УДК 519.4+513.8

В. В. СИНЯВСКИЙ

О СПЕКТРЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЫ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим сильно непрерывное неквазианалитическое* представление $T: g \to T^g$ связной нильпотентной группы Ли G непрерывными операторами T^g локально выпуклого бочечного полного пространства E. В этой работе мы изучим спектр семейства операторов $\{T^g\}$, $g \in G$.

Пусть W_x^G — замкнутая абсолютно выпуклая оболочка ограниченного множества $V_x^G = \{\alpha(g)^{-1} T^g x\}$, $g \in G$.

Рассмотрим банахово пространство $B_x^G = \bigcup\limits_{\lambda > 0} \lambda W_x^G$ и представление* T_x^G, наведенное исходным представлением T в банаховом пространстве B_x^G. Определим спектр семейства операторов $\{T^g\}$, $g \in G$ (сравни [1, 2]).

Определение. *Спектром представления T в пространстве E назовем множество $\sigma_E(T)$ унитарных характеров группы G:*

$$\sigma_E(T) = \overline{\bigcup_{x \in K} \sigma(T_x^G)};$$

K — множество тех элементов $x \in E$, для которых банаховские представления T_x^G непрерывны в операторной норме; $\sigma(T_x^G)$ — спектр банаховского представления T_x^G, определенный в работе [3] *(см. также [2, 4]).*

Для отделимости спектра [1] необходимо дополнительное условие [2].

Условие. Спектры всех операторов T^γ, где $\gamma \in G'$ — коммутант группы G, состоят из одной точки $\lambda = 1$.

Не уменьшая общности, можно считать группу G односвязной, тогда группа G/G' и сопряженная к ней группа $(G/G')^*$ изоморфны группе по сложению пространства R^n. Будем называть множества вида $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n$, где Δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — компактные подмножества прямой $\boldsymbol{R}$, «кирпичами».

Теорема 1. *Спектр $\sigma_E(T)$ представления T, удовлетворяющего условию 1, не пуст и отделяется «кирпичами».*

Теорема 1 следует из следующего предложения.

Предложение. *В условиях теоремы 1 имеют место следующие утверждения:*

а) спектр представления T не пуст и отделим «кирпичами» [*1, определение 3*];

в) если T — банаховское представление, то $\sigma_E(T) = \sigma(T)$;

---

* Все используемые в этой работе понятия и обозначения приведены в работе [1].

c) пусть F — полное бочечное пространство, $F \subset E$ инвариантно относительно представления T. Топология в F сильнее, чем топология, индуцированная из пространства E, но слабее банаховской на каждом пространстве $B_x^G \subset F$. Обозначим через T_F представление, наведенное на пространстве F представлением T. Наконец, предположим, что замыкания в пространстве E ограниченных множеств из F содержатся в F. Тогда $\sigma_F(T_F) = \sigma_E(T/F)$. Вертикальная черта означает ограничение представления на инвариантное не обязательно замкнутое подпространство.

Доказательство. Рассмотрим группу $G/G' \cong R^n$. Представим ее в виде прямой суммы двух подгрупп $N' \cong R^k$ и $M' \cong R^{n-k}$. Тогда $G = NM$, где N и M — нормальные делители группы G, $N' = N/G'$, $M' = M/G'$. Доказательство будем вести индукцией по размерности группы G. Основные трудности вызывает индуктивный переход от подгрупп N и M к группе G.

Лемма 1. *Пусть спектр $s(T)$ в данном классе P представлений T отделим, а спектр $u(T)$ не пуст, замкнут и не расширяется при ограничениях представлений на подпространства. Тогда, если для всех $T \in P$, $s(T) \cap u(T) \neq \varnothing$, то $s(T) \subset u(T)$.*

Доказательство аналогично второй части доказательства теоремы 2 из работы [5].

Основанием индукции служит случай абелевой группы G, для которого утверждения *a*) и *в*) доказаны в работе [1]. Для доказательства утверждения *c*) нужно рассмотреть B-спектры представлении T_F и T/F и применить к ним теорему 2 из [1] и лемму 1.

