УДК 513.88:513.83

И. И. ПЕРЕПЕЧАЙ, канд. физ.-мат. наук

М-БОЧЕЧНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ *М*-ПРОСТРАНСТВА

Известно, что топология топологического M-пространства может быть описана с помощью решеточных гомоморфизмов из сопряженного пространства. В настоящей статье (§ 1) в этом направлении изучаются M-бочечные пространства, т. е. топологические M-пространства, в которых каждая бочка, являющаяся нормальной подрешеткой, является окрестностью нуля. В § 2 даются необходимые и достаточные условия бочечности (порядковой инфрабочечности) M-бочечных пространств. Показано также, что пространство непрерывных функций с топологией компактной сходимости бочечно тогда и только тогда, когда оно M-бочечно.

§ 0. В этой статье (X, C) означает векторную решетку с положительным конусом C. Пусть B — подмножество в X. B называется нормальным, если из $x \in B$, $y \in X$ и $|y| \leqslant |x|$ следует $y \in B$. B называется подрешеткой, если из x, $y \in B$ следует, что $x \vee y \in B$ и $x \wedge y \in B$. Множество, являющееся нормальной подрешеткой, условимся в дальнейшем называть M-множеством. Линейный функционал f на X называется решеточным гомоморфизмом, если $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ для всех x, $y \in X$.

Пусть (X, C) — векторная решетка. Топология τ на (X, C) называется нормальной, если она имеет базис окрестностей нуля, состоящий из нормальных множеств, а (X, C) с такой топологией называется топологической векторной решеткой и обозначается (X, C, τ) (если в этом есть необходимость). Топологическая векторная решетка называется топологическим M-пространством [1], если в ней существует базис окрестностей нуля, состоящий из подрешеток. Хорошо известно, что в топологическом M-пространстве имеется базис окрестностей нуля, состоящий из M-множеств. Так как каждое M-множество выпукло, то топологическое M-пространство является локально выпуклым. Если оно, кроме того, отделимо, то на нем существует достаточное (чтобы отделять точки) множество непрерывных решеточных гомоморфизмов. В дальнейшем мы предполагаем все рассматриваемые пространства отделимыми.

Линейный функционал f на X называется положительным, если $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \geqslant 0$. Через X' (соответственно C') обозначим, как обычно, топологическое сопряженное к X (соответственно множество всех положительных линейных функционалов из X'). Множество всех решеточных гомоморфизмов из X' будем обозначать через L'. Хорошо известно, что если X — топологическая векторная решетка, то (X', C') будет векторной решеткой.

§ 1. Определение 1.1. *Будем называть топологическое M-пространство M-бочечным пространством, если в нем каждая M-бочка (т. е. бочка, являющаяся M-множеством) является окрестностью нуля.*

Существуют [2] M-бочечные, но не бочечные пространства.

Следующие ниже предложение 1.1 и следствие 1.1 непосредственно вытекают из леммы 1.1, доказанной в [3].

Лемма 1.1. *Пусть U — замкнутая M-окрестность нуля в топологическом M-пространстве X. Тогда $U = (U^0 \bigcap L')^0$.*

Предложение 1.1. *Для того чтобы топологическое M-пространство X было M-бочечным, необходимо и достаточно, чтобы каждое $\sigma(X', X)$-ограниченное множество из L' было равностепенно непрерывным.*

Следствие 1.1. *Пусть X — M-бочечно. Тогда его топология является топологией равномерной сходимости на всех $\sigma(X', X)$-компактных множествах из L'.*

Отметим, что топология топологического M-пространства является топологией равномерной сходимости на некоторой совокупности $\sigma(X', X)$-компактных множеств решеточных гомоморфизмов из L' (см. [3]).

Пусть X и Y — векторные решетки. Линейное отображение T X в Y называется l-гомоморфизмом, если $T(x \bigvee y) = T(x) \bigvee T(y)$ для всех $x, y \in X$.

Непосредственно из определения l-гомоморфизма следует

Предложение 1.2. *Пусть (X, C, τ) и (Y, K, Ω) — топологические M-пространства и T-непрерывный l-гомоморфизм X в Y. Если (X, C, τ) — M-бочечное пространство и T — почти открытое отображение, то (Y, K, Ω) — M-бочечное пространство.*

Следствие 1.2. *Фактор-пространство M-бочечного пространства M-бочечно.*

Для M-бочечных пространств имеет место следующий аналог теоремы Банаха — Штейнгауза.

