УДК 517.949.21

В. Е. СЛЮСАРЧУК

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ВИНЕРА ОБ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ ФУРЬЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1. Пусть R^m — комплексное m-мерное евклидово пространство. Обозначим через $\|x\|_{R^m}$ норму вектора $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, определяемую формулой

$$\|x\|_{R^m}=\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_m|^2}.$$

Множество матриц $A: R^m \to R^m$ обозначим через $[R^m]$. $[R^m]$ есть банахово пространство с нормой

$$\|A\|_{[R^m]}=\sup\{\|Ax\|_{R^m}: x\in R^m, \|x\|_{R^m}=1\}.$$

Рассмотрим последовательность $\{C_n\}_{n\in Z}$ матриц $C_n\in[R^m]$ такую, что $\sum\limits_{n\in Z}\|C_n\|_{R^m}<\infty$ (Z — кольцо целых рациональных чисел), и матрицу-функцию $\sum\limits_{n\in Z}\lambda^n C_n$, где λ пробегает множество $\{\lambda:\lambda\in C, |\lambda|=1\}$ (C — поле комплексных чисел).

В случае, когда $C_n\in[R^1]$, известна теорема Винера [1].

Если сумма абсолютно сходящегося ряда $\sum\limits_{n\in Z} C_n\lambda^n$ нигде не обращается в нуль на $\{\lambda:\lambda\in C, |\lambda|=1\}$, то функция $\left(\sum\limits_{n\in Z} C_n\lambda^n\right)^{-1}$ также разлагается в абсолютно сходящийся ряд $\sum\limits_{n\in Z} b_n\lambda^n$ (в работе [1] теорема формулируется в обозначениях $\lambda=e^{it}$).

В дальнейшем потребуется более общее утверждение.

Теорема 1. *Если.*

1) $\sum\limits_{n\in Z}\|C_n\|_{[R^m]}<\infty$;

2) $\det\left(\sum\limits_{n\in Z}\lambda^n C_n\right)\neq 0\ \forall\lambda\in\{\lambda:\lambda\in C, |\lambda|=1\}$.

Тогда матрица-функция $\left(\sum\limits_{n\in Z}\lambda^n C_n\right)^{-1}$ *разлагается в ряд* $\sum\limits_{n\in Z}\lambda^n B_n$ $(|\lambda|=1)$, *для которого* $\sum\limits_{n\in Z}\|B_n\|_{[R^m]}<\infty$.

Доказательство. Будем обозначать $\sum\limits_{n\in Z}\lambda^n C_n=\|a_{ij}(\lambda)\|$, тогда известно [2], что

$$\left(\sum_{n\in Z}\lambda^n C_n\right)^{-1}=\frac{1}{\det\left(\sum\limits_{n\in Z}\lambda^n C_n\right)}\|A_{ij}(\lambda)\|,$$

где $A_{ij}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение к элементу $a_{ij}(\lambda)$.

Обозначим через W класс скалярных функций $f(\lambda)$, представимых в виде абсолютно сходящихся рядов $\sum\limits_{n\in Z}f_n\lambda^n$ $(|\lambda|=1)$. Этот класс является коммутативным нормированным кольцом [3]. Поскольку на основании первого условия теоремы каждый элемент $a_{ij}(\lambda)$ принадлежит W, то и $A_{ij}(\lambda)\in W$. По этой же причине и $\det\left(\sum\limits_{n\in Z}\lambda^n C_n\right)\in W$. Следовательно, согласно первому условию теоремы и теореме Винера, $\dfrac{1}{\det\left(\sum\limits_{n\in Z}\lambda^n C_n\right)}\in W$. Поэтому каждый элемент матрицы-функции $B(\lambda)=\left(\sum\limits_{n\in Z}\lambda^n C_n\right)^{-1}=\|b_{ij}(\lambda)\|$ принадлежит W, т. е. $\sum\limits_{n\in Z}|b_{ij}^{(n)}|<\infty$ $\left(b_{ij}(\lambda)=\sum\limits_{n\in Z}b_{ij}^{(n)}\lambda^n\right)$. Тогда $\left(\sum\limits_{n\in Z}\lambda^n C_n\right)^{-1}=$ $=\sum\limits_{n\in Z}\lambda^n B_n$, где $B_n=\|b_{ij}^{(n)}\|$, и $\sum\limits_{n\in Z}\|B_n\|_{[R^m]}<\infty$. Теорема доказана.

2. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\sum_{k\in Z}A_k x_{n+k}=\varepsilon g(n,x_{n+k_1},x_{n+k_2},x_{n+k_3},\ldots)+f_n\ (n\in Z),\tag{1}$$

где $A_k\in[R^m]\ \forall k\in Z$ и $\sum\limits_{k\in Z}\|A_k\|_{[R^m]}<\infty$; ε — комплексный параметр; $\{k_l\}_{l=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность целых чисел; $\{f_n\}_{n\in Z}$ — ограниченная последовательность векторов пространства R^m; вектор-функция $g(n,x_1,x_2,x_3,\ldots)$ удовлетворяет условиям

$$g(n,\theta,\theta,\theta,\ldots)=\theta\ \forall n\in Z\ (\|\theta\|_{R^m}=0),$$

$$\sup_{n\in Z}\|g(n,x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_3^{(1)},\ldots)-g(n,x_1^{(2)},x_2^{(2)},x_3^{(2)},\ldots)\|_{R^m}\leqslant\tag{2}$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\|x_k^{(1)}-x_k^{(2)}\|_{R^m}\ \left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k<\infty\right)$$

для всех $x_k^{(i)}\in R^m$ $(i=1,2)$ таких, что $\sup\limits_{k\geqslant1}(\|x_k^{(1)}\|_{R^m}+\|x_k^{(2)}\|_{R^m})<\infty$.

Под решением уравнения (1) понимается ограниченная последовательность векторов y_n такая, что

$$\sum_{k\in Z} A_k y_{n+k} \equiv \varepsilon g(n, y_{n+k_1}, y_{n+k_2}, y_{n+k_3}, \ldots) + f_n$$

для всех $n \in Z$.

Будем решать задачу о существовании и единственности почти-периодических решений (пп-решений) уравнения (1) в случае почти-периодической последовательности (пп-последовательности) векторов f_n.

Напомним, что последовательность u_n (определенная для любого целого n и принимающая значения в R^m) называется почти-периодической, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что между любыми двумя последовательными кратными $N(\varepsilon)$ найдется целое p, для которого $\| u_{n+p} - u_n \|_{R^m} < \varepsilon$, каково бы ни было n [4].

Заметим, что уравнение (1) является обобщением разностных уравнений, изучаемых, например, в работах [4, 5], и ряд утверждений этих работ будет частным случаем доказанных в дальнейшем утверждений.

Теорема 2. *Для того чтобы уравнение (1) при* $\varepsilon = 0$ *имело единственное пп-решение* x_n *для каждой пп-последовательности векторов* f_n, *необходимо и достаточно, чтобы* $\det\left(\sum_{k\in Z} \lambda^k A_k\right) \neq 0$ *для всех* $\lambda \in \{Z : Z \in C, |Z| = 1\}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть каждой пп-последовательности f_n соответствует единственное пп-решение x_n уравнения (1) при $\varepsilon = 0$. Положим $f_n = y$, где y — постоянный вектор, и пусть x_n — единственное пп-решение уравнения (1) при $\varepsilon = 0$. Вектор-функция x_{n+p} при любом $p \in Z$ также является решением этого уравнения и, в силу единственности, $x_{n+p} = x_n$, т. е. $x_n = x = \mathrm{const} \in R^m$, откуда $\sum_{k\in Z} A_k x = y$. Из произвольности y следует, что $\det\left(\sum_{k\in Z} A_k\right) \neq 0$.

Пусть теперь λ — произвольное число множества $\{Z : Z \in C, |Z| = 1, Z \neq 1\}$. Рассмотрим уравнение $\sum_{k\in Z} A_k x_{n+k} = \lambda^n_y$. Делая в нем замену $x_n = \lambda^n \xi_n$, получим уравнение $\sum_{k\in Z} \lambda^k A_k \xi_{n+k} = y$.

Повторяя приведенные выше рассуждения, получим, что $\det\left(\sum_{k\in Z} \lambda^k A_k\right) \neq 0$.

