УДК 517.55

П. З. АГРАНОВИЧ

О ФУНКЦИЯХ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Теория функций вполне регулярного роста, существенно использующаяся во многих приложениях, была построена в работах Б. Я. Левина и А. Пфлюгера. В дальнейшем В. С. Азарин [1] распространил эту теорию на субгармонические функции в пространстве $\boldsymbol{R}^m$, $m \geqslant 2$.

В последнее время появился ряд работ, в которых приводятся различные определения голоморфной функции вполне регулярного роста многих переменных и изучаются их свойства. Приведем одно из этих определений:

Определение 1 [2]. *Пусть $f(z)$ — целая функция уточненного порядка $\rho(t)$ в $\boldsymbol{C}^n$; $K_D = \left\{z : \frac{z}{|z|} \in D\right\}$, где D — открытое множество на единичной сфере S_1 в $\boldsymbol{C}^n$-конус. Функция $f(z)$ называется функцией вполне регулярного роста в конусе K_D, если функция $f(\lambda z)$ как функция переменного $\lambda \in \boldsymbol{C}$ является функцией вполне регулярного роста в угле $\{\lambda : \lambda z \in K_D\}$ для почти всех z, таких, что $\{\lambda : \lambda z \in K_D\} \neq \varnothing$.*

В совместной статье Л. И. Ронкина и автора [3] было показано, что из вполне регулярности роста функции $f(z)$ следует существование в пространстве $D'(\boldsymbol{R}^{2n})$ обобщенных функций в $\boldsymbol{R}^{2n}$ предела $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\ln|f(tz)|}{t^{\rho(t)}}$ и что при нецелом $\rho = \lim\limits_{t\to\infty} \rho(t)$ из вполне регулярности роста функции $f(z)$ следует вполне регулярность роста субгармонической функции $\ln|f(z)|$ в $\boldsymbol{R}^{2n}$.

В этой работе будет доказано, что и в случае целого ρ вполне регулярность роста целой функции $f(z)$, $z \in \boldsymbol{C}^n$ влечет вполне регулярность роста субгармонической функции $\ln|f(z)|$. Этот результат будет получен как следствие более общего факта, дающего критерий принадлежности субгармонической функции классу субгармонических функций вполне регулярного роста в терминах сходимости в пространстве обобщенных функций.

Для субгармонических функций в плоскости упомянутый критерий является частным случаем результата, приведенного без доказательства в [4].

Пусть $u(x)$, $x \in \boldsymbol{R}^m$, тождественно не равная $-\infty$ субгармоническая функция, $M_u(t) = \max\limits_{|x|=t} u^+(x)$.

Будем говорить, что $u(x)$ является субгармонической функцией уточненного порядка $\rho(t)$ в $\boldsymbol{R}^m$, если $0 < \overline{\lim} \frac{M_u(t)}{t^{\rho(t)}} < \infty$. Обозначим через μ_u меру, ассоциированную по Риссу функции $u(x)$, $\mu_u(t) = \mu_u(\{x : |x| < t\})$.

Пусть

$$J_\mu = \int\limits_{R^m} h_q(x, y)\, d\mu_u;\ h_q(x, y) = -|y|^{2-m} \times$$

$$\times (1 - 2v\cos\psi + v^2)^{1-\frac{m}{2}} + |y|^{2-m} + \sum_{j=1}^{q} \frac{Y_j(\psi)}{|y|^{m-2}},$$

где q — наименьшее целое число, для которого сходится интеграл

$$\int^{\infty} \frac{d\mu_u(t)}{t^{q+m-1}}, \tag{1}$$

ψ — угол между радиусами-векторами точек x и y; $v = |x|/|y|$; $Y_l(\psi)$ — коэффициент при v^l в разложении по степеням v выражения $(1 - 2v\cos\psi + v^2)^{-\frac{m-2}{2}}$.