Теорема 1.1. *Пусть X — M-бочечное пространство и Y — топологическое M-пространство. Если последовательность (T_n) непрерывных l-гомоморфизмов X в Y поточечно сходится к T_0, то T_0 — непрерывный l-гомоморфизм и сходимость равномерна на каждом предкомпактном множестве из X.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы Банаха — Штейнгауза.

Пусть (X, C, τ) — топологическая векторная решетка. Обозначим через $|\sigma|(X', X)$ топологию Дьедонне в X', т. е. топологию, определяемую полунормами $p_u(f) = |f|(u)$ для всех $f \in X'$, где $u \in C$. Аналогично определяется топология $|\sigma|(X, X')$ в X. Очевидно, что $\sigma(X', X) \leqslant |\sigma|(X', X) \leqslant \beta(X', X)$. Поскольку топология $|\sigma|(X', X)$ нормальна, то $X''_{|\sigma|} = (X', |\sigma|(X', X))'$ есть векторная решетка относительно естественного отношения порядка в $X''_{|\sigma|}$. Будем обозначать через $\beta(X''_{|\sigma|}, L')$ топологию равномерной сходимости в $X''_{|\sigma|}$ на всех $\sigma(X', X)$-ограниченных множествах из L', а через $\beta(X'', X')$ — топологию равномерной сходимости в $X'' = (X', \beta(X', X))'$ на всех $\beta(X', X)$-ограниченных множествах из L'. Обозначим далее через $I_{|\sigma|}$ отображение X в $X''_{|\sigma|}$, определяемое формулой $I_{|\sigma|}(x)(f) = f(x)$ для всех $f \in X'$ и являющееся l-гомоморфизмом (см. [4]). Тогда имеет место следующая

Лемма 1.2. *Если (X, C, τ) — топологическое M-пространство, то отображение $I_{|\sigma|}$: $(X, C, \tau) \to (X''_{|\sigma|}, \beta(X''_{|\sigma|}, L'))$ является открытым.*

Доказательство. Пусть U — любая замкнутая M-окрестность нуля в (X, C, τ). Так как (X, C, τ) — топологическое M-пространство, то существует ([3]) $\sigma(X', X)$-компактное множество $B \subset L'$ такое, что $U = \{x \in X : |<x, f>| \leqslant 1 \, (f \in B)\}$. Но $U'' = \{\hat{x} \in X''_{|\sigma|} : |<\hat{x}, f>| \leqslant 1 \, (f \in B)\}$ является $\beta(X''_{|\sigma|}, L')$ — окрестностью нуля в $X''_{|\sigma|}$. Очевидно, что $I_{|\sigma|}(U) = U'' \bigcap I_{|\sigma|}(X)$ и, следовательно, $I_{|\sigma|}(U)$ есть окрестность нуля в $I_{|\sigma|}(X)$ в топологии, индуцируемой $\beta(X''_{|\tau|}, L')$-топологией из $X''_{|\sigma|}$.

Условимся в дальнейшем для любого множества $A \subset X'$ обозначать (там, где это необходимо) через $A^0(X)$ (соответственно $A^0(X''_{|\sigma|})$) его поляру в X (соответственно $X''_{|\sigma|}$).

Предложение 1.3. *Пусть (X, C, τ)-топологическое M-пространство. Тогда отображение*

$$I_{|\sigma|} : (X, C, \tau) \to (X''_{|\sigma|}, \ \beta(X''_{|\sigma|}, L'))$$

непрерывно тогда и только тогда, когда (X, C, τ) — M-бочечно.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть B — любое $\sigma(X', X)$-ограниченное множество в L'. Тогда $B^0(X''_{|\sigma|})$ есть по определению $\beta(X''_{|\sigma|}, L')$-окрестность нуля в $X''_{|\sigma|}$. Следовательно, $I^{-1}_{|\sigma|}[B^0(X''_{|\sigma|})]$ есть τ-окрестность нуля в (X, C, τ). Но $I^{-1}[B^0(X''_{|\sigma|})] = B^0(X)$ и поэтому B равностепенно непрерывно. В силу предложения 1.1 (X, C, τ) M-бочечно.