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\det\left(\sum_{k\in Z} \lambda^k A_k\right) \neq 0$ для всех $\lambda \in \{z : z \in C, |z| = 1\}$. Это условие совместно с условием $\sum_{k\in Z} \| A_k \|_{[R^m]} < \infty$

позволяет, согласно теореме 1, сделать вывод о том, что $\sum_{p\in Z}\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\lambda^p\left(\sum_{k\in Z}\lambda^k A_k\right)^{-1}d\lambda\right\|_{[R^m]}=a<\infty$. Рассмотрим последовательность векторов

$$y_n=\sum_{p\in Z}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\lambda^{n-p-1}\left(\sum_{k\in Z}\lambda^k A_k\right)^{-1}d\lambda\, f_p. \qquad (3)$$

Эта последовательность почти-периодическая, поскольку почти-периодическая последовательность f_n. Действительно, возьмем произвольное $\varepsilon>0$, ему соответствует такое число $N(\varepsilon)$, что между любыми двумя последовательными кратными $N(\varepsilon)$ найдется целое p, для которого $\sup_{n\in Z}\|f_{n+p}-f_n\|_{R^m}<\frac{\varepsilon}{a}$. Тогда

$$\sup_{n\in Z}\|y_{n+p}-y_n\|_{R^m}\leqslant\sup_{n\in Z}\left\|\sum_{q\in Z}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\lambda^{n-q-1}\left(\sum_{k\in Z}\lambda^k A_k\right)^{-1}d\lambda\,(f_{q-p}-\right.$$

$$\left.-f_q)\right\|_{R^m}\leqslant\sup_{n\in Z}\left\|\sum_{q\in Z}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\lambda^{n-q-1}\left(\sum_{k\in Z}\lambda^k A_k\right)^{-1}d\lambda\right\|_{[R^m]}\times$$

$$\times\sup_{n\in Z}\|f_{n+p}-f_n\|_{R^m}<\varepsilon$$

и, следовательно, последовательность векторов y_n почти-периодическая.

Покажем, что y_n является решением уравнения (1) при $\varepsilon=0$. Подставляя (3) в (1) при $\varepsilon=0$, получим

$$\sum_{k\in Z}A_k y_{n+k}=\sum_{k\in Z}A_k\sum_{p\in Z}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\lambda^{n+k-p-1}\left(\sum_{q\in Z}\lambda^q A_q\right)^{-1}d\lambda f_p=$$

$$=\sum_{p\in Z}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\lambda^{n-p-1}\sum_{k\in Z}\lambda^k A_k\left(\sum_{q\in Z}\lambda^q A_q\right)^{-1}d\lambda f_p=$$

$$=\sum_{p\in Z}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\lambda^{n-p-1}d\lambda f_p=f_n$$

(легко убедиться, что перемена порядка выполнения операций суммирования и интегрирования здесь законна).

Таким образом, существование пп-решения уравнения (1) при $\varepsilon=0$ доказана. Докажем его единственность. Для этого достаточно показать, что у однородного уравнения

$$\sum_{k\in Z}A_k x_{n+k}=\theta \qquad (4)$$

нет пп-решений, отличных от тривиального.

Возьмем произвольное пп-решение y_n уравнения (4). Тогда для каждого $\lambda \in \{\lambda : \lambda \in C, \ |\lambda| = 1\}$ последовательность $\lambda^n y_n$ также будет пп-последовательностью. Согласно усиленной теореме о среднем для $\lambda^n y_n$ равномерно по параметру $k \in Z$ существует конечное среднее значение

$$M\{\lambda^n y_n\} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \lambda^{n+k} y_{n+k}.$$

Очевидная цепочка равенств

$$\sum_{k \in Z} A_k y_{n+k} = \sum_{k \in Z} \lambda^{-k} A_k \lambda^{n+k} y_{n+k} =$$
$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k \in Z} \lambda^{-k} A_k \lambda^{n+k} y_{n+k} = \sum_{k \in Z} \lambda^{-k} A_k \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \lambda^{n+k} y_{n+k} =$$
$$= \sum_{k \in Z} \lambda^{-k} A_k M\{\lambda^n y_n\} = \theta$$

приводит к соотношению

$$M\{\lambda^n y_n\} = \theta \ \forall \lambda \in \{\lambda : \lambda \in C, \ |\lambda| = 1\}, \tag{5}$$

так как $\det\left(\sum_{k \in Z} \lambda^{-k} A_k\right) \neq 0$ для каждого $\lambda \in \{\lambda : \lambda \in C, \ |\lambda| = 1\}$. Но соотношение (5) имеет место тогда и только тогда, когда $y_n \equiv \theta$. Поэтому каждое пп-решение уравнения (4) тривиальное.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть.*

1) $\det\left(\sum_{k \in Z} \lambda^k A_k\right) \neq 0 \ \forall \lambda \in \{z : z \in C, |z| = 1\}$;

2) $g(n, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ — *пп-функция по n для каждой ограниченной последовательности векторов $x_n \in R^m$;*

