УДК 517.945.4

П. А. МЫШКИС

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССАХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО РАСТУЩИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим задачу Коши для параболического псевдодифференциального оператора $A(x_0, x', D_{x_0}, D_{x'})$:

$$A(x_0, x', D_{x_0}, D_{x'})\, u(x_0, x') = f(x_0, x'),\quad x_0 \in [0, T], \quad x' \in R^{n-1}, \tag{0.1}$$

$$\left.\frac{\partial^{k-1} u(x)}{\partial x_0^{k-1}}\right|_{x_0=0} = g_k(x'),\ k = 1, 2, \ldots, \varkappa, \tag{0.2}$$

где $\varkappa$ определяется символом оператора A. Для дифференциальных уравнений эта задача подробно изучена в работах [1, 2].

В настоящей работе изучаются вопросы существования и единственности решения в классах функций типа Соболева — Слободецкого с весом, дающим экспоненциальный рост функций на бесконечности.

В § 1 определяется оператор и функциональные пространства. В § 2 показывается, что оператор A действует взаимно-однозначно и взаимно-непрерывно в классах функций, гладко продолжаемых нулем при $x_0 < 0$. В § 3 полностью решается задача Коши

(0.1), (0.2) при дополнительном условии гладкости на символ. Для дифференциальных операторов это условие выполняется автоматически.

§ 1. Определение параболического оператора

Рассмотрим псевдодифференциальный оператор вида

$$A(u)=\int a(x,\ x-y)\,u(y)\,dy,\ x=(x_0,\ x'),$$
$$y=(y_0,\ y'),\ x_0,\ y_0\in R^1,\ x',\ y'\in R^{n-1}.$$

Здесь $a(x,\ z)$ — обобщенная функция по z, преобразование Фурье $A(x,\ \xi)$ которой по z будем называть символом оператора A.

Предполагаются выполненными следующие условия.

1. Преобразование Фурье $A(x,\ \xi)=F_{z\to\xi}\,a(x,\ z)$ — относительно однородная функция от $\xi=(\xi_0,\ \xi')$ порядка α с весом $\gamma\geqslant 1$, т. е.

$$A(x,\ t^\gamma\xi_0,\ t\xi')=t^\alpha A(x,\ \xi),\ \forall t>0,\ \xi\in R^n.$$

2. $A(x,\ \xi)$ аналитически продолжается по ξ_0 в полупространство $\operatorname{Im}\xi_0\geqslant 0$ (или, что то же самое, $a(x,\ z)=0$ при $z_0<0$) и в слой $M_\rho=\{\xi:|\operatorname{Im}\xi_j|<\rho_j\}$ по $\xi_j,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ при каждом x, причем для продолжения сохраняется свойство относительной однородности.

3. Найдется такое число σ_0, что при $\operatorname{Im}\xi_0\geqslant\sigma_0$, $A(x,\ \xi)$ не будет иметь нулей и будет непрерывной функцией вплоть до границы слоя M_ρ как по x, так и по ξ.

4. $A(x,\ \xi_0+i\sigma_0,\ \xi')\neq 0$ при $|\sigma_0|+|\xi|\neq 0,\ \xi\in R^n,\ \sigma_0\geqslant 0$ и функция непрерывна по x.

5. $A(x,\ \xi)=A(\xi)$ при $|x|>R$, $\operatorname{Im}\xi_0\geqslant 0,\ \xi'\in M_\rho$.

Для оператора с символом вида $P(x,\ \xi)\,Q^{-1}(x,\ \xi)$, где $P(x,\ \xi)$ и $Q(x,\ \xi)$ — многочлены по ξ_0, удовлетворяющим условиям 1, 2, 4, 5, условие 3 также выполняется. Для доказательства достаточно разложить многочлены на множители вида $\xi_0+if_j(x,\ \xi')$ и заметить, что $\operatorname{Im}f_j(x,\ \xi')\geqslant c_j>0$ при $|x|<R+1$, $|\xi_0|+|\xi'|^\gamma=1$.

Операторы с символом $A(x,\ \xi)$, удовлетворяющим условиям 1—5, в дальнейшем будут называться параболическими.

Введем пространство $H_{s,\,\gamma}=H_{s,\,\gamma}(R^n)$ как пополнение пространства финитных функций по норме

$$\|u(x)\|^2_{s,\,\gamma}=\int<\xi>^{2s}|\tilde u(\xi)|^2\,d\xi,$$

где $\langle\xi\rangle=1+|\xi_0|^{\gamma^{-1}}+|\xi'|$.

Пространство $H_{s,\,\gamma,\,\nu}=H_{s,\,\gamma,\,\nu}(R^n)$ строится аналогично с помощью нормы

$$\|u(x)\|_{s,\,\gamma,\,\nu}=\|\{\prod_{j=1}^{n-1}2\operatorname{ch}(\nu_jx_j)\}^{-1}u(x)\|_{s,\,\gamma}.$$

Пространство $H_{s,\gamma,\nu}(R^n_+)$ получается с помощью нормы:

$$|||u(x)|||_{s,\gamma,\nu} = \inf \| lu(x) \|_{s,\gamma,\nu}, \ \forall lu(x) \in H_{s,\gamma,\nu},$$
$$lu(x) = u(x) \text{ при } x_0 > 0.$$