Для субгармонических функций конечного порядка имеет место интегральное представление, являющееся аналогом канонического произведения Вейерштрасса, а именно, справедлива следующая

Теорема [5]. *Пусть субгармоническая в* $\boldsymbol{R}^m$ *функция* $u(x) \not\equiv -\infty$ *имеет конечный порядок* ρ. *Тогда ее можно представить в виде*

$$u(x) = J_{\mu'_\varepsilon}(x) + \Phi(x) + \int\limits_{R^m} \frac{d\mu_\varepsilon(y)}{|x-y|^{m-2}}, \tag{2}$$

где ε — *произвольное положительное число;* μ_ε — *сужение ассоциированной меры* μ_u *в шаре* $\{x : |x| < \varepsilon\}$, μ'_ε — *сужение меры* μ_u *в области* $\{x : |x| > \varepsilon\}$ *и, наконец,* $\Phi(x)$ — *гармонический многочлен степени не выше* q, *определенного в* (1).

Множество D называется регулярным относительно неотрицательной счетно-аддитивной меры ν, если $\nu(\partial D) = 0$.

Определение 2. *Верхней (нижней) конусной плотностью распределения масс* μ_u *называется функция множества* $T \subset S_1$, *определенная равенством* $\overline{\nu}(T) = \overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, t^{-\rho(t)} \mu(K_T \cap \{x : |x| < t\})$; $(\underline{\nu}(T) = \underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, t^{-\rho(t)} \mu(K_T \cap \{x : |x| < t\}))$.

Если $\bar{\nu}(T) = \underline{\nu}(T) = \nu(T) < \infty$ для любого множества $T \subset S_1$, такого, что конус K_T регулярен относительно меры μ, то говорят, что распределение масс имеет конусную плотность.

Определение 3*. *Распределение масс μ_u называется правильным, если оно имеет конусную плотность, а при целом ρ, кроме того, существует предел*

$$\lim_{R\to\infty}\left[\left(X_q(\bar{x}) + \int\limits_{|y|<R} Y_q(\psi)\frac{d\mu(y)}{|y|^{m+q-2}}\right)\frac{1}{R^{\rho(R)-\rho}}\right],\ \forall\bar{x}\in S_1, \tag{3}$$

где $X_q(\bar{x})$ — коэффициент при степени $|x|^q$ гармонического полинома $\overline{\Phi}(x)$, q равно либо ρ, либо $\rho - 1$.

Определение 4. *Множество C называется C_0-множеством, если каждое множество $C(R) = C \cap \{x : |x| < R\}$ может быть покрыто системой шаров так, что центры этих шаров лежат в шаре $\{x : |x| < R\}$, а их радиусы $r_j(R)$ удовлетворяют условию*

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{m-1}}\sum r_j^{m-1} = 0. \tag{4}$$

Определение 5. *Субгармоническая функция $u(x)$ называется функцией вполне регулярного роста, если существует при Rx не принадлежащем некоторому C_0-множеству, равномерный предел*

$$\lim_{R\to\infty}\frac{u(Rx)}{R^{\rho(R)}} = h_u^*(x),$$

где

$$h_u^*(x) = \overline{\lim_{x'\to x}}\ \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{u(tx')}{t^{\rho(t)}}.$$

В. С. Азариным было показано, что субгармоническая функция $u(x)$, $x \in \boldsymbol{R}^m$ тогда и только тогда является функцией вполне регулярного роста, когда распределение масс μ_u правильно **. Этот результат является распространением на случай субгармонических функций соответствующего факта Б. Я. Левина и А. Пфлюгера.

Другого типа критерий вполне регулярности роста субгармонической функции содержится в следующей нашей теореме.

Теорема 1. *Для того чтобы субгармоническая функция $u(x)$, $x \in R^m$, была функцией вполне регулярного роста, необходимо и достаточно, чтобы в пространстве $D'(\boldsymbol{R}^m)$ существовал предел*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u(tx)}{t^{\rho(t)}} \tag{5}$$

---

* Определения 2, 3, 4, 5 даны В. С. Азариным в [6] для $\rho(t) \equiv \rho$.