3) *последовательность векторов f_n почти-периодическая. Тогда при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, где ε_0 — достаточно мало, уравнение (1) допускает единственное пп-решение x_n.*

При доказательстве теоремы нам потребуется следующая

Лемма. *Пусть:*

1) $g(n, x_1, x_2, x_3, \ldots)$-*пп-функция по n для каждой ограниченной последовательности векторов $x_n \in R^m$;*

2) $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *произвольная последовательность целых чисел. Тогда $g(n, y_{n+k_1}, y_{n+k_2}, y_{n+k_3}, \ldots)$ — пп-функция по n для каждой пп-последовательности векторов y_n.*

Доказательство леммы. Пусть $\{y_n\}_{n \in Z}$ — пп-последовательность. Для произвольного $\delta > 0$ найдется целое число $n_0(\delta)$, для которого $\sum_{k=n_0(\delta)+1} \alpha_k \sup_{n \in Z} \|y_n\|_{R^m} < \frac{\delta}{4}$. Найдется также множество

$Q = \{x_i : x_i \underset{\gamma(\delta)}{\in} R^m,\ \| x_i \|_{R^m} \leqslant \sup_{n \in Z} \| y_n \|_{R^m},\ i = 1, 2, \ldots, \gamma(\delta)\}$, что

$y_n \in \bigcup_{i=1} S(r, x_i)$ для всех $n \in Z$, где $r = \frac{\delta}{2}\left(3 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + 1\right)^{-1}$, $S(r, x_i) = \{x : x \in R^m,\ \| x - x_i \|_{R^m} < r\}$. Числу r соответствует число $N(r)$ [4] такое, что между двумя произвольными последовательными кратными $N(r)$ числами найдется число N, общее для функций $g(n, x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, x_3^{(l)}, \ldots)$ $(l = 1, 2, \ldots, \beta(\delta),\ \beta(\delta) \leqslant \gamma(\delta) n_0(\delta)$ и y_n, для которого

$$\sup_{n \in Z} \| g(n, x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, x_3^{(l)}, \ldots) - g(n + N, x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, x_3^{(l)}, \ldots) \|_{R^m} < r,$$

$$\sup_{n \in Z} \| y_n - y_{n+N} \|_{R^m} < r,$$

где $x_m^{(r)}$ равняется одному из элементов множества Q, если $m \leqslant n_0(\delta)$, и равняется нулевому вектору θ_1, если $m > n_0(\delta)$.

Заметим, что каждому n соответствует вектор $x_{i_n} \in Q$ такой, что $\| x_{i_n} - y_n \|_{R^m} < r$.

Покажем, что для взятого в самом начале $\delta > 0$ между двумя последовательными кратными $N(r)$ числами найдется число p, для которого

$$\sup_{n \in Z} \| g(n, y_{n+k_1}, y_{n+k_2}, y_{n+k_3}, \ldots) - g(n + p, y_{n+p+k_1}, y_{n+p+k_2}, y_{n+p+k_3}, \ldots) \|_{R^m} < \delta.$$

Этим и завершится доказательство леммы в силу произвольности δ. В качестве p возьмем число N.

Обозначая $f_\delta(n, x_1, x_2, x_3, \ldots) = g(n, x_1, x_2, \ldots, x_{n_0(\delta)}, \theta, \theta \ldots)$, получим

$$\begin{aligned}
&\sup_{n \in Z} \| g(n, y_{n+k_1}, y_{n+k_2}, y_{n+k_3}, \ldots) - \\
&- g(n + N, y_{n+N+k_1}, y_{n+N+k_2}, y_{n+N+k_3}, \ldots) \|_{R^m} \leqslant \\
&\leqslant \sup_{n \in Z} \| g(n, y_{n+k_1}, y_{n+k_2}, y_{n+k_3}, \ldots) - \\
&- f_\delta(n, y_{n+k_1}, y_{n+k_2}, y_{n+k_3}, \ldots) \|_{R^m} + \\
&+ \sup_{n \in Z} \| f_\delta(n, y_{n+k_1}, y_{n+k_2}, y_{n+k_3}, \ldots) - \\
&- f_\delta(n, x_{i_{n+k_1}}, x_{i_{n+k_2}}, x_{i_{n+k_3}}, \ldots) \|_{R^m} + \\
&+ \sup_{n \in Z} \| f_\delta(n, x_{i_{n+k_1}}, x_{i_{n+k_2}}, x_{i_{n+k_3}}, \ldots) - \\
&- f_\delta(n + N, x_{i_{n+k_1}}, x_{i_{n+k_2}}, x_{i_{n+k_3}}, \ldots) \|_{R^m} + \\
&+ \sup_{n \in Z} \| f_\delta(n + N, x_{i_{n+k_1}}, x_{i_{n+k_2}}, x_{i_{n+k_3}}, \ldots) -
\end{aligned}$$