Пространство $W_{s,\gamma,\nu}$ состоит из функций пространства $H_{s,\gamma,\nu}$ с носителями в $\bar{R}^n_+ = \{x : x_0 \geqslant 0\}$. Если $\Omega_{a,b} = \{x : a < x_0 \leqslant b, \ x' \in \in R^{n-1}\}$, то пространство $W_{s,\gamma,\nu}(\Omega_{0,t})$ функций, определенных на $\Omega_{0,t}$, вводится с помощью нормы:

$$\| u \|^t_{s,\gamma,\nu} = \inf \| lu \|_{s,\gamma,\nu}, \ \forall lu(x) \in W_{s,\gamma,\nu},$$

где $lu(x)$ есть продолжение функции $u(x)$ на R^n, причем $lu(x) = 0$ при $x_0 < 0$. Пространство $H_{s,\gamma,\nu}(\Omega_{0,t})$ строится аналогично по норме

$$|||u|||^t_{s,\gamma,\nu} = \inf \| lu \|_{s,\gamma,\nu}, \ \forall lu(x) \in H_{s,\gamma,\nu}.$$

Замечание 1.1. Из определения нормы в $H_{s,\gamma,\rho}$ ясно, что $u(x) \in H_{s,\gamma,\rho}$ имеет вид $u(x) = 2^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \operatorname{ch}(\rho_j x_j) v(x)$, где $v(x) \in \in H_{s,\gamma}$, т. е.

$$u(x) = \sum_{\sigma_j = \pm\rho_j} e^{(\sigma', x')} v(x) = \sum{}' u_{\sigma'}(x),$$

где $\sum{}' = \sum\limits_{\sigma_j = \pm\rho_j}$, $\| u_{\sigma'} \|_{s,\gamma,\rho} \leqslant C \| u(x) \|_{s,\gamma,\rho}$.

Для финитной функции $u(x)$ оператор Au можно переписать в эквивалентном виде:

$$Au = \int a(x, x-y) u(y)\, dy = \sum{}' e^{(\sigma', x')} (2\pi)^{-n} F^{-1}_{\xi \to x} \times$$
$$\times \int \tilde{A}(\xi - \eta, \eta_0, \eta' + i\sigma') \tilde{v}(\eta)\, d\eta, \qquad (1.1)$$

где $v(x) = \{\prod_j 2 \operatorname{ch}(\rho_j x_j)\}^{-1} u(x)$, $\tilde{A}(\eta, \xi) = F_{x \to \eta} A(x, \xi)$.

Если под оператором P^+ понимать сужение функции на область $\Omega_{0,T}$, если также $\omega(x_0) \in C_0^\infty(R^1)$, $\omega(x_0) = 1$ при $0 \leqslant x_0 \leqslant T$, то для функции $u(x) \in C_0^\infty \cap W_{s+\alpha,\gamma,\rho}(\Omega_{0,T})$ мы определим следующий оператор A:

$$P^+ Au = P^+ \sum{}' \omega(x_0) e^{(\sigma, x)} F^{-1}_{\xi \to x} (2\pi)^{-n} \times$$
$$\times \int \tilde{A}(\xi - \eta, \eta + i\sigma) F_{x \to \eta} \{ e^{-\sigma_0 x_0} \omega(x_0)\, lv(x) \}\, d\eta,$$

где $\sigma = (\sigma_0, \sigma')$, $v(x) = \{\prod_j 2 \operatorname{ch}(\rho_j x_j)\}^{-1} u(x)$, $lv(x) \in W_{s+\alpha,\gamma,0} \cap C_0^\infty$.

Из условия 2 в определении параболического оператора следует, что так построенный оператор не зависит от выбора продолжения срезающей функции $\omega(x_0)$. Но

$$\| P^+ Au \|^T_{s,\ \gamma,\ \rho} \leqslant C \sum{}' \| e^{\sigma_0 x_0} \omega(x_0) F^{-1} (2\pi)^{-n} \times$$
$$\times \int \tilde{A}(\xi - \eta,\ \eta + i\sigma) F\{e^{-\sigma_0 x_0} \omega(x_0)\, lv(x)\}\, d\eta \|_{s,\ \gamma}$$

и далее мы увидим, что при выполнении символом $A(x,\ \xi + i\sigma)$ условия 1.1 оператор A будет ограниченно действовать из

$$W_{s+\alpha,\ \gamma,\ \rho}(\Omega_{0,\ T}) \text{ в } W_{s,\ \gamma,\ \rho}(\Omega_{0,\ T})$$

и при выполнении условия 2.1 для символов $A(x,\ \xi + i\sigma)$, $B(x,\ \xi + i\sigma)$ оператор $AB - A \square B$ ограниченно действует из $W_{s,\ \gamma,\ \rho}(\Omega_{0,\ T})$ в $W_{s-\alpha-\beta+1,\ \gamma,\ \rho}(\Omega_{0,\ T})$.

Условие 1.1. Обозначив через

$$A'(x,\ \xi + i\sigma) = A(x,\ \xi + i\sigma) - A(\infty,\ \xi + i\sigma),$$

потребуем, чтобы $(1 + |\eta|^m | \tilde{A}'(\eta,\ \xi + i\sigma)| \leqslant A_{0,\ m,\ \sigma} \langle \xi \rangle^\alpha$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ и $|A(\infty,\ \xi + i\sigma)| \leqslant A_\sigma \langle \xi \rangle^\alpha$.

Для параболических операторов второе неравенство следует из условия относительной однородности, а первое будет выполнено, если потребовать бесконечную дифференцированность символа по x, что мы и сделаем.