Лемма 2. *Спектры операторов T_x^γ, $\gamma \in G'$, задающих представление $T_x^{G'}$, состоят из одного числа $\lambda = 1$.*

Доказательство. Рассмотрим представления T^G и T_x^G, представляющие собой ограничения представлений T и T_x^G на циклическую подгруппу $C = \{\gamma^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Пусть число $\lambda_0 \neq 1$ входит в спектр оператора T_x^γ, тогда в спектр $\sigma(T_x^0)$ входит характер $\chi(\gamma^n) = \lambda_0^n$. В силу леммы 1 этот характер входит в спектр $\sigma_E(T^C)$. Значит [1], число $\lambda_0 \neq 1$ входит в спектр оператора T^γ. Противоречие. Лемма 2 доказана.

Представим «кирпич» Δ в виде $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$, где Δ_1 и Δ_2 — «кирпичи» из пространств $(N')^*$ и $(M')^*$. По предложению индукции представления T^N и T^M имеют отделимые спектры. Пусть $E^N(\Delta_1)$ и $E^M(\Delta_2)$ — спектральные подпространства представлений T^N и T^M соответственно. Положим $E(\Delta) = E^N(\Delta_1) \cap E^M(\Delta_2)$ и последовательно проверим выполнение всех свойств 1 — 4 [1, определение 3] спектральных подпространств представления T для подпространства $E(\Delta)$.

1. Пусть $B_x^N \subset E^N(\Delta_1)$; нетрудно видеть, что любой оператор T^g, $g \in G$ задает изоморфизм банаховых пространств B_x^N и B_y^N,

$y = T^g x$ и представление T_y^N непрерывно в операторной норме. Поэтому, если $\{x_k\}_1^\infty$ — квазисобственная последовательность в пространстве B_x^G, определяющая характер $\chi(n)$, $n \in N$, то $\{T^g x_k\}_1^\infty$ — квазисобственная последовательность в пространстве B_y^G, определяющая характер $\chi^g(n) = \chi(gng^{-1})$. Ввиду условия $\chi^g(n) = \chi(n)$. Следовательно, $T^g[E^N(\Delta_1)] \subset E^N(\Delta_1)$. Аналогично $T^g[E^M(\Delta_2)] \subset \subset E^M(\Delta_2)$. Значит, подпространство $E(\Delta)$ инвариантно относительно операторов T^g, $g \in G$.

Покажем теперь, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U единичного элемента группы G, что $\| T_x^u - \mathrm{I} \| < \varepsilon$ при $u \in U$ независимо от элемента $x \in E(\Delta)$. По предположению индукции имеем

$$(T^n - \mathrm{I})\, W_x^N \subset \varepsilon W_x^N, \ \forall x \in E^N(\Delta_1), \ \forall n \in U^N.$$

Здесь $U^N\,(U^M)$ — некоторая окрестность группы $N\,(M)$. По доказанному выше $y = T^g x \in E^N(\Delta_1)$, $g \in G$, значит,

$$(T^n - \mathrm{I})\, y \in (T^n - \mathrm{I})\, W_y^N \subset \varepsilon W_y^N.$$

Теперь нетрудно показать, что

$$(T^n - \mathrm{I})\, W_x^G \subset \varepsilon W_x^G.$$

В качестве искомой окрестности U можно взять $U = U^N U^M$.

На основе доказанного свойства 1 отделимости спектра $\sigma_E(T)$ по индукции заключаем, что спектр $\sigma_E(T)$ не пуст.

Лемма 3. *Пусть $F(\Delta)$ — спектральное подпространство представления T_F (утверждение c), тогда замыкание в пространстве E любого ограниченного множества из $F(\Delta)$ содержится в $F(\Delta)$.*

Доказательство. Если группа G абелева, то, рассмотрев B-спектры представлений T_F и T, заключаем, что $F(\Delta) \subset E(\Delta)$. Пусть элемент y входит в замыкание в пространстве E ограниченного множества $M \subset F(\Delta)$, тогда банахово пространство B_y^G входит в подпространство $E(\Delta)$. По теореме 2 из [1] B-спектр элемента y относительно представления T_y^G входит в компакт Δ. По условию топология в пространстве F слабее, чем в пространстве B_y^G, значит, B-спектр элемента y относительно представления T_F также содержится в «кирпиче» Δ. Общий случай доказывается индукцией посредством ограничения представления T_F на подгруппы N и M.

