\omega}(\lambda) v_g;\ v_g\omega(\lambda) = \omega(\lambda) v_g;\ Q(\vec{p})\tilde{\omega}(\lambda) = \tilde{\omega}(\lambda) Q(\vec{p}); \\ Q(\vec{p})\omega(\lambda) = \omega(\lambda) Q(\vec{p}). \qquad (39)$$

Следствие. Х. о.-ф. *даффиновского семейства узлов определена в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки светового конуса.*

2. Унитарная эквивалентность.

Определение 1. *Даффиновское семейство узлов* $\tau(\vec{p}) = (A + L(\vec{p}), H_u, K, E_{v, Q_0})$ *будем называть простым, если прост соответствующий даффиновский узел* $\theta = (A, H_u, K, E_{v, Q_0})$.

Определение 2. *Будем говорить, что даффиновские семейства узлов* $\tau_i(\vec{p}) = (A_i + L_i(\vec{p}), H_{u^{(i)}}^{(i)}, K_i, E_{v, Q_0})$ $(i = 1, 2)$ *унитарно эквивалентны, если существует унитарный (относительно индефинитных метрик) оператор* U, *отображающий* $H^{(1)}$ *на* $H^{(2)}$, *такой что* $UA_1 = A_2U$; $UL_1(\vec{p}) = L_1(\vec{p}) U$, $Uu_g^{(1)} = u_g^{(2)}U$; $K_1 = K_2U$.

Очевидно, что х. о.-ф. унитарно эквивалентных даффиновских семейств узлов совпадают. Используя результаты работы [4], можно показать, что справедлива

Теорема 2. Пусть $\tau_i(\vec{p}) = (A_i + L_i(\vec{p}),\ H^{(i)}_{u(i)},\ K_i,\ E_{v,\,Q_0})$ $(i = 1, 2)$ — *простые даффиновские семейства узлов. Если в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки светового конуса* $W_{\tau_1}(\vec{p}) = W_{\tau_2}(\vec{p})$, *то узлы* $\tau_i(\vec{p})$ $(i = 1, 2)$ *унитарно эквивалентны.*

3. Замечание о факторизации х. о.-ф. даффиновского семейства узлов. В работе [3] введена операция сцепления и разложения инвариантных семейств операторных узлов. Применяя обычные в теории х. о.-ф. рассуждения, можно показать, что разложение даффиновского семейства узлов $\tau(\vec{p})$ влечет разложение х. о.-ф. $W_\tau(\vec{p})$ на соответствующие множители.

§ 3. Класс $\Omega^{(q)}(v,\ J_E,\ Q_0)$.

Пусть E — конечномерное линейное пространство с индефинитной метрикой и $g \to v_g$ — унитарное представление собственной группы Лоренца в E, распадающееся в прямую сумму неприводимых представлений, определяемых парами (0,1) и (0,2). Пусть далее при разложении (12) индефинитная метрика в E задается оператором (13), причем $J^{(0)}_E = J^{(1)}_E$, оператор J имеет вид (31), $Q(\vec{p}) = -Q_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} Q_\alpha p_\alpha$, где Q_0 имеет вид (17), а операторы Q_α определяются соотношениями (19).

Будем считать, что функция $W(\vec{p})$, значения которой являются линейными операторами в E, принадлежит классу $\Omega^{(q)}(v,\ J_E,\ Q_0)$, если

1) $W(\vec{p})$ определена в области $D_W \subset D$, содержащей окрестность бесконечно удаленной точки светового конуса, причем с каждой точкой $\vec{p}\,'$ в область D_W входит соответствующая пола гиперболоида $l^2(\vec{p}) = l^2(\vec{p}\,')$, $\operatorname{sgn} p_0 = \operatorname{sgn} p_0'$;

2) $W(\vec{p})$ допускает представление в виде $W(\vec{p}) = I + \tilde{\omega}(l^2(\vec{p})) \times Q_{\vec{p}} + \omega(l^2(\vec{p}))\, Q(\vec{p})$, при этом $Q_{\vec{p}}$ определяется равенством (21), функция $I + \tilde{\omega}(\lambda^2) - \omega(\lambda^2)\lambda$ принадлежит классу $\Omega^{(q)}_J$ и выполнены соотношения (39).

Нетрудно видеть, что каждая функция класса $\Omega^{(q)}(v,\ J_E,\ Q_0)$ удовлетворяет групповому закону преобразования (35).

Из результатов § 2 следует, что х. о.-ф. даффиновского семейства узлов $\tau(\vec{p}) = (A + L(\vec{p}),\ H_u,\ K,\ E_{v,\,Q_0})$ принадлежит классу $\Omega^{(q)}(v,\ J_E,\ Q_0)$. С другой стороны, справедлива

Теорема 3. *Если* $W(\vec{p}) \in \Omega^{(q)}(v, J_E, Q_0)$, *то существует такое простое даффиновское семейство узлов* $\tau(\vec{p})$, *что* $D_W \subset \subset D_{W\tau}$ и $W_\tau(\vec{p}) = W(\vec{p})$, $\vec{p} \in D_W$.

