

УДК 517.522.2

НГУЕН ТХЫОНГ УЕН

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ В ПОЛУПЛОСКОСТИ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Вопрос, который мы рассматриваем в этой работе, примыкает к [1] и [2]. Пусть имеются последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ точек в верхней полуплоскости и последовательность $Q = \{q_n\}$ натуральных чисел. При каких условиях, которые нужно наложить на эти последовательности Λ и Q , существует функция $f(z)$, аналитическая и порядка ρ , $B \operatorname{Im} z > 0$, дающая решение следующей интерполяционной задачи: $f^{(j-1)}(\lambda_n) = a_{nj}$ ($n = 1, 2, \dots$; $j = 1, 2, \dots, q_n$), где $\{a_{nj}\}$ — любая последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln |\lambda_n|} \ln \ln \max_{1 \leq j \leq q_n} |a_{nj}| \leq \rho. \quad (1)$$

Мы даем решение этой задачи при $\rho > 1$. Заметим, что при $q_n = 1$ для всех n эта задача была изучена нами в [1]. Заметим также, как видно будет в дальнейшем, что результат настоящей статьи содержит результат, полученный в [1]. Однако нетрудно убедиться в том, что для сформулированной выше задачи метод, примененный в [1], нужно существенно видоизменить в связи

с тем, что здесь требуется построить функцию не только по ее значениям, но и по значениям ее производных. В [1] нам удалось построить функцию $f(z)$, интерполирующую последовательность Λ , с помощью ряда Лагранжа, который имеет очень простой вид. В этой работе регуляризованный ряд Лагранжа строится другим методом — методом Леонтьева [3].

Введем определения и обозначения. Обозначим через $[\rho, \infty]^+$ класс аналитических функций порядка не большего, чем $\rho \text{Im } z > 0$. Будем говорить, что последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $\text{Im } \lambda_n > 0$, и последовательность натуральных чисел $Q = \{q_n\}$ образуют интерполяционную пару в классе $[\rho, \infty]^+$, если для любой последовательности $\{a_{nj}\}$ ($n = 1, 2, \dots$; $j = 1, 2, \dots, q_n$) комплексных чисел, удовлетворяющей условию (1), найдется функция $f(z) \in [\rho, \infty]^+$ такая, что

$$f^{j-1}(\lambda_n) = a_{nj} \quad (n = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, q_n). \quad (2)$$

Определим следующие функции:

$$C(r) = \sum_{r_n \leq r} q_n \sin \theta_n, \quad (3)$$

$$E(z) = \prod_{r_n < 1} \left(\frac{z - \lambda_n}{z - \bar{\lambda}_n} \right)^{q_n} \prod_{r_n < 1} E_p^{q_n}(z, \lambda_n), \quad (4)$$

где $\lambda_n = r_n e^{i\theta_n}$; $p = [\rho]^1$.

Через Λ_Q обозначим множество точек из Λ с учетом кратности соответственно $q_n \in Q$. Пусть

$$\gamma_{nj} = \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{j-1} \frac{(z - \lambda_n)^{q_n}}{E(z)} \Big|_{z = \lambda_n}, \quad T_n^{(0)} = \max_{1 \leq j < q_n} (\text{Im } \lambda_n)^{j-1} |\gamma_{nj}|,$$

$$T_n^{(1)} = \max_{1 \leq j < q_n} (q_n - j)! (\text{Im } \lambda_n)^{j-1} |\gamma_{nj}|.$$

Тогда наш результат может быть сформулирован так.

Теорема. Для того чтобы пара последовательностей $\Lambda = \{\lambda_n\}$ ($\text{Im } \lambda_n > 0$, $r_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$) и $Q = \{q_n\}$ была интерполяционной в классе $[\rho, \infty]^+$, где $\rho > 1$, необходимо, чтобы эта пара последовательностей удовлетворяла условиям

$$A) \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln C(r)}{\ln r} \leq \rho,$$

$$B) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln r_n} \ln^+ \ln \frac{T_n^{(0)}}{3^{q_n} (\text{Im } \lambda_n)^{q_n}} \leq \rho,$$

и достаточно, чтобы выполнялись условия A) и

$$B) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln r_n} \ln^+ \ln \frac{T_n^{(1)}}{(\text{Im } \lambda_n)^{q_n + 1}} \leq \rho.$$

¹ Необходимые факты из теории аналитических функций конечного порядка в полуплоскости были приведены в [1].