2. Пусть характер χ_0 принадлежит спектру $\sigma_E(T/E(\Delta))$. Покажем, что $\chi_0 \in \Delta$. Для любой окрестности-«кирпича» V характера χ_0 найдутся характер $\chi_1 \in \sigma(T_x^G)$ и элемент $x \in E(\Delta)$ такие, что $\chi_1 \in V$. Рассмотрим спектральное подпространство F, построенное по представлению T_x^G и «кирпичу» V в работе [2]. В силу леммы 3

пространство F так же, как и пространство B_x^G, удовлетворяет условию утверждения c). Рассмотрим ограничение S представления T_x^G на подгруппу N и подпространство F и, используя утверждения a), b) и c) предложения, заключаем:

$$\Delta_1 \supset \sigma_E(T^N \mid F) = \sigma_F(T_F^N) = \sigma(S) \subset V_1. \qquad (*)$$

Проведя аналогичные рассуждения для подгруппы M, заключаем, что характер χ_0 входит в замыкание «кирпича» Δ.

3. Пусть характер χ_0 принадлежит внутренности пересечения $\Delta \cap \sigma_E(T)$ относительно спектра $\sigma_E(T)$. Тогда для любой окрестности-«кирпича» V характера χ_0 найдутся характер $\chi_1 \in V$ и элемент $x \in E$ такие, что $\chi_1 \in \sigma(T_x^G)$. Из правого включения в $(*)$ следует, что $F \subset E^N(V_1)$.

Аналогично заключаем, что $F \subset E^M(V_2)$. Значит, $F \subset E(\Delta)$, и характер χ_0 входит в спектр $\sigma_E(T \mid E(\Delta))$.

4. Пусть подпространство $L(\Delta)$ инвариантно относительно операторов T^g, $g \in G$ и обладает свойством 2; тогда $L(\Delta) \subset E(\Delta)$. Действительно, рассмотрим ограничение S представления T^N на подпространство $L(\Delta)$. По предположению индукции представление S имеет отделимый спектр $\sigma_E(S)$, а значит, по лемме 1 $\sigma_E(S) \subset \Delta_1$, следовательно, $L(\Delta) \subset E^N(\Delta_1)$.

Итак, мы провели индуктивный переход для утверждения a). Выведем теперь b) и c).

b) Если представление T банаховское, то оба включения $\sigma_E(T) \subset \sigma(T)$ и $\sigma(T) \subset \sigma_E(T)$ следуют из леммы 1.

c) Равенство $\sigma_F(T_F) = \sigma_E(T/F)$ также следует из леммы 1, так как отделимость обоих спектров уже доказана.

Предложение доказано.

Теорема 2. *Для любого покрытия $\{\Delta^\nu\}_{\nu=1}^\infty$ спектра $\sigma_E(T)$ представления T «кирпичами» система спектральных подпространств $\{E(\Delta^\nu)\}_{\nu=1}^\infty$ полна в пространстве E.*

Доказательство. Предположим сначала, что спектр $\sigma_E(T)$ компактен. Тогда для всех $x \in E$ представление T_x^G непрерывно по операторной норме. Значит [2], элемент x в любой своей окрестности содержит линейную комбинацию элементов из спектральных подпространств $B_x^G(\Delta^\nu) \subset E(\Delta^\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ общий случай сводится к разобранному индукцией по размерности группы с применением теоремы 1.

Автор благодарит Ю. И. Любича за постановку задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Синявский В. В. О спектральной теории представлений в топологических пространствах.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 24, Харьков, 1975, с. 150—156.

2. Гурарий Д. Л. Об отделимости спектра представлений связной нильпотентной группы ЛИ.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 21, Харьков, 1974, с. 41—51.
3. Любич Ю. И. О спектре представления топологической абелевой группы.— ДАН СССР, 1971, т. 200, № 4, с. 777—780.
4. Гурарий Д. Л., Любич Ю. И. Бесконечномерный аналог теоремы Ли о весе.— «Функц. анализ и его приложения», 1973, т. 7, № 1, с. 41—44.
5. Фельдман Г. М. Гармонический анализ неунитарных представлений локально компактных абелевых групп.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 17, Харьков, 1973, с. 169—182.

Поступила 14 ноября 1974 г.