Доказательство. Из условия 2) следует, что функция $S(\lambda) = I + \tilde{\omega}(\lambda^2) - \omega(\lambda^2)\lambda$ принадлежит классу $\Omega_J^{(q)}$ и удовлетворяет равенствам $v_g S(\lambda) = S(\lambda) v_g$, $Q_0 S(\lambda) = S(\lambda) Q_0$, откуда следует, что при разложении (12) $S(\lambda)$ будет иметь вид

$$S(\lambda) = \operatorname{diag}(S_0(\lambda), S_0(\lambda), S_0(\lambda), S_0(\lambda), S_0(\lambda)). \tag{40}$$

Как известно [7], каждая функция класса $\Omega_J^{(q)}$ является х. о.-ф. некоторого простого узла

$$\tilde{\theta} = \begin{pmatrix} A & K & J \\ H & & E \end{pmatrix}$$

с гильбертовым пространством H, т. е. $S(\lambda) = I - iK(A - \lambda I)^{-1} \times \times K^* J$, где сопряжение берется по отношению к дефинитной метрике в E. Из (40) в силу известного результата (см. [7, с. 49]) следует, что пространство H допускает разложение

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5, \tag{41}$$

при этом оператор A имеет вид (10), а оператор K задается матрицей (14) с $K_0 = K_1$. Введем в H операторы L_0 и J_H, задав их при разложении (41) соответственно матрицами (9) и (11) и определим представление $g \to u_g$ собственной группы Лоренца, считая его распадающимся в прямую сумму неприводимых представлений, определяемых парами (0,1) и (0,2), предполагая при этом, что разложение (5) пространства H совпадает с разложением (41). Очевидно, представление $g \to u_g$ будет унитарным в метрике, порожденной оператором J_H.

Пусть $L_\alpha = [L_0, B_\alpha^{(u)}]$ $(\alpha = 1, 2, 3)$, где $B_\alpha^{(u)}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ — инфинитезимальные операторы представления $g \to u_g$, отвечающие гиперболическим вращениям в плоскостях $(p_0, p_1, 0, 0)$, $(p_0, 0, p_2, 0)$, $(p_0, 0, 0, p_3)$ соответственно, и $L(\vec{p}) = -L_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} L_\alpha p_\alpha$.

Если рассматривать H как пространство с индефинитной метрикой, порожденной оператором J_H, то нетрудно видеть, что $\tau(\vec{p}) = (A + L(\vec{p}), H_u, K, E_{v, Q_0})$ является простым даффиновским семейством узлов. Покажем, что $W_\tau(\vec{p}) = W(\vec{p})$, $\vec{p} \in D_W$. Действительно, если $\theta = \tau(0)$ — соответствующий даффиновский узел и D_s — область определения $S(\lambda)$, то $W_\theta(\lambda) = I - iK(A - \lambda I)^{-1} \times \times J_H K^* J_E = I - iK(A - \lambda I)^{-1} K^* J = S(\lambda)$ $(\lambda \in D_s)$, откуда, учитывая теорему 1, равенства (37), (38) и условие 2), сразу получаем $W_\tau(\vec{p}) = W(\vec{p})$ $(\vec{p} \in D_W)$, что и требовалось показать.

Наконец, отметим, что предложенным методом можно исследовать х. о.-ф. семейств узлов, ассоциированных с релятивистски-инвариантными уравнениями Дирака и Даффина для векторных частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца. М., Физматгиз, 1958. 376 с.
2. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М., Физматгиз, 1955. 368 с.
3. Дубовой В. К. Вейлевские семейства операторных узлов и соответствующие им открытые поля. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 14. Харьков, 1971, с. 67—83.
4. Дубовой В. К. Инвариантные операторные узлы. — «Вестн. Харьк. ун-та. Математика и механика», 1971, вып. 36, с. 36—61.
5. Дубовой В. К. О характеристической оператор-функции вейлевского семейства узлов. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 15. Харьков, 1972, с. 12—19.
6. Дубовой В. К. Об основных свойствах характеристических оператор-функций вейлевских семейств узлов. — «Вестн. Харьк. ун-та. Математика и механика», 1972, вып. 37, с. 30 — 40.
7. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М., «Наука», 1969. 287 с.
8. Лившиц М. С. Операторы, колебания, волны. М., «Наука», 1966. 298 с.
9. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Изд-во Харьк. ун-та, 1971. 160 с.

Поступила 16 сентября 1975 г.