Замечание 1.2. Если выполнено условие 1.1, то оператор

$$F^{-1}[A(\infty,\ \xi + i\sigma)\, \tilde{u}(\xi) + (2\pi)^{-n} \int \tilde{A}'(\xi - \eta,\ \eta + i\sigma)\, \tilde{u}(\eta)\, d\eta]$$

ограниченно действует из $H_{s+\alpha,\ \gamma}$ в $H_{s,\ \gamma}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для первого слагаемого замечание непосредственно следует из второго неравенства условия 1.1. Рассмотрим второе слагаемое

$$\| F^{-1} (2\pi)^{-n} \int \tilde{A}'(\xi - \eta,\ \eta + i\sigma)\, \tilde{u}(\eta)\, d\eta \|_{s,\ \gamma} =$$
$$= (2\pi)^{-n} \| \int \tilde{A}'(\xi - \eta,\ \eta + i\sigma) \langle \xi \rangle^s \tilde{u}(\eta)\, d\eta \|_{0,\ \gamma} \leqslant$$
$$\leqslant C \left\| \int A_{0,\ n+1+|s|,\ \sigma} \frac{\langle \eta \rangle^\alpha \langle \xi \rangle^s}{(1 + |\xi - \eta|)^{n+1+|s|}}\, \tilde{u}(\eta)\, d\eta \right\|_{0,\ \gamma} \leqslant$$
$$\leqslant C A_{0,\ n+1+|s|,\ \sigma} \left\| \int \frac{\langle \eta \rangle^{s+\alpha} \tilde{u}(\eta)}{(1 + |\xi - \eta|)^{n+1}}\, d\eta \right\|_{0,\ \gamma} \leqslant$$
$$\leqslant C A_{0,\ n+1+|s|,\ \sigma} \| u \|_{s+\alpha,\ \gamma}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством:

$$\langle \xi \rangle^s \leqslant C \langle \eta \rangle^s (1 + |\xi - \eta|)^{|s|}.$$

Теперь ясно, что если параболический оператор A удовлетворяет условию 1.1, то он ограниченно действует из

$$W_{s+\alpha,\ \gamma,\ \rho}(\Omega_{0,\ T}) \text{ в } W_{s,\ \gamma,\ \rho}(\Omega_{0,\ T}).$$

Действительно, $\| P^+ Au \|^T_{s,\gamma,\rho} \leqslant \| lP^+ Au \|_{s,\gamma,\rho}$, если $lP^+ Au \in W_{s,\gamma,\rho}$; но из условия 2 в определении параболического оператора и представления (1.1) следует, что $\operatorname{supp} F^{-1}_{\xi\to x} \Big[\int \widetilde{A}' (\xi - \eta, \quad \eta + i\sigma) F_{x\to\eta} \times$

$$\times \{e^{-\sigma_0 x_0} \omega(x_0) lv(x)\} d\eta + A(\infty, \xi + i\sigma) F_{x\to\xi} \{e^{-\sigma_0 x_0} \times \\ \times \omega(x_0) lv(x)\} \Big] \subset \overline{R}^n_+.$$

Тем самым, получена оценка

$$\| P^+ Au \|^T_{s,\gamma,\rho} \leqslant C {\sum}' \| F^{-1} (2\pi)^{-n} \int \widetilde{A} (\xi - \eta, \eta + i\sigma) \times \\ \times F_{x\to\eta} \{e^{-\sigma_0 x_0} \omega(x_0) lv(x)\} d\eta \|_{s,\gamma} + C \| e^{-\sigma_0 x_0} \omega(x_0) lv(x) \|_{s+\alpha,\gamma} \leqslant \\ \leqslant C_1 \| e^{-\sigma_0 x_0} \omega(x_0) lv(x) \|_{s+\alpha,\gamma} \leqslant C_2 \| lv(x) \|_{s+\alpha,\gamma}$$

и так как $P^+ A(lu) = P^+ A(l'u)$ для любых продолжений $lu(x)$ и $l'u(x)$, то

$$\| P^+ Au \|^T_{s,\gamma,\rho} \leqslant C \| v \|^T_{s+\alpha,\gamma,0} = C \| u \|^T_{s+\alpha,\gamma,\rho}.$$

§ 2. Действия оператора в пространствах $W_{s,\gamma,\rho}(\Omega_{0,T})$.

Легко видеть, что справедливо

Замечание 2.1. Если $u(x) \in W_{s,\gamma,\rho}$ и $u(x) = {\sum}' e^{(\sigma', x')} \varphi_{\sigma'}(x) = {\sum}' e^{(\sigma', x')} \psi_{\sigma'}(x)$, где $\varphi_{\sigma'}(x), \psi_{\sigma'}(x) \in W_{s,\gamma,0}$ и символ оператора удовлетворяет условию 1.1, то

$${\sum}' e^{(\sigma', x')} F^{-1}_{\xi\to x} \int A(\xi - \eta, \eta + i\sigma) \varphi_{\sigma'}(\eta_0, \eta' + i\sigma') d\eta = \\ = {\sum}' e^{(\sigma', x')} F^{-1}_{\xi\to x} \int \widetilde{A}(\xi - \eta, \eta + i\sigma) \psi_{\sigma'}(\eta_0, \eta' + i\sigma') d\eta.$$

Теперь, если для простоты положить $A(\infty, \xi) = B(\infty, \xi) = 0$, то при $u(x) \in W_{s,\gamma,\rho}(\Omega_{0,T})$ мы получаем, учитывая замечание 2.1:

$$P^+ ABu = P^+ {\sum}' e^{\sigma_0 x_0} \omega(x_0) e^{(\sigma', x')} F^{-1} (2\pi)^{-2n} \times \\ \times \iint \widetilde{A}'(\xi - \tau, \tau + i\sigma) \widetilde{B}'(\tau - \eta, \eta + i\sigma) F_{x\to\eta} \times \\ \times \{e^{-\sigma_0 x_0} \omega(x_0) lv(x)\} d\eta\, d\tau,$$