Доказательство. *Необходимость.* Сначала докажем необходимость условия А). Легко видеть, что условие А) равносильно тому, что при любом $\varepsilon > 0$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n \sin \theta_n}{r_n^{\rho+\varepsilon}} < \infty. \quad (5)$$

Допустим, что для любой последовательности $\{a_{nj}\}$, удовлетворяющей условию (1), существует функция $f(z) \in [\rho, \infty]^+$ такая, что $f^{(j-1)}(\lambda_n) = a_{nj}$ ($n = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, q_n$). В частности, имеется функция $g(x) \in [\rho, \infty]^+$, для которой имеет место соотношение

$$\begin{aligned} g^{(j-1)}(\lambda_1) &= 1, \quad (j = 1, 2, \dots, q_1), \\ g^{(j-1)}(\lambda_n) &= 0, \quad (j = 1, 2, \dots, q_n, n = 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Пусть $\mu_n = \tau_n e^{i\theta_n}$ — корни функции $g(z)$, тогда по теореме 1 из [1] имеем при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \theta_n}{\tau_n^{\rho+\varepsilon}} < \infty,$$

откуда следует, что соотношение (5) имеет место, т. е. условие А) доказано.

Докажем необходимость условия Б) от противного. Если условие Б) не выполнено, то найдутся число ρ_1 ($\rho < \rho_1 \leq \infty$) и подпоследовательность $\{\nu_n\} = \{\lambda_{k_n}\} \subset \Lambda$ такие, что $t_1 > 1$, $t_{n+1} > n^n t_n$ ($n = 1, 2, \dots$), где $t_n = |\nu_n|$ и

$$\rho_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln t_n} \ln \ln \frac{|\hat{\gamma}_{nj_n}|}{3^{s_n} (\operatorname{Im} \nu_n)^{s_{n+1} - j_n}}, \quad (6)$$

где $s_n = q_{k_n}$; $\hat{\gamma}_{nj_n} = \gamma_{k_n} j_{k_n}$, а $j_n = j_{k_n}$ такое, что

$$T_{k_n}^{(0)} = (\operatorname{Im} \nu_n)^{j_n - 1} |\hat{\gamma}_{nj_n}|.$$

Пусть функция $f(z) \in [\rho, \infty]^+$ такова, что

$$f^{(j-1)}(\nu_n) = \begin{cases} 1, & j = 1 \\ 0, & 2 \leq j \leq s_n \end{cases} \quad (7)$$

$f^{(j-1)}(\lambda_n) = 0$ при всех $\lambda_n \notin \{\nu_n\}$ и $1 \leq j \leq q_n$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\Omega(z) = \frac{f(z) H(z)}{E(z)}, \quad (8)$$

где $H(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E^{s_n}(z, \nu_n)$.

Обозначим через K_f множество корней функции $f(z)$, а $\{\beta_n\} = K_f \setminus \Lambda_Q$. Тогда по теореме 1 [1] имеем

$$\Omega(z) = z^m e^{P_p(z)} \prod_{|\beta_n| < 1} \frac{z - \beta_n}{z - \bar{\beta}_n} \prod_{|\beta_n| > 1} E_p(z, \beta_n) \times \\ \times \exp \frac{1}{\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(tz+1)^{p+1} \ln |f(t)|}{(t^2+1)^{p+1} (t-z)} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(tz+1)^{p+1} d\varphi(t)}{(t^2+1)^{p+1} (t-z)} \right\}.$$

В силу теоремы 2 из [1] функция $\Omega(z)$ представляет собой функцию класса $[\rho, \infty]^+$. Из свойства (7) функции $f(z)$ и представления функции $\Omega(z)$ в виде (8) следует, что

$$\hat{\gamma}_{njn} = \frac{1}{(jn-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{jn-1} \frac{(z - \nu_n)^{S_n}}{E(z)} \Big|_{z=\nu_n} = \\ = \frac{1}{(jn-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{jn-1} \frac{(z - \nu_n)^{S_n} f(z)}{E(z)} \Big|_{z=\nu_n} = \\ = \frac{1}{(jn-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{jn-1} \frac{(z - \nu_n)^{S_n} \Omega(z)}{H(z)} \Big|_{z=\nu_n} = \frac{1}{2\pi i} \frac{(\zeta - \nu_n)^{S_n} \Omega(\zeta)}{H(\zeta) (\zeta - \nu_n)^{jn}} d\zeta,$$