Достаточность. Пусть V'' — любая $\beta(X''_{|\sigma|}, L')$-окрестность нуля в $X''_{|\sigma|}$. Тогда существует $\sigma(X', X)$-ограниченное множество $B \subset L'$ такое, что $B^0(X''_{|\sigma|}) \subset V''$. Так как (X, C, τ) M-бочечно, то B равностепенно непрерывно (предложение 1.1) и, значит, $B^0(X)$ есть τ-окрестность нуля в (X, C, τ). Имеем, далее, $I_{|\sigma|}[B^0(X)] = B^0(X''_{|\sigma|}) \bigcap I_{|\sigma|}(X)$, откуда $B^0(X) \subset I^{-1}_{|\sigma|}[B^0(X''_{|\sigma|}) \bigcap I_{|\sigma|}(X)] \subset I^{-1}_{|\sigma|}(V'')$, т. е. $I_{|\sigma|}$ непрерывно.

Определение 1.2. *Будем называть топологическое M-пространство (X, C, τ) M-рефлексивным, если оно изоморфно (как векторная решетка и топологическое пространство) пространству $(X''_{|\sigma|}, \beta(X''_{|\sigma|}, L'))$.*

Теорема 1.2. *Пусть* (X, C, τ) — *топологическое M-пространство. Для того чтобы* (X, C, τ) *было M-рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы оно было M-бочечным и чтобы каждое слабо ограниченное множество из C было относительно слабо компактным.*

Прежде чем доказать теорему заметим, что для $\sigma(X, X')$- и $|\sigma|(X, X')$-топологий ограниченные множества в C одни и те же [5]. Кроме того, $|\sigma|(X, X')$-топология является нормальной и потому для любого $|\sigma|(X, X')$-ограниченного множества $B \subset X$ его нормальная оболочка $N(B) = \{x : |x| \leqslant |y| (y \in B)\}$ тоже $|\sigma|(X, X')$-ограничена.

Доказательство теоремы. *Необходимость.* Так как $I_{|\sigma|}$ непрерывно, то по предложению 1.3 (X, C, τ) — M-бочечно. Далее, так как $X''_{|\sigma|} = (X', |\sigma|(X', X))' = X$, то $|\sigma|(X', X) \leqslant \tau(X', X)$, где $\tau(X', X)$ — топология Макки в X'. Но тогда каждое $|\sigma|(X, X')$-ограниченное множество из X содержится в некотором $\sigma(X, X')$-компактном. Если же множество $B \subset C$ и $\sigma(X, X')$-ограничено, то по замечанию перед доказательством теоремы оно $|\sigma|(X, X')$-ограничено и, следовательно, относительно $\sigma(X, X')$-компактно.

Достаточность. Из леммы 1.2 и предложения 1.3 следует, что $I_{|\sigma|}$ — гомеоморфизм (X, C, τ) в $(X''_{|\sigma|}, \beta(X''_{|\sigma|}, L'))$. Докажем, что $X = X''_{|\sigma|}$. Для этого достаточно показать, что каждое $|\sigma|(X, X')$-ограниченное множество в X относительно $\sigma(X, X')$-компактно. Пусть B — $|\sigma|(X, X')$ — ограниченное множество. Тогда его нормальная оболочка $N(B)$ тоже $|\sigma|(X, X')$-ограничена. Кроме того, $N(B) \subset N(B) \cap C - N(B) \cap C$. Для завершения доказательства осталость теперь заметить, что в силу условия теоремы множество $N(B) \cap C$ относительно $\sigma(X, X')$-компактно.

§ 2. Очевидно, что каждое бочечное пространство является M-бочечным. В этом параграфе даются некоторые необходимые и достаточные условия бочечности M-бочечного пространства.