где $v(x) = \{\prod_j 2 \operatorname{ch}(\rho_j x_j)\}^{-1} u(x)$. Кроме того,

$$P^+ A \square Bu = P^+ {\sum}' e^{\sigma_0 x_0} \omega(x_0) e^{(\sigma', x')} F^{-1} (2\pi)^{-2n} \times \\ \times \iint \widetilde{A}'(\xi - \tau, \eta + i\sigma) \widetilde{B}'(\tau - \eta, \eta + i\sigma) F_{x\to\eta} \times \\ \times \{e^{-\sigma_0 x_0} \omega(x_0) lv(x)\} d\eta\, d\tau,$$

где символ оператора $A \square B$ есть $A(x, \xi) B(x, \xi)$.

Условие 2.1. Для оператора A выполнено условие 1.1, а также справедливы следующие оценки, соответствующие формуле Лагранжа:

$$|A(\infty,\ \xi+i\sigma)-A(\infty,\ \eta+i\sigma)|\leqslant$$
$$\leqslant A_{1,\ \sigma}\langle\zeta\rangle^{\alpha-\gamma}[|\xi_0-\eta_0|+|\xi'-\eta'|\cdot|\zeta|^{\gamma-1}],$$
$$(1+|\tau|)^p|\tilde{A}'(\tau,\ \xi+i\sigma)-\tilde{A}'(\tau,\ \eta+i\sigma)|\leqslant$$
$$\leqslant A_{1,\ p,\ \sigma}\langle\zeta\rangle^{\alpha-\gamma}[|\xi_0-\eta_0|+|\xi'-\eta'|\cdot|\zeta|^{\gamma-1}],$$
$$\zeta=\eta+\theta(\xi-\eta),\ 0<\theta<1,\ p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

Лемма 2.1. *Пусть символы параболических операторов A и B удовлетворяют условию 2.1 и $u(x)$ — финитная функция, тогда:*

$$A_\sigma B_\sigma u-A_\sigma\,\square\,B_\sigma u=E_{\alpha+\beta-1}u+G_{\alpha+\beta-1}u,$$
$$FE_{\alpha+\beta-1}u=\int E_{\alpha+\beta-1}(\xi,\ \eta)\,\tilde{u}(\eta)\,d\eta,$$
$$FG_{\alpha+\beta-1}u=\iint G_{\alpha+\beta-1}(\xi,\ \tau,\ \eta)\,\tilde{u}(\eta)\,d\eta\,d\tau,$$

причем при любых натуральных N, N_1, N_2 справедливы оценки

$$|E_{\alpha+\beta-1}(\xi,\ \eta)|\leqslant CA_{1,\ \sigma}B_{0,\ p,\ \sigma}\frac{\langle\eta\rangle^{\alpha+\beta-1}}{(1+|\xi-\eta|)^N},\ \forall p\geqslant\gamma+|\alpha-\gamma|+N,$$

$$|G_{\alpha+\beta-1}(\xi,\ \tau,\ \eta)|\leqslant CA_{1,\ N_2,\ \sigma}B_{0,\ p_1,\ \sigma}\frac{\langle\eta\rangle^{\alpha+\beta-1}}{(1+|\tau-\eta|)^{N_1}(1+|\xi-\tau|)^{N_2}},$$
$$\forall p_1\geqslant\gamma+|\alpha-\gamma|+N_1$$

с коэффициентами, определенными для операторов A и B согласно условиям 1.1 и 2.1. Здесь оператор A_σ имеет символ $A(x,\ \xi+i\sigma)$, $\sigma=(\sigma_0,\ \sigma')$ и действует по формуле

$$A_\sigma u=F^{-1}_{\xi\to x}(2\pi)^{-n}\int\tilde{A}(\xi-\eta,\ \eta+i\sigma)\,\tilde{u}(\eta)\,d\eta.$$

Имеет место также неравенство

$$\frac{\langle\zeta\rangle^s}{\langle\eta\rangle^s}\leqslant C_{s,\ \gamma}(1+|\xi-\eta|)^{|s|},\ -\infty<s<\infty,\ \gamma\geqslant1 \qquad (2.1)$$

для любого $\zeta=\eta+\theta(\xi-\eta)$, $0\leqslant\theta\leqslant1$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.Д.1 [3].

Лемма 2.2. *Выберем натуральные N и p так, чтобы $N\geqslant n+1+|s|$ и $p\geqslant\gamma+|\alpha-\gamma|+N$. Тогда для операторов из леммы 2.1 справедлива оценка*

$$\|A_\sigma B_\sigma u-A_\sigma\,\square\,B_\sigma u\|_{s,\gamma}\leqslant C(A_{1,\sigma}B_{0,p,\sigma}+A_{1,N,\sigma}B_{0,p,\sigma})\|u\|_{s+\alpha+\beta-1,\ \gamma}.$$

Доказательство. Оценим, например, $E_{\alpha+\beta-1}\,u(x)$. Из неравенства (2.1) получим

$$\langle\xi\rangle^s|E_{\alpha+\beta-1}(\xi,\eta)|\leqslant\frac{CA_{1,\sigma}B_{0,p,\sigma}\langle\eta\rangle^{s+\alpha+\beta-1}}{(1+|\xi-\eta|)^{N-|s|}}.$$

Следовательно,

$$\| E_{\alpha+\beta-1}u \|_{s,\gamma} \leqslant CA_{1,\sigma}B_{0,p,\sigma} \left\| \int \frac{\langle\eta\rangle^{s+\alpha+\beta-1}}{(1+|\xi-\eta|)^{n+1}} |\tilde{u}(\eta)|\, d\eta \right\|_{0,\gamma} \leqslant CA_{1,\sigma} \times$$
$$\times B_{0,p,\sigma} \| u \|_{s+\alpha+\beta-1,\gamma}.$$

Лемма 2.3 *Пусть выполнены условия леммы 2.1, тогда оператор* $P^+(AB - A\square B)$ *ограничен из* $W_{s+\alpha+\beta-1,\gamma,\rho}(\Omega_{0,T})$ *в* $W_{s,\gamma,\rho}(\Omega_{0,T})$.