где $c_n = \{\zeta : |\zeta - \nu_n| = \text{Im } \nu_n\}$. Перепишем $\hat{\gamma}_{njn}$ в следующей форме:

$$\hat{\gamma}_{njn} = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\nu_n}{\bar{\nu}_n} \right)^{S_n} \int_{c_n} \frac{(\zeta - \bar{\nu}_n)^{S_n} \Omega(\zeta)}{H_n(\zeta) (\zeta - \nu_n)^{jn}} d\zeta.$$

Здесь $H_n(\zeta) = \exp S_n \sum_{j=1}^p \frac{\zeta^j}{j} \left(\frac{1}{\sqrt{j}} - \frac{1}{\bar{\sqrt{j}}} \right) \prod_{k \neq n} E_p^{S_k}(\zeta, \nu_k)$. Учитывая, что $t_{n+1} > n^2 t_n$, и применяя конструкцию теоремы 2 [2], получаем

$$\min_{\zeta \in c_n} |H_n(\zeta)| > \exp \left\{ -M [C(t_n) + t_n^{\rho+\varepsilon/2}] \right\}.$$

Следовательно, модуль $\hat{\gamma}_{njn}$ допускает оценку при достаточно больших n :

$$|\hat{\gamma}_{njn}| < 3^{S_n} (\text{Im } \gamma_n)^{S_n+1} i_n e^{t_n^{\rho+\varepsilon}}.$$

В силу произвольности числа ε последнее неравенство противоречит соотношению (6). Тем самым доказана необходимость условия Б).

Достаточность. При доказательстве достаточности нашей теоремы мы будем пользоваться конструкцией Леонтьева [3].

Пусть $\{a_{nj}\}$ ($n = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, q_n$) — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию (1). Покажем, что решением нашей интерполяционной задачи является функция

$$f(z) = E(z) \sum_{n=1}^{\infty} P_n(z), \quad (9)$$

где

$$P_n(z) = \sum_{m=1}^{q_n} \alpha_{nm} \left[\frac{1}{z - \lambda_n} \left(\frac{z}{\lambda_n} \right)^{S_n} \right]^{(m-1)}, \quad (10)$$

$$\alpha_{nm} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \sum_{i=0}^{q_n-m} \frac{1}{i!} \gamma_{nq_n+1-m-i} a_{ni+1}, \quad (11)$$

$$n = 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots, q_n.$$

Предположим, что ряд (9) равномерно сходится на каждом компакте в верхней полуплоскости. Покажем, что $f^{(j-1)}(\lambda_n) = a_{nj}$ ($n = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, q_n$). Имеем

$$\frac{(z - \lambda_n)^{q_n} f(z)}{E(z)} = (z - \lambda_n)^{q_n} P_n(z) + (z - \lambda_n)^{q_n} F_n(z). \quad (12)$$

Здесь $F_n(z) = \sum_{k \neq n} P_k(z)$. Далее $(z - \lambda_n)^{q_n} P_n(z) = \sum_{m=1}^{q_n} \alpha_{nm} \{ (-1)^{m-1} (m-1)! (z - \lambda_n)^{q_n-m} + (z - \lambda_n)^{q_n} \Phi_n^{(m-1)}(z) \}$, где $\Phi_n(z) = \sum_{i=0}^{S_n-1} \frac{z^i}{\lambda_n^{j+1}}$.

Дифференцируя обе части (12) $q_n - m$ раз в точке $z = \lambda_n$, получаем

$$\sum_{i=0}^{q_n-m} C_{q_n-m}^i f^{(i)}(\lambda_n) \left(\frac{d}{dz} \right)^{q_n-m-i} \frac{(z - \lambda_n)^{q_n}}{E(z)} \Big|_{z=\lambda_n} =$$

$$= (-1)^{m-1} (m-1)! (q_n - m)! \alpha_{nm}$$

или

$$\sum_{i=0}^{q_n-m} \frac{1}{i!} \gamma_{nq_n+1-m-i} f^{(i)}(\lambda_n) = \sum_{i=0}^{q_n-m} \frac{1}{i!} \gamma_{nq_n+1-m-i} a_{ni+1}.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{q_n-m} \frac{1}{i!} \gamma_{nq_n+1-m-i} (f^{(i)}(\lambda_n) - a_{ni+1}) = 0, \\ m = 1, 2, \dots, q_n. \end{cases}$$

Матрица, состоящая из коэффициентов относительно $\{f^{(i)}(\lambda_n) - a_{ni+1}\}$, выражается в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{n1}, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ \frac{1}{2!} \gamma_{n2}, & \gamma_{n1}, & 0, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Эта матрица имеет отличный от нуля определитель, равный $\gamma_{n1}^{q_n}$.