** Теорема В. С. Азарина доказана в [1] только для случая $\rho(t) \equiv \rho$, на случай произвольного $\rho(t)$ доказательство переносится без изменений.

Доказательство. Покажем теперь, что из вполне регулярности роста функции $u(x)$ вытекает существование в $D'(R^m)$ предела (5). Для этого нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1 (см. лемму 7.2, гл. 1 в [7]). *Пусть* $Q \subset E_R$, $\operatorname{mes} Q = s$, $\lambda(t)$, $t \in (0, R)$ — *невозрастающая функция, интегрируемая на* $(0, R)$ *(допускается* $\lambda(0) = \infty$*). Тогда* $\int\limits_Q \lambda(|x|)\, dV_x \leqslant \int\limits_{E_{R(s)}} \lambda(|x|)\, dV_x$, *где* $E_{R(s)}$ — *шар с центром в начале координат такой, что* $\operatorname{mes} E_{R(s)} = s$; $dV_x = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$.

Лемма 2*. *Пусть* $u(x)$, $x \in \boldsymbol{R}^m$ — *субгармоническая функция вполне регулярного роста. Тогда*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{r^{\rho(r)+m}} \int\limits_{C_0^r} |u(x)|\, dV_x = 0,$$

где $C_0^r = C_0 \cap \{x : |x| < r\}$ *и* C_0 — C_0-*множество, входящее в определение функции* $u(x)$.

Доказательство. Представим функцию $|u(x)|$ в виде $|u(x)| = 2u^+(x) - u(x)$; тогда

$$\int\limits_{C_0^r} |u(x)|\, dV_x = 2 \int\limits_{C_0^r} u^+(x)\, dV_x - \int\limits_{C_0^r} u(x)\, dV_x. \tag{6}$$

Согласно определению субгармонической функции уточненного порядка $\rho(t)$ имеем

$$u^+(x) \leqslant C_1 + C_2 |x|^{(\rho|x|)} \; (C_1 < \infty,\ C_2 < \infty). \tag{7}$$

Обозначим через $r_j(R)$ радиусы шаров с центрами x_j, содержащиеся в шаре $\{x : |x| < r\}$ таких, что $C_0^r \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\varkappa} \{x : |x - x_j| < r_j\}$, и $\lim\limits_{r \to \infty} r^{1-m} \sum\limits_{j=1}^{\varkappa} [r_j(r)]^{m-1} = 0$.

Тогда из (7) следует, что $\int\limits_{C_0^r} u^+(x)\, dV_x \leqslant C \sum\limits_{j=1}^{\varkappa} (C_1 + C_2 r^{\rho(r)})\, r_j^m$, где C — некоторая константа.

Таким образом,

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{r^{\rho(r)+m}} \int\limits_{C_0^r} u^+(x)\, dV_x = 0. \tag{8}$$

---

* Доказательство этой леммы использует идею доказательства теоремы 7.3, гл. 1 [7].

Теперь рассмотрим $\int\limits_{C_0^r} u(x)\,dV_x$. Пусть G_{2r} — функция Грина (см. [8]) шара $E_{2r}(0)$). Известно, что $G_{2r}(x, y) \leqslant C(m)\,|x-y|^{2-m}$, поэтому $\int\limits_{C_0^r} G_{2r}(x, y)\,dV_x \leqslant C(m) \int\limits_{C_0^r} |x-y|^{2-m}\,dV_x$; отсюда, учитывая лемму 1, получим

$$\int\limits_{C_0^r} G_{2r}(x, y)\,dV_x \leqslant C(m) \int\limits_{E_{R(s)}} \frac{dV_x}{|x|^{m-2}} = \tilde{C}(m)\,(\mathrm{mes}\,C_0^r)^{\frac{2}{m}} = \mathrm{o}(r^2), \qquad (9)$$

где $E_{R(s)}$ — шар с центром в начале координат, мера Лебега которого равна $\mathrm{mes}\,C_0^r$.