Доказательство.

$$\| P^+(AB - A\square B)u \|^T_{s,\gamma,\rho} \leqslant \|(AB - A\square B)\,\omega(x_0)\, lu(x)\|_{s,\gamma,\rho} \leqslant C\Sigma' \times$$
$$\times \|(A_\sigma B_\sigma - A_\sigma \square B_\sigma)\, lv(x)\|_{s,\gamma} \leqslant C_1 \| lv \|_{s+\alpha+\beta-1,\gamma} \leqslant C_2 \| u \|^T_{s+\alpha+\beta-1,\gamma,\rho},$$

где $lv(x) = \{\prod_j 2\operatorname{ch}(\rho_j x_j)\}^{-1} \omega(x_0)\, lu(x)$.

Можно показать, что имеет место следующая лемма.

Лемма 2.4. *Пусть оператор A параболичен, тогда оператор B с символом $A^{-1}(x,\xi)$ также параболичен и, если оператор A удовлетворяет условию 1.1 (2.1), также удовлетворяет условию 1.1 (2.1).*

Доказательство проводится непосредственным рассмотрением свойств символа $A^{-1}(x,\xi) = A^{-1}(\infty,\xi) + A_1(x,\xi)$, учитывая неравенство (2.1).

Тогда из лемм 2.3 и 2.4 следует, что оператор P^+B является левым и правым регуляризатором для P^+A в пространствах $W_{s,\gamma,\rho}(\Omega_{0,T})$:

$$P^+BA = P^+ + P^+V^1,\ P^+AB = P^+ + P^+V^2.$$

Заметим, что операторы V^1 и V^2 являются вольтерровскими операторами (см. [4]), т. е. верна оценка

$$\| P^+V^k_\sigma u \|^t_{s,\gamma,0} \leqslant C_{\delta,\sigma} t^\delta \| u \|^t_{s,\gamma,0},\ \forall\delta < \gamma,\ 0 < t < T,\ k = 1,2.$$

Теперь, если $u(x) \in W_{s,\gamma,\rho}(\Omega_{0,T})$, то

$$\| V^k u \|^t_{s,\gamma,\rho} \leqslant \| \Sigma' e^{(\sigma,x)} \omega(x_0)\, V^k_\sigma \{e^{-\sigma_0 x_0}\omega(x_0)\, lv(x)\} \|^t_{s,\gamma,\rho} \leqslant C\Sigma' \| V^k_\sigma \times$$
$$\times \{e^{-\sigma_0 x_0}\omega(x_0)\}\, lv(x) \|^t_{s,\gamma,0} \leqslant C_1 t^\delta \| e^{-\sigma_0 x_0}\omega(x_0)\, lv(x) \|^t_{s,\gamma,0} \leqslant$$
$$\leqslant C_2 t^\delta \| v \|_{s,\gamma,0} \leqslant C_2 t^\delta \| u \|^t_{s,\gamma,\rho}.$$

Таким образом, получена оценка

$$\| V^k u \|^t_{s,\gamma,\rho} \leqslant K t^\delta \| u \|^t_{s,\gamma,\rho},\ \forall\delta < \gamma,\ 0 < t < T,\ k = 1,2. \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. *Оператор A взаимно-однозначно и взаимно-непрерывно действует из* $W_{s,\gamma,\rho}(\Omega_{0,T})$ *в* $W_{s-\alpha,\gamma,\rho}(\Omega_{0,T})$.

Доказательство. Пусть $\tau = K^{-\delta^{-1}}$ (см. (2.2)). Тогда оператор $I + V^k$ обратим в пространствах $W_{s,\gamma,\rho}(\Omega_{0,\tau})$. Покажем, что оператор $I + V^k$ обратим в пространствах $W_{s,\gamma,\rho}(\Omega_{0,T})$, $k = 1,2$.

Предположим для простоты, что $T = 2\tau$. Решим уравнение $P^+(I + V^k)u^k = f^k$, где $f^k \in W_{s,\gamma,\rho}(\Omega_{0,T})$.

Найдем сначала u_1^k такое, что $P^+(I+V^k)u_1^k = f_1^k$ при $0 < x_0 \leqslant \tau$, $\| u_1^k \|_{s,\gamma,\rho}^{\tau} \leqslant C \| f^k \|_{s,\gamma,\rho}^{\tau}$. Теперь в слое $\tau < x_0 \leqslant T$ найдем $u_2^k \in W_{s,\gamma,\rho}(\Omega_{\tau,T})$: $P^+(I+V^k)u_2^k = P^+f^k - P^+(I+V^k)lu_1^k$ при $\tau < x_0 \leqslant T = 2\tau$, так как $P^+f^k - P^+(I+V^k)lu_1^k \in W_{s,\gamma,\rho}(\Omega_{0,T})$ (см. (2.2)). Тогда $u^k = lu_1^k + u_2^k + u_2^k$ будет искомым решением и $\| u^k \|_{s,\gamma,\rho}^{T} \leqslant C \| f^k \|_{s,\gamma,\rho}^{T}$. Единственность решения $u(x)$ следует из единственности решения в слоях $m\tau < x_0 \leqslant (m+1)\tau$. Теорема доказана.