Отсюда вытекает, что справедливо соотношение $f^{(j-1)}(\lambda_n) = a_{nj}$ ($j = 1, 2, \dots, q_n$). Остается показать, что при разумном подборе чисел $\{s_n\}$ функция $f(z)$, определенная рядом (9), принадлежит классу $[\rho, \infty]^+$.

Пусть δ_n — решение уравнения $C(r_n) = r_n^{\rho + \delta_n}$. Очевидно, что из условия А) следует, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \delta_n \leq 0. \quad (13)$$

Теперь займемся оценкой сверху для модуля α_{nm} . Из условий 1 и В) и определения числа α_{nm} мы выводим

$$\begin{aligned} |\alpha_{nm}| &\leq \frac{\exp r_n^{\rho + \varepsilon_n^{(1)}}}{(m-1)!} \sum_{i=0}^{q_n - m} \frac{1}{i!} |\gamma_{nq_n + 1 - m - i}| \leq \\ &\leq \frac{\exp r_n^{\rho + \varepsilon_n^{(2)}}}{(m-1)!} \sum_{i=0}^{q_n - m} \frac{1}{i! (m+i-1)!} (\operatorname{Im} \lambda_n)^{m+1+i} \leq \\ &\leq \frac{\exp r_n^{\rho + \varepsilon_n^{(2)}}}{[(m-1)!]^2} (\operatorname{Im} \lambda_n)^{m+1} e^{\operatorname{Im} \lambda_n}. \end{aligned}$$

Поскольку $\rho > 1$, то имеет место оценка

$$|\alpha_{nm}| \leq \frac{(\operatorname{Im} \lambda_n)^{m+1}}{[(m-1)!]^2} \exp r_n^{\rho + \varepsilon_n^{(3)}}, \quad (14)$$

где

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^{(3)} \leq 0. \quad (15)$$

По определению положим

$$S_n = \max \left\{ [C(r_n)] + 1, \left[r_n^{\rho + 2\varepsilon_n^{(3)}} \right] + 1 \right\}.$$

Из неравенств (13) и (15) немедленно следует, что допускает представление

$$S_n = r_n^{\rho + \varepsilon_n},$$

в котором имеет место неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \leq 0. \quad (16)$$

Покажем, что при таком подборе последовательности $\{S_n\}$ ряд (9) сходится равномерно на каждом компакте в верхней полуплоскости и аналитическая функция, определенная им, является функцией класса $[\rho, \infty]^+$.

Представим $f(z)$ в виде $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, где $f_1(z) = \sum_{r_n < e^{3r}} E(z) P_n(z)$; $f_2(z) = \sum_{r_n > e^{3r}} E(z) P_n(z)$; $r = |z|$.

Получим сперва оценку сверху для модуля $f_2(z)$. Введем обозначение

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{z - \lambda_n} \left(\frac{z}{\lambda_n} \right)^{S_n}.$$

Мы имеем

$$\varphi_n^{(m-1)}(z) = \frac{(m-1)!}{2\pi i} \int_{C_z} \varphi_n(\zeta) \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^m} = \frac{(m-1)!}{2\pi i} \int_{C_z} \left(\frac{\zeta}{\lambda_n} \right)^{S_n} \frac{d\zeta}{(\zeta - \lambda_n)(\zeta - z)^m},$$

где $C_z = \{\zeta : |\zeta - z| = 1\}$.

Имеем

$$|\varphi_n^{(m-1)}(z)| \leq \frac{(m-1)! e^{-3S_n}}{(e^3 - 2)r} \left(1 + \frac{1}{r} \right)^{S_n} < (m-1)! e^{-2S_n}.$$

Последнее неравенство вместе с оценкой (14) показывает, что

$$\begin{aligned} |f_2(z)| &\leq |E(z)| \sum_{r_n > e^{3r}} \sum_{m=1}^{q_n} |\alpha_{nm}| |\varphi_n^{(m-1)}(z)| \leq \\ &\leq |E(z)| \sum_{r_n > e^{3r}} \sum_{m=1}^{q_n} \frac{(\operatorname{Im} \lambda_n)^{m+1}}{(m-1)!} \exp \{ r_n^{\rho + \varepsilon_n^{(3)}} - 2S_n \} \leq \\ &\leq |E(z)| \sum_{r_n > e^{3r}} (\operatorname{Im} \lambda_n)^2 \exp \{ \operatorname{Im} \lambda_n + r_n^{\rho + \varepsilon_n^{(3)}} - 2S_n \} \leq \\ &\leq |E(z)| \sum_{r_n > e^{3r}} (\operatorname{Im} \lambda_n)^2 e^{-S_n}. \end{aligned}$$

Поскольку функция $C(r)$ имеет порядок не больший, чем ρ , это значит, что имеет место соотношение (5), то ряд в правой части последнего неравенства сходится, а следовательно, модуль функции $f_2(z)$ допускает оценку

$$|f_2(z)| < C |E(z)|, \quad (17)$$

где C — константа, не зависящая от z .