Далее, из формулы Пуассона — Иенсена при $|x| = 2r$ для наилучшей гармонической мажоранты $H(x)$ функции $u(x)$ следует оценка

$$H(x) = \left| \frac{1}{2r} \int\limits_{|y|=2r} u(y)\, \frac{(2r)^2 - |x|^2}{|x-y|^m}\, dV_y \right| \leqslant$$

$$\leqslant C r^{-m+1} \int\limits_{|y|=2r} |u|\,dV_y \leqslant C r^{-m+1} \int\limits_{|y|=2r} u^+\,dV_y. \qquad (10)$$

Запишем теперь для функции $u(x)$ представление Рисса в шаре $E_{2r}(0)$: $u(x) = H(x) - \int G_{2r}(x, y)\,d\mu_u$. Интегрируя это равенство по C_0^r и используя оценки (9) и (10), получаем, что $\left| \int\limits_{C_0^r} u(x)\,dV_x \right| \leqslant \mu_u(2r)\, o(r^2) + o(r^m)\, M_u(2r)$. Отсюда следует, что

$$\left| \int\limits_{C_0^r} u(x)\,dV_x \right| = o\left(r^{\rho(r)+m}\right). \qquad (11)$$

Подставляя оценки (8) и (11) в (6), получим, что $\int\limits_{C_0^r} |u(x)|\,dV_x \leqslant$ $\leqslant o\left(r^{\rho(r)+m}\right)$.

Случай $m = 2$ рассмотрен нами в [3].

Лемма доказана.

Теперь перейдем непосредственно к доказательству того факта, что если $u(x)$ — функция вполне регулярного роста, то в $D'(\boldsymbol{R}^m)$ существует предел (5). Точнее, мы покажем, что для любой непрерывной финитной функции $\chi(x)$ верно равенство

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{R^{\rho(R)}} \int \chi(x)\, u(Rx)\,dV_x = \int \chi(x)\, h_u^*(x)\,dV_x. \qquad (12)$$

Очевидно, что равенство (12) достаточно доказать только для неотрицательных функций $\chi(x)$.

В силу леммы Фату имеем

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\rho(t)}}\int\chi(x)\,u(tx)\,dV_x\leqslant\int\chi(x)\varlimsup_{t\to\infty}\frac{u(tx)}{t^{\rho(t)}}\,dV_x=$$
$$=\int\chi(x)\,h_u^*(x)\,dV_x. \tag{13}$$

Для получения обратного неравенства прежде всего преобразуем интеграл, фигурирующий в левой части (12):

$$\frac{1}{t^{\rho(t)}}\int\chi(x)\,u(tx)\,dV_x=\frac{1}{t^{\rho(t)+m}}\left\{\int\limits_{C_0}\chi\left(\frac{x}{t}\right)u(x)\,dV_x+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{R^m\setminus C_0}\chi\left(\frac{x}{t}\right)u(x)\,dV_x\right\}.$$

В силу леммы 2 и ограниченности функции χ имеем

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\rho(t)+m}}\int\chi\left(\frac{x}{t}\right)u(x)\,dV_x=0. \tag{14}$$

Далее, учитывая определение функции вполне регулярного роста, получим, что для произвольного $\varepsilon>0$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{t^{\rho(t)+m}}\int\limits_{R^m\setminus C_0}\chi\left(\frac{x}{t}\right)u(x)\,dV_x\geqslant\frac{1}{t^{\rho(t)+m}}\int\limits_{R^m}\chi\left(\frac{x}{t}\right)\left[h_u^*\left(\frac{x}{|x|}\right)-\varepsilon\right]\times \tag{15}$$
$$\times|x|^{\rho(|x|)}\,dV_x-\frac{1}{t^{\rho(t)+m}}\int\limits_{C_0}\chi\left(\frac{x}{t}\right)\left[h_u^*\left(\frac{x}{|x|}\right)-\varepsilon\right]|x|^{\rho(|x|)}\,dV_x.$$