§ 3. Операторы с гладким символом

Введем сначала для символа $A(x, \xi)$ параболического оператора $A(x, D)$.

Условие 3.1 1. Для символа $A(x, \xi)$ выполнено условие 2.1.
2. Для любого натурального p и некоторого $q > 1 - \alpha$

$$|\tilde{A}'(\tau, \xi + i\sigma) \leqslant A_{0,p,\sigma}^{q} \frac{(1+|\xi'|)^{\alpha+q}}{(1+|\tau|)^{p}\langle\xi\rangle^{q}}, \; |\tilde{A}'(\tau, \xi + i\sigma) - \tilde{A}'(\tau, \eta + i\sigma)| \leqslant A_{1,p,\sigma}^{q} \frac{[|\xi_0 - \eta_0| + |\xi' - \eta'| \cdot |\xi'|^{\gamma-1}](1+|\zeta'|)^{\alpha+q-1}}{(1+|\tau|)^{p}\langle\zeta\rangle^{q+\gamma-1}}, \; \zeta = \eta + \theta(\xi - \eta), \; 0 < \theta < 1.$$

3. Аналогичные неравенства выполнены для $A(\infty, \xi + i\sigma)$.

Замечание 3.1. Пусть символы параболических операторов A и B удовлетворяют условиям 3.1 и 2.1 соответственно, тогда

$$(A_\sigma B_\sigma - A_\sigma \square B_\sigma)u = E_{\alpha+\beta-1}u + G_{\alpha+\beta-1}u,$$

где

$$FE_{\alpha+\beta-1}u = \int E(\xi, \eta)\, \tilde{u}(\eta)\, d\eta, \quad FG_{\alpha+\beta-1}u = \iint G(\xi, \tau, \eta)\, \tilde{u}(\eta)\, d\eta d\tau,$$

причем при любых натуральных N_1, N_2, N_3 и некотором $q > 1 - \alpha$ справедливы оценки

$$|E_{\alpha+\beta-1}(\xi, \eta)| \leqslant CA_{1,\sigma}^{q} B_{0,p_1,\sigma} \frac{(1+|\eta'|)^{\alpha+q-1}\langle\eta\rangle^{\beta-q}}{(1+|\xi-\eta|)^{N_1}}, \; |G_{\alpha+\beta-1}(\xi, \tau, \eta)| \leqslant CA_{1,N_3,\sigma}^{q} B_{0,p_2,\sigma} \frac{(1+|\eta'|)^{\alpha+q-1}\langle\eta\rangle^{\beta-q}}{(1+|\tau-\eta|)^{N_2}(1+|\xi-\tau|)^{N_3}}, \; p_i \geqslant \gamma + |\alpha + q - 1| + |\gamma + q - 1| + N_i, \; i = 1,2.$$

Доказательство такое же, как и у леммы 2.1.

Замечание 3.2. В условиях замечания 3.1

$$\| (A_\sigma B_\sigma - A_\sigma \square B_\sigma)u \|_{s,\gamma} \leqslant C \int (1+|\xi'|)^{2(\alpha+q-1)} \langle\xi\rangle^{2(s+\beta-q)} |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

при надлежащем выборе N_k и p_i.

Доказательство. Оценим, например, $G_{\alpha+\beta-1}u$:

$$\| G_{\alpha+\beta-1}u \|_{s,\gamma}^2 \leqslant C \left\| \int \frac{(1+|\eta'|)^{\alpha+q-1}}{(1+|\tau-\eta|)^{N_2-|s|}} \frac{\langle\eta\rangle^{s+\beta-q}|\tilde{u}(\eta)|}{(1+|\xi-\tau|)^{N_3-|s|}} d\tau d\eta \right\|_{0,\gamma}^2 \leqslant$$

$$\leqslant C \int (1+|\eta'|)^{2(\alpha+q-1)} \langle\eta\rangle^{2(s+\beta-q)} |\tilde{u}(\eta)|^2 d\eta,$$

если $N_2-|s|=N_3-|s| \geqslant n+1$. Замечание 3.2 доказано.

Класс $C_{\alpha,\beta,\rho}$. Будем говорить, что символ параболического оператора A, удовлетворяющий условию 2.1, принадлежит классу $C_{\alpha,\gamma,\rho}$, если

1) $\alpha=\gamma\varkappa$, где $\varkappa$ — целое число;
2) для любого целого $m \geqslant 0$ имеет место разложение

$$A(x, \xi_0+i\sigma_0, \xi'+i\sigma') = \sum_{k=0}^{m} \frac{c_{k,\sigma'}(x, \xi')}{[\xi_0+i\sigma_0+i(|\xi'|+|\sigma'|)^\gamma]^{k-\varkappa}} + R_\alpha^{\gamma(m+1)-\alpha} \times$$
$$\times (x, \xi+i\sigma),$$

где все слагаемые порядка α с весом γ, функции $c_{k,\sigma'}(x, \xi')$ удовлетворяют условиям, аналогичным условию 2.1, а $R_\alpha^{\gamma(m+1)+\alpha} \times$ $\times (x, \xi+i\sigma)$ удовлетворяет условию 3.1 с $q=\gamma(m+1-\varkappa)$.