Определение 2.1. *Пусть* (X, C, τ) — *топологическое M-пространство и* τ' — *какая-либо топология в* X'. *Будем называть* $L' \subset X'$ τ'*-насыщенным в* X', *если для любого* τ'*-ограниченного множества* $A \subset X'$ *найдется* τ'*-ограниченное множество* $B \subset L'$ *такое, что* $A \subset \overline{\Gamma(B)}$, *где* $\overline{\Gamma(B)}$ τ'*-замкнутая выпуклая уравновешенная оболочка множества B.*

Предложение 2.1. *Пусть* (X, C, τ) — *M-бочечное пространство. Для того чтобы оно было бочечным, необходимо и достаточно, чтобы* L' *было* $\sigma(X', X)$*-насыщенным в* X'.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть (X, C, τ) — бочечное топологическое M-пространство и B — любое $\sigma(X', X)$-ограниченное множество в X'. Тогда B^0 — окрестность нуля в X и, следовательно, существует в X замкнутая M-окрестность нуля U такая, что $U \subset B^0$. Так как U^0 — нормальное множество [6], то имеем $B \subset B^{00} \subset U^0 \subset U^0 \cap C' - U^0 \cap C'$. Далее, поскольку U — замкнутая M-окрестность, то $U^0 \cap C'$ совпадает с $\sigma(X', X)$-замкнутой выпуклой оболочкой множества $U^0 \cap L'$ [7], которая, очевидно, содержится в $\overline{\Gamma(U^0 \cap L')}$. Таким образом, $B \subset \overline{\Gamma(U^0 \cap L')} - \overline{\Gamma(U^0 \cap L')} = \overline{\Gamma(2U^0 \cap L')}$.

Достаточность. Пусть V — бочка в X. Тогда V^0 — $\sigma(X', X)$-ограниченное множество в X'. Так как по условию L' — $\sigma(X', X)$-насыщенное множество в X', то найдется $\sigma(X', X)$-ограниченное множество $B \subset L'$ такое, что $V^0 \subset \overline{\Gamma(B)}$. Тогда $V = V^{00} \supset [\overline{\Gamma(B)}]^0 = B^0$. Но так как X M-бочечно, то B^0 — окрестность нуля в X и, тем более, V — окрестность нуля.

Предложение 2.2. *Пусть (X, C, τ) — M-бочечное пространство. Тогда оно бочечно тогда и только тогда, когда $\beta(X, X')$-топология в X есть топология, индуцируемая $\beta(X''_{|\sigma|}, L')$-топологией из $X''_{|\sigma|}$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть (X, C, τ) — бочечно и V — $\beta(X, X')$-окрестность нуля в X. Тогда существует $\sigma(X', X)$-ограниченное множество $B \subset X'$ такое, что $B^0(X) \subset V$. Так как X бочечно, то в силу предложения 2.1 найдется $\sigma(X', X)$-ограниченное множество $A \subset L'$ такое, что $B \subset \overline{\Gamma(A)}$. Ясно, что $A^0(X''_{|\sigma|})$ есть $\beta(X''_{|\sigma|}, L')$-окрестность нуля в $X''_{|\sigma|}$. Но $A^0(X''_{|\sigma|}) \cap X = A^0(X) = [\overline{\Gamma(A)}]^0(X) \subset B^0(X) \subset V$, т. е. V — окрестность нуля в индуцированной топологии. Этим показано, что топология $\beta(X, X')$ слабее топологии, индуцированной в X $\beta(X''_{|\sigma|}, L')$-топологией. Обратное же очевидно.

Достаточность. Покажем, что L' $\sigma(X', X)$ — насыщенное множество в X'. Пусть B — $\sigma(X', X)$-ограниченное множество в X'. Тогда $B^0(X)$ есть $\beta(X, X')$-окрестность нуля в X и, следовательно, найдется $\sigma(X', X)$-ограниченное множество $A \subset L'$ такое, что $B^0(X) \supset A^0(X''_{|\sigma|}) \cap X = A^0(X)$. Но тогда $A^{00} \supset B^{00} \supset B$ или $\overline{\Gamma(A)} \supset B$.

Топологическая векторная решетка (X, C, τ) называется порядково инфрабочечным пространством [4], если каждая бочка в X, поглощающая все порядковые интервалы, является окрестностью нуля.