Применяя теорему Лебега и используя свойства уточненного порядка, заключаем, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\rho(t)+m}}\int\limits_{R^m}\chi\left(\frac{x}{t}\right)\left[h_u^*\left(\frac{x}{|x|}\right)-\varepsilon\right]|x|^{\rho(|x|)}\,dV_x=$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\rho(t)}}\int\limits_{R^m}\chi(x)\left[h_u^*\left(\frac{x}{|x|}\right)-\varepsilon\right](t|x|)^{\rho(t|x|)}\,dV_x=$$
$$=\int\limits_{R^m}\chi(x)\,[h_u^*(x)-\varepsilon|x|^{\rho}]\,dV_x. \tag{16}$$

Оценим теперь второй интеграл из выражения (15). Имеем

$$\frac{1}{t^{\rho(t)+m}}\int\limits_{C_0}\chi\left(\frac{x}{t}\right)\left[h_u^*\left(\frac{x}{|x|}\right)-\varepsilon\right]|x|^{\rho(|x|)}\,dV_x\leqslant$$
$$\leqslant\max_x\chi(x)\max_x\left[h_u^*\left(\frac{x}{|x|}\right)-\varepsilon\right]\int\limits_{C_0}t^{-\rho(t)-m}|x|^{\rho(|x|)}\,dV_x.$$

Если $\max\left[h_u^*\left(\frac{x}{|x|}\right)-\varepsilon\right]\leqslant 0$, то

$$\frac{1}{t^{\rho(t)+m}}\int\limits_{C_0^t}\chi\left(\frac{x}{t}\right)\left[h_u^*\left(\frac{x}{|x|}\right)-\varepsilon\right]|x|^{\rho(|x|)}\,dV_x\leqslant 0,$$

и, значит, как следует из (15) и (16),

$$\varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\rho(t)}}\int\limits_{R^m\setminus C_0}\chi(x)\,u(tx)\,dV_x\geqslant\int\limits_{R^m}\chi(x)\left[h_u^*(x)-\varepsilon|x|^{\rho}\right]dV_x. \qquad (17)$$

Если же $\max\left[h_u^*\left(\frac{x}{|x|}\right)-\varepsilon\right]>0$, то, обозначая через t_j радиусы шаров с центрами в шаре $\{x\colon|x|<t\}$, покрывающие множество C_0^t и такие, что $\sum t_j^{m-1}/t^{m-1}\to 0$ при $t\to>$, получим

$$\frac{1}{t^{\rho(t)+m}}\int\limits_{C_0^t}\chi\left(\frac{x}{t}\right)\left[h_u^*\left(\frac{x}{|x|}\right)-\varepsilon\right]|x|^{\rho(|x|)}\,dV_x\leqslant$$

$$\leqslant C\max\chi(x)\max\left[h_u^*\left(\frac{x}{|x|}\right)-\varepsilon\right]\left(\sum_{j=1}^{k}t_j^m\right)/t^m.$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\rho(t)+m}}\int\limits_{C_0^t}\chi\left(\frac{x}{t}\right)\left[h_u^*\left(\frac{x}{|x|}\right)-\varepsilon\right]|x|^{\rho(|x|)}\,dV_x\leqslant 0. \qquad (17')$$

Из (14), (17) и (17′) ввиду произвольности ε сразу следует неравенство

$$\varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\rho(t)}}\int\chi(x)\,u(tx)\,dV_x\geqslant\int\chi(x)\,h_u^*(x)\,dV_x.$$

Объединяя это неравенство с неравенством (13), получим требуемое равенство (12).

Теперь покажем, что из существования в $D'(R^m)$ предела (5), который мы временно обозначим $l(w)$, следует регулярность роста функции $u(w)$. Для этого согласно теореме В. С. Азарина достаточно доказать, что распределение масс μ_u правильно.

Отметим некоторые очевидные свойства функции $l(w)$:

а) $l(w)$ — обобщенная позитивно однородная порядка ρ функция;

б) $\Delta_w l(w)$ — положительная обобщенная функция и, следовательно, определяет меру, которую в дальнейшем будем обозначать μ_l;

в) мера μ_l удовлетворяет условию $\mu_l(tD)=t^{\circ}\mu_l(D)$ и, следовательно, определяет на сфере некоторую меру.