Отметим, что $\operatorname{ord} c_{k,0}(x, \xi') = k\gamma$.

Замечание 3.3. Символ параболического дифференциального оператора с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами принадлежит классу $C_{\alpha,\gamma,\rho}$.

Лемма 3.1. *Если* $A(x, \xi) \in C_{\alpha,\gamma,\rho}$, *то* $A^{-1}(x, \xi) \in C_{-\alpha,\gamma,\rho}$.

Доказательство. Функция $c_{0,\sigma'}(x, \xi') = \lim\limits_{\xi_0\to\infty} \times$ $\times \dfrac{A(x, \xi_0+i\sigma_0, \xi'+i\sigma')}{[\xi_0+i\sigma_0+i(|\xi'|+|\sigma'|)^\gamma]^\varkappa} = A(x, 1, 0, \ldots, 0) = c_0(x) \neq 0$ в силу условия 4 параболичности оператора A. Получаем

$$A(x, \xi) = c_0(x)\, \xi_{+,\gamma}^{\varkappa} (1-G),$$

где $\quad \xi_{\mp,\gamma} = \xi_0 \pm i|\xi'|^\gamma$, $G = -\dfrac{1}{c_0(x)} \left[\sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{c_k(x, \xi')}{\xi_{+,\gamma}^{k}} + R_0^{\gamma(m+1)}(x, \xi) \right]$,

$R_0^{\gamma(m+1)} = \xi_{+,\gamma}^{-\varkappa} R_\alpha^{\gamma(m+1)-\alpha}$.

Нетрудно показать, что G удовлетворяет условию 2.1. Таким образом,

$$A^{-1}(x, \xi) = \frac{1-G^{m+1}+G^{m+1}}{c_0(x)\, \xi_{+,\gamma}^{\varkappa} (1+G)} = \sum_{k=0}^{m} \frac{g_k(x, \xi')}{\xi_{+,\gamma}^{\varkappa+k}} + R_{-\alpha}^{\gamma(m+1)+\alpha}(x, \xi),$$

где $g_k(x, \xi')$ и $R_{-\alpha}^{\gamma(m+1)+\alpha}(x, \xi)$ удовлетворяют всем требуемым условиям. Лемма 3.1 доказана.

Класс $D_{\alpha, \gamma, \rho}$. Символ параболического оператора принадлежит классу $D_{\alpha, \gamma, \rho}$, если при каждом $s \geqslant -\frac{\alpha}{\gamma}$ имеет место разложение

$$[\xi_0 + i\sigma_0 + i(|\xi'| + |\sigma'|)^\gamma]^s A_\sigma(x, \xi) = A_{-, \sigma}(x, \xi) + R^1_{s\gamma+\alpha, \sigma}(x, \xi),$$

где $A_{-, \sigma}(x, \xi)$ аналитически продолжается по ξ_0 в нижнюю комплексную полуплоскость $\operatorname{Im}\xi_0 < 0$ при каждом x и ξ' и удовлетворяет условию 2.1, а $R^1_{s\gamma+\alpha, \sigma}(x, \xi)$ удовлетворяет условию 3.1 с $q = 1$.

Аналогично [3] доказывается

Лемма 3.2. *Класс $C_{\alpha, \gamma, \rho}$ принадлежит $D_{\alpha, \gamma, \rho}$.*

Введем в пространстве $H_{s, \gamma, 0}(R^n_+)$ эквивалентную норму по формуле

$$\| u \|^+_{s, \gamma} = \int | \Pi^+ (\xi_{-, \gamma} - i)^{s\gamma^{-1}} \tilde{l} u (\xi) |^2 d\xi.$$

Здесь $\Pi^+ \tilde{u}(\xi) = F_{x \to \xi}[\theta(x_0) u(x)]$, где $\theta(x_0) = 0$ при $x_0 < 0$, $\theta(x_0) = 1$ при $x_0 \geqslant 0$ (подробнее см. [3]). Через P^+_1 обозначим оператор сужения функции $u(x) \in H_{s, \gamma, \rho}$ на R^n_+. Теперь может быть доказана следующая

Теорема 3.1. *Пусть A — параболический оператор с символом из $D_{\alpha, \gamma, \rho}$, тогда при любом $s \geqslant 0$ и $u \in H_{s, \gamma, 0}(R^n_+)$ имеет место оценка*

$$\| P^1_+ A_\sigma u_+ \|^+_{-\alpha, \gamma} \leqslant C \| u \|^+_{s, \gamma},$$

где $u_+(x)$ есть функция $u(x)$, продолженная нулем при $x_0 < 0$.

Доказательство проходит так же, как и в [3]. Отличается только оценка $\Pi^+ (\xi_{-, \gamma} - i)^{(s-\alpha)\gamma^{-1}} F A_\sigma u_-$, здесь $u_- = u_+ - lu$. Пусть $(\xi_{-, \gamma} - i)^{(s-\alpha)\gamma^{-1}} A_\sigma(x, \xi) = A_{-, \sigma} + R^1_{s, \sigma}(x, \xi)$; тогда

$$\int |\Pi^+ (\xi_{-, \gamma} - i)^{(s-\alpha)\gamma^{-1}} F A_\sigma u_-|^2 d\xi = \int | \Pi^+ (\xi_{-, \gamma} - i)^{(s-\alpha)\gamma^{-1}} F R^1_{s, \sigma} \{ F^{-1} [(\xi_{-,\gamma} - i)^{-(s-\alpha)\gamma^{-1}} \tilde{u}_-(\xi)] \} |^2 d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \int |(R^1_{s, \sigma} + E_{s-1}) u_-|^2 d\xi \leqslant C \int (1 + |\xi'|)^{2s} |\tilde{u}_-(\xi)|^2 d\xi \leqslant C \int (1 + |\xi'|)^{2s} |\tilde{l} u(\xi)|^2 d\xi \leqslant C_1 \| lu \|_{s, \gamma} \leqslant C_2 \| u_+ \|^+_{s, \gamma}.$$

Здесь оператор E_{s-1}, полученный при коммутировании операторов с символами $(\xi_{-, \gamma} - i)^{(s-\alpha)\gamma^{-1}}$ и $R^1_{s, \sigma}(x, \xi) \cdot (\xi_{-, \gamma} - i)^{-(s-\alpha)\gamma^{-1}}$, оценен согласно замечанию 3.2.