Предложение 2.3 [4]. *Для того чтобы топологическая векторная решетка была порядково инфрабочечным пространством, необходимо и достаточно, чтобы каждая нормальная бочка в X была окрестностью нуля или чтобы каждое $|\sigma|(X', X)$-ограниченное множество из X' было равностепенно непрерывным.*

Очевидно, что порядковое инфрабочечное топологическое M-пространство является M-бочечным.

Предложение 2.1 и следующие ниже предложения показывают, что свойство топологического M-пространства быть «бочечным в более или менее сильной форме» зависит от «плотности» множества L' в X'.

Предложение 2.4. *Для того чтобы M-бочечное пространство (X, C, τ) было порядково инфрабочечным, необходимо и достаточно, чтобы L' было $|\sigma|(X', X)$-насыщенным множеством в X'.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть B — $|\sigma|(X', X)$-ограниченное множество в X'. Тогда оно равностепенно непрерывно в силу предложения 2.3. Поэтому B^0 — окрестность нуля в X. Так как X — топологическое M-пространство, то существует замкнутая M-окрестность нуля U в X такая, что $U \subset B^0$. Дальше, как в доказательстве предложения 2.1.

Достаточность. В силу предложения 2.3 достаточно показать, что в X каждая нормальная бочка является окрестностью нуля. Пусть V — нормальная бочка в X. Тогда $V^0 \subset V^0 \cap C' - V^0 \cap C'$. Так как $V^0 \cap C'$ $\sigma(X', X)$-ограничено и, следовательно, $|\sigma|(X', X)$-ограничено, то V^0 $|\sigma|(X', X)$-ограничено. По предположению существует $\sigma(X', X)$-ограниченное множество $A \subset L'$ такое, что $V^0 \subset \overline{\Gamma(A)}$. Но тогда $V = V^{00} \supset [\overline{\Gamma(A)}]^0 = A^0$. Так как X M-бочечно, то A^0 — окрестность нуля и, тем более, V — окрестность нуля.

В заключение обратимся к частному случаю, когда X есть пространство непрерывных функций с топологией компактной сходимости.

Пусть S — вполне регулярное пространство и $C(S)$ — пространство всех непрерывных вещественных функций на S, наделенное топологией равномерной сходимости τ_c на всех компактах из S. Относительно естественного отношения порядка $(C(S), \tau_c)$ будет топологическим M-пространством. Пусть S' — образ S при естественном вложении в $C(S)'$. В [8,9] установлено, что для того чтобы $(C(S), \tau_c)$ было бочечным, необходимо и достаточно, чтобы каждое слабо ограниченное множество из S' было равностепенно непрерывным. Так как $S' \subset L'$, то в силу предложения 1.1 имеем

Теорема 2.1. *Пусть S — вполне регулярное пространство. Тогда пространство $(C(S), \tau_c)$ бочечно тогда и только тогда, когда оно M-бочечно.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jameson G. Topological M-spaces.— “Math. Z.”, 1968, vol. 103, № 2, p. 139—150.
2. Ng K. F. Solid sets in ordered topological vector spaces.— “Proc. London Math. Soc.”, 1971, vol. 22, № 1, p. 106—120.
3. Перепечай И. И. Теорема Хана—Банаха для решеточных многообразий в топологических M-пространствах.— «Вестник ХГУ», 1972, вып. 37, с. 48—62.
4. Wond Y. C. Order infrabarrelled Riesz spaces.— “Math. Ann.”, 1969, vol. 183, p. 17—32.
5. Wong Y. C. Locally o—convex Riez spaces.— “Proc. London Math. Soc.”, 1969, vol. 19, № 2, p. 289—309.
6. Roberts G. Topolagies in vector lattices.— “Proc. Cambr. Philos. Soc.”, 1952, vol. 48, p. 533—546.
7. Constantinesku C. Weakly compact sets in locally convex vector lattices.— “Rev. roum. math. pures et app.”, 1969, vol. 14, № 3, p. 325—351.
8. Nachbin L. Topological vector spaces of continuous functions.— “Proc. Nat. Acad. Sci USA”, 1954, vol. 40, p. 471—474.
9. Shirota T. On locally convex vector spaces of continuous functions.— “Proc. Japan Acad Sci.”, 1954, vol. 30, p. 294—298.

Поступила 1 марта 1975 г.