Как следует из свойств обобщенных функций (см. [9]), равенство

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\rho(t)}} \int\limits_D \Delta_w (u(tw))\, dV_w = \int\limits_D \Delta_w l(w)\, dV_w \tag{18}$$

имеет место для любого множества D такого, что $\mu_l(\partial D) = 0$.

В силу позитивной однородности функции $l(w)$ $\mu_l(S_1) = 0$ и, следовательно, из (18) вытекает, что распределение масс μ_l имеет конусную плотность. Таким образом, в случае нецелого ρ распределение масс μ_l правильно.

Пусть теперь ρ — целое, покажем существование предела (3).

Если $q = \rho - 1$, то степень многочлена $\Phi(x)$ меньше ρ и поэтому поведение функции $u(x)$ определяется только интегралом $J_{\mu'_\varepsilon}(x)$. В этом случае, очевидно, для существования предела (3) достаточно наличие конусной плотности у распределения масс μ_l.

Не уменьшая общности, можно считать, что в некоторой окрестности начала координат нет масс, и более того, что эта окрестность содержит единичный шар $E_1(0)$. Тогда, как следует из представления (2),

$$u(x) = J_{\mu'_\varepsilon}(x) + \Phi(x). \tag{19}$$

Для функции $u(x)$, представимой в таком виде, хорошо известен [9] аналог формулы Пуассона — Иенсена:

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_m R} \int\limits_{S_R(0)} u(y) \frac{R^2 - |x|^2}{(R^2 + |x|^2 - 2R|x|\cos\psi)^{m/2}}\, d\sigma + \int\limits_{E_R(0)} Q(x, y)\, d\mu_u(y),$$

где $S_R(0) = \{x : |x| = R\}$; σ_m — площадь сферы $S_1(0)$; $d\sigma$ — элемент площади в пространстве $\mathbf{R}^m$, $Q(x, y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{R^{m-2}} \left(\frac{|x||y|}{R^2}\right)^n - \frac{1}{|y|^{m-2}} \frac{|x|^n}{|y|^n}\right] Y_n(\psi)$ при $|x|/|y| < 1$.

Отсюда при $t > 0$ для точки $x \in S_1(0)$ следует

$$u(tx) = \frac{1}{\sigma_m R^{m-1}} \int\limits_{S_R(0)} u(y) \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{2n}{m-2}\right) Y_n(\psi) \frac{t^n}{R^n}\, d\sigma + \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{E_R(0)} \left[\frac{1}{R^{m-2}} \left(\frac{t^n |y|^n}{R^{2n}}\right) - \frac{1}{|y|^{m-2}} \frac{t^n}{|y|^n}\right] Y_n(\psi)\, d\mu(y).$$

Подставляя это в выражение (19), получим

$$\frac{1}{\sigma_m R^{m-1}} \int\limits_{S_R(0)} u(y) \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{2n}{m-2}\right) Y_n(\psi) \frac{t^n}{R^n} d\sigma +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{E_R(0)} \left[\frac{1}{R^{m-2}} \left(\frac{t^n |y|^n}{R^{2n}}\right) - \frac{1}{|y|^{m-2}} \frac{t^n}{|y|^n}\right] Y_n(\psi)\, d\mu(y) =$$

$$= \int\limits_{R^m/\{x:|x|<\varepsilon\}} d\mu(y) \left\{-\frac{1}{|y|^{m-2}} \left(1 - 2\cos\psi \frac{t|x|}{|y|} + \frac{t^2 |x|^2}{|y|^2}\right)^{1-\frac{m}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|y|^{m-2}} + \sum_{j=1}^{q} \frac{Y_j(\psi)\, t^j |x|^j}{|y|^{j+m-2}}\right\} + \sum_{j=1}^{q} X_j(x)\, t^j.$$