$$- f_\delta (n+N, y_{n+N+k_1}, y_{n+N+k_2}, y_{n+N+k_3}, \ldots) \|_{R^m} +$$

$$+ \sup_{n \in Z} \| f_\delta (n+N, y_{n+N+k_1}, y_{n+N+k_2}, y_{n+N+k_3}, \ldots) -$$

$$- g (n+N, y_{n+N+k_1}, y_{n+N+k_2}, y_{n+N+k_3}, \ldots) \|_{R^m} < \frac{\delta}{4} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k r + r + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k r + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k r + \frac{\delta}{4} = \delta.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Первое условие теоремы позволяет на основании доказательства теоремы 2 заменить уравнение (1) уравнением

$$x_n = \varepsilon \sum_{p \in Z} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} \lambda^{n-p-1} \Big(\sum_{k \in Z} \lambda^k A_k \Big)^{-1} d\lambda g (p, x_{p+k_1}, x_{p+k_2}, x_{p+k_3}, \ldots) + g_n; \tag{6}$$

где $g_n = \sum_{p \in Z} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} \lambda^{n-p-1} \Big(\sum_{k \in Z} \lambda^k A_k \Big)^{-1} d\lambda f_p (\{g_n\}_{n \in Z}$ является согласно теореме 2 векторной пп-последовательностью). Из леммы и доказательства теоремы 2 следует, что с помощью соотношения

$$u_n = \varepsilon \sum_{p \in Z} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} \lambda^{n-p-1} \Big(\sum_{k \in Z} \lambda^k A_k \Big)^{-1} d\lambda g (p, x_{p+k_1}, x_{p+k_2}, x_{p+k_3}, \ldots)$$

определяется в пространстве почти-периодических векторных последовательностей (обозначим его через **B**) оператор A, по отношению к которому пространство **B** является инвариантным. Этот же оператор для каждого $\varepsilon \in \{\lambda : \lambda \in C, |\lambda| < \varepsilon_0\}$, где

$$\varepsilon_0 \Big[\sum_{p \in Z} \Big\| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} \lambda^p \Big(\sum_{k \in Z} \lambda^k A_k \Big)^{-1} d\lambda \Big\|_{[R^m]} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \Big) \Big]^{-1},$$

очевидно, будет в **B** (**B** — полное пространство с нормой $\sup_{n \in Z} \| u_n \|_{R^m}$) оператором сжатия, поэтому уравнение (6) в силу теоремы о сжатых отображениях, а следовательно, и уравнение (1) имеет единственное пп-решение x_n для каждой пп-последовательности f_n.

Теорема доказана.

С помощью незначительного изменения доказательства теоремы 3 доказывается с очевидностью

Теорема 4. *Пусть:*

1) $\det \Big(\sum_{k \in Z} \lambda^k A_k \Big) \neq 0 \ \forall \lambda \in \{z : z \in C, |z| = 1\}$;

2) *соотношение (2) выполняется для всех* $x_k^{(i)} \in R^m$ $(i = 1, 2)$ таких, что $\sup\limits_{k \geqslant 1} (\| x_k^{(1)} \|_{R^m} + \| x_k^{(2)} \|_{R^m})^k < r < \infty$;

3) $g(n, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ — *пп-функция по* n *для каждой последовательности векторов* $x_n \in R^m$, *для которой* $\sup\limits_{k \geqslant 1} \| x_k \|_{R^m} < r$.

Тогда найдется такое число $\rho > 0$, *что для каждой пп-последовательности векторов* f_n, *удовлетворяющей условию* $\sup\limits_{n \in Z} \| f_n \|_{R^m} < \rho$ *при* $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, *где* ε_0 — *достаточно мало, уравнение* (1) *допускает единственное пп-решение* x_n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М., Физматгиз, 1963. 256 с.
2. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М., Гостехиздат, 1951. 271 с.
3. Наймарк М. А. Нормированные кольца. М., «Наука», 1968. 664 с.
4. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М., «Мир», 1971. 302 с.
5. Штефаницэ И. М. Устойчивость по Пуассону решения линейных систем разностных уравнений.— «Дифференциальные уравнения», 1972, т. 8, № 11, с. 2062—2072.

Поступила 25 мая 1974 г.