Теперь мы будем оценивать сверху модуль функции $f_1(z)$. Для этого представим $f_1(z)$ в виде $f_1(z) = g_1(z) + g_2(z)$, где $g_1(z) = \sum_{r_n < 1} E(z) P_n(z)$; $g_2(z) = \sum_{1 < r_n < e^{3r}} E(z) P_n(z)$.

Имеем

$$g_2(z) = \sum_{1 < r_n < e^{3r}} E(z) \sum_{m=1}^{q_n} \alpha_{nm} \left\{ \frac{(-1)^{m-1} (m-1)!}{(z - \lambda_n)^m} + \psi_n^{(m-1)}(z) \right\}.$$

Из явного вида $\psi_n(z)$ следует, что при $r_n > 1$ справедливо неравенство

$$|\psi_n^{(m-1)}(z)|' \leq S_n! r^{s_n}. \quad (18)$$

Рассматриваем функцию $(z - \lambda_n)^{-m} E(z)$ ($m \leq q_n$). Легко видеть, что

$$\max_{|z - \lambda_n| = \text{Im} \lambda_n} |(z - \lambda_n)^{-m} E(z)| = (\text{Im} \lambda_n)^{-m} \max_{|z - \lambda_n| = \text{Im} \lambda_n} |E(z)|.$$

Так как функция $(z - \lambda_n)^{-m} E(z)$ аналитическая внутри круга $\{z: |z - \lambda_n| \leq \text{Im} \lambda_n\}$, то имеем

$$\max_{|z - \lambda_n| < \text{Im} \lambda_n} |(z - \lambda_n)^{-m} E(z)| = (\text{Im} \lambda_n)^{-m} \max_{|z - \lambda_n| < \text{Im} \lambda_n} |E(z)|,$$

откуда следует, что выполняется асимптотическое неравенство

$$|(z - \lambda_n)^{-m} E(z)| < C (\text{Im} \lambda_n)^{-m} e^{\rho + \varepsilon}, \quad (19)$$

где C — постоянная величина, не зависящая от n и m . Из оценок (14), (18) и (19) вытекает, что

$$\begin{aligned} |g_2(z)| &\leq \sum_{1 < r_n < e^{3r}} \sum_{m=1}^{q_n} |\alpha_{nm}| \{ (m-1)! (\text{Im} \lambda_n)^{-m} C e^{\rho + \varepsilon} + \\ &+ S_n! r^{s_n} |E(z)| \} \leq C e^{\rho + \varepsilon} + (e^{3r})^{\rho + \varepsilon} N_r^{(3)} \sum_{1 < r_n < e^{3r}} \text{Im} \lambda_n \{ e + \\ &+ S_n! r^{s_n} e^{\text{Im} \lambda_n} \} \leq C C (e^{3r}) e^{\rho + \varepsilon'} + S_{N_r} (\ln r + C_1). \end{aligned}$$

Последнее неравенство показывает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует R_ε такое, что

$$|g_2(z)| < e^{\rho + \varepsilon} \forall r > R_\varepsilon. \quad (20)$$

Заметим также, что $g_1(z) \in [\rho, \infty]^+$. Это замечание вместе с оценками (17) и (20) доказывает принадлежность построенной нами функции $f(z)$ к классу $[\rho, \infty]^+$. Тем самым теорема полностью доказана.

В заключение автор приносит глубокую благодарность Б. Я. Левину за внимание и руководство работой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б. Я. и Нгуен Тхыонг Уен. Об интерполяционной задаче в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 22, Харьков, 1975, с. 77–85.

2. Нгуен Тхыонг Уен. Интерполяционная задача в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 24, Харьков, 1975, с. 106—127.
3. Леонтьев А. Ф. Об интерполяции в классе целых функций конечного порядка.— ДАН СССР, 1948, т. 61, с. 785—787.

Поступила 25 января 1975 г.