Сравнивая коэффициенты при t^q, заключаем, что

$$X_q(x) + \int\limits_{|y|<R} \frac{Y_q(\psi)\, d\mu(y)}{|y|^{m+q-2}} = \frac{1}{\sigma_m R^{m-1}} \int\limits_{S_R(0)} u(y) \left(1 + \frac{2n}{m-2}\right) \times$$

$$\times \frac{Y_q(\psi)}{R^q} d\sigma + \int\limits_{E_R(0)} \frac{|y|^q Y_q(\psi)}{R^{m+2q-2}} d\mu(y)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{R^{\rho(R)-\rho}} \left\{X_q(x) + \int\limits_{|y|<R} \frac{Y_q(\psi)\, d\mu(y)}{|y|^{m+q-2}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{R^{\rho(R)-\rho}} \left\{\frac{1}{\sigma_m R^{m+q-1}} \int\limits_{S_R(0)} u(y) \left(1 + \frac{2n}{m-2}\right) Y_q(\psi)\, d\sigma + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{E_R(0)} \frac{|y|^q}{R^{m+2q-2}} Y_q(\psi)\, d\mu(y)\right\} = \frac{1}{R^{\rho(R)-\rho}} \{I_1 + I_2\}.$$

Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно показать существование пределов $\lim\limits_{R\to\infty} R^{\rho-\rho(R)} I_j$, $j = 1, 2$.

Вначале покажем, что существует при $q = \rho \lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{R^{\rho(R)-\rho}} I_2$. В самом деле, при $q = \rho$

$$\frac{1}{R^{\rho(R)-\rho}} I_2 = \frac{1}{R^{\rho(R)-\rho}} \int\limits_{E_R(0)} \frac{|y|^\rho}{R^{m+2\rho-2}} Y_\rho(\psi)\, d\mu_u(y) =$$

$$= \frac{1}{R^{\rho(R)-2}} \int\limits_{E_1(0)} |x|^\rho Y_\rho(\psi)\, \Delta u(Rx)\, dV_x \qquad (20)$$

(здесь учтен тот факт, что величина $Y_\rho(\psi)$ не зависит от $|y|$, а зависит лишь от направления вектора y). Кроме того, заметим, что, как следует из определения функции $l(w)$ и ее свойств а) и б),

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{\rho(R)-2}} \int\limits_{|x|<1} Y_\rho(\psi)\,|x|^\rho \Delta u(Rx)\,dV_x = \int\limits_{|x|<1} Y_\rho(\psi)\,|x|^\rho\,\Delta l(x)\,dV_x.$$

Отсюда и из равенства (20) заключаем, что существует $\lim\limits_{R\to\infty} R^{\rho-\rho(R)} I_2$.

Существование предела $\lim\limits_{R\to\infty} R^{\rho-\rho(R)} I_1$ вытекает из следующей леммы.

Лемма 3. (В. С. Азарин*). *Пусть* $u_\alpha(x)$, $x \in \boldsymbol{R}^m$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$ — *ограниченное сверху на каждом компакте семейство субгармонических функций. Тогда если в* $D'(\boldsymbol{R}^m)$ *существует предел* $\lim\limits_{\alpha\to\infty} u_\alpha(x)$, *то он существует и в пространстве* $D'(S_R)$ *обобщенных функций на любой сфере* S_R.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что центр сферы совпадает с началом координат. Рассмотрим шар $E_{2R}(0)$. Обозначим через $G_{2R}(x, y)$ функцию Грина шар $E_{2R}(0)$, тогда при $x \in E_{2R}(0)$ $u_\alpha(x) = -\int\limits_{E_{2R}(0)} G_{2R}(x, y)\,d\mu_\alpha(y) + H_\alpha^{(2R)}(x)$,

где μ_α — мера, ассоциированная по Риссу функции u_α; $H_\alpha^{(2R)}$ — наилучшая гармоническая мажоранта функции $u_\alpha(x)$.

Из сходимости семейства $\{u_\alpha(x)\}$ в $D'(\boldsymbol{R}^m)$ следует, что и последовательность мер $\{\mu_\alpha\}$ сходится в $D'(\boldsymbol{R}^m)$. Таким образом, для любой основной функции имеем

$$\int u_\alpha(x)\,\varphi(x)\,dV_x = \int H_\alpha^{(2R)}(x)\,\varphi(x)\,dV_x - \\ - \int\left\{\int G_{2R}(x, y)\,\varphi(x)\,dV_x\right\} d\mu_\alpha. \tag{21}$$

Функция $\int G_{2R}(x, y)\,\varphi(x)\,dV_x$ непрерывна и финитна, поэтому из (21) получим, что существует $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \int\left\{\int G_{2R}(x, y)\,\varphi(x)\,dV_x\right\} d\mu_\alpha(y)$, а значит, и

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int \varphi(x)\,H_\alpha^{(2R)}(x)\,dV_x = \int \varphi(x)\,H^{(2R)}(x)\,dV_x. \tag{22}$$

Из данной в условии леммы ограниченности функции $u_\alpha(x)$ вытекает равномерная ограниченность сверху в $E_{2R}(0)$ семейства $\{H_\alpha^{(2R)}\}$ и, как следствие этого, его компактность. Учитывая теперь равенство (22), заключаем о существовании на каждом компакте в $E_{2R}(0)$ равномерного предела

$$\lim_{\alpha\to\infty} H_\alpha^{(2R)}(x) = H^{(2R)}(x). \tag{23}$$

* Устное сообщение.

Из существования предела (23) вытекает, что для любой основной на $S_R(0)$ функции $\psi(x)$ существует предел

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int H_\alpha^{(2R)}(x)\,\psi(x)\,d\sigma. \tag{24}$$

Далее заметим, что $\int G_{2R}(x,\ y)\,\psi(x)\,d\sigma$, как нетрудно видеть, является непрерывной и финитной функцией в $\boldsymbol{R}^m$ и, значит, в силу отмеченной выше сходимости мер μ_α существует предел

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int d\mu_\alpha \int G_{2R}(x,\ y)\,\psi(x)\,d\sigma. \tag{25}$$

Из (24) и (25) вытекает существование предела $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\int u_\alpha(x)\,\psi \times$ $\times\,(x)\,d\sigma$, а следовательно, сходимость $u_\alpha(x)$ в $D'(S_R(0))$.

Лемма доказана.

Замечание. Ввиду равенства (12), как нетрудно видеть, функция $l(x)$ и индикатор $h_u^*(x)$ функции $u(x)$ совпадают как элементы пространства $D'(R^m)$.

Из доказанной теоремы и теоремы Л. И. Ронкина и автора, о которой мы упоминали вначале, как следствие, получается следующая

Теорема 2. *Если $f(z)$ — целая функция вполне регулярного роста (относительно уточненного порядка $\rho(t)$) в пространстве C^n, то $\ln|f(z)|$ является субгармонической функцией вполне регулярного роста.*

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить Л. И. Ронкина за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азарин В. С. О субгармонических во всем пространстве функциях вполне регулярного роста. — Записки мех.-мат. ф-та ХГУ, Харьков, 1961, т. XXVIII, сер. 4, с. 128—148.
2. Gruman L. Entire Functions of several Variables and their Asymptotic Growth.—Arkiv för Matematik, 1971, 9, p. 141—163.
3. Агранович П. З., Ронкин Л. И. О функциях вполне регулярного роста многих переменных. Препринт ФТИНТ АН УССР, Харьков, 1976. 21 с.
4. Азарин В. С. Об асимптотическом поведении субгармонических и целых функций. —ДАН СССР, 1971, т. 229, № 6, с. 1289—1291.
5. Brelot M. Etude des fonctions sousharmoniques an voisinage d'un point sinqulier.—Ann. Jnst. Fourier, 1950, № 1, p. 121—156.
6. Азарин В. С. Автореф. дис. на соиск. учен. степени д-ра физ.-мат.наук, Харьков, 1975. 232 с.
7. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970. 591 с.
8. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964. 830 с.
9. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., «Наука», 1971. 430 с,

Поступила 13 декабря 1976 г.