Теорема 3.2. *Пусть A и B — параболические операторы с символами из $D_{\alpha, \gamma, \rho}$ и $D_{\beta, \gamma, \rho}$, тогда при любом $s \geqslant 0$ имеет место оценка*

$$\| P^+_1 (A_\sigma B_\sigma - A_\sigma \square B_\sigma) u_+ \|^+_{s-\alpha-\beta+1, \gamma} \leqslant C \| u \|^+_{s, \gamma}.$$

Доказательство аналогично доказательству оценки в теореме 3.1.

Из этих теорем непосредственно следуют такие две теоремы.

Теорема 3.1′. *Пусть A — параболический оператор с символом из $D_{\alpha, \gamma, \rho}$ и $u(x) \in H_{s, \gamma, \rho}(\Omega_{0,T})$, тогда*

$$||| P^+ Au |||_{s-\alpha, \gamma, \rho}^T \leqslant C ||| u |||_{s, \gamma, \rho}^T \quad (s \geqslant 0).$$

Теорема 3.2′. *Пусть A и B — параболические операторы с символами из $D_{\alpha, \gamma, \rho}$ и $D_{\beta, \gamma, \rho}$, тогда*

$$||| P^+ (AB - A \square B) u |||_{s-\alpha-\beta+1, \gamma, \rho}^T \leqslant C ||| u |||_{s, \gamma, \rho}^T.$$

Теорема 3.3. *Пусть A — параболический оператор с символом из класса $C_{\alpha, \gamma, \rho}$, $f(x) \in H_{s-\alpha, \gamma, \rho}(\Omega_{0,T})$, $s \geqslant \alpha \geqslant 0$, тогда существует единственное решение*

$$u(x) \in H_{s, \gamma, \rho}(\Omega_{0,T}) \bigcap W_{\alpha, \gamma, \rho}(\Omega_{0,T})$$

такое, что $P^+ Au = f$, причем

$$||| u |||_{s, \gamma, \rho}^T \leqslant C ||| f |||_{s-\alpha, \gamma, \rho}^T,$$

где константа C не зависит от выбора $f(x)$.

Доказательство. $H_{s-\alpha, \gamma, \rho}(\Omega_{0,T}) \subset W_{0, \gamma, \rho}(\Omega_{0,T})$, поэтому мы найдем по теореме 2.1 $u(x) \in W_{\alpha, \gamma, \rho}(\Omega_{0,T})$, причем

$$\| u \|_{\alpha, \gamma, \rho}^T \leqslant C \| f \|_{0, \gamma, \rho}^T \leqslant C ||| f |||_{s-\alpha, \gamma, \rho}^T.$$

Если B — оператор с символом $A^{-1}(x, \xi)$, то по леммам 3.1, 3.2 и теореме 3.2′

$$P^+ Bf = P^+ BP^+ Au = u + P^+ Vu$$

или

$$u = P^+ Bf - P^+ Vu,$$

откуда и из ограниченности B и V из $H_{s-\alpha, \gamma, \rho}(\Omega_{0,T})$ в $H_{s, \gamma, \rho}(\Omega_{0,T})$ и $H_{s-\alpha+1, \gamma, \rho}(\Omega_{0,T})$ соответственно, следует, что $u(x) \in H_{s, \gamma, \rho}(\Omega_{0,T})$ и $||| u |||_{s, \gamma, \rho}^T \leqslant C ||| f |||_{s-\alpha, \gamma, \rho}^T$. Теорема 3.3 доказана.

Теорема 3.4. *Пусть A — параболический оператор с символом из класса $C_{\alpha, \gamma, \rho}$, $f(x) \in H_{s-\alpha, \gamma, \rho}(\Omega_{0,T})$, $g_k(x') \in H_{s-\left(k-\frac{1}{2}\right)\gamma, \rho} \times (R^{n-1})$, $k = 1, 2, \ldots, \varkappa$, $\varkappa = \alpha\gamma^{-1}$, $s \geqslant \alpha \geqslant 0$.*

Тогда существует $u(x) \in H_{s, \gamma, \rho}(\Omega_{0,T})$ и притом только одно такое, что

$$P^+ Au = f, \left. \frac{\partial^{k-1} u(x)}{\partial x_0^{k-1}} \right|_{x_0=0} = g_k(x'), \quad k = 1, \ldots, \varkappa,$$

$$||| u |||_{s, \gamma, \rho}^T \leqslant C \left(||| f |||_{s-\alpha, \gamma, \rho}^T + \sum_{k=1}^{\varkappa} \| g_k \|'_{s-\left(k-\frac{1}{2}\right)\gamma, \rho} \right). \tag{3.1}$$

Доказательство. Найдем сначала функцию $v(x)$ такую, что

$$\left. \frac{\partial^{k-1} v(x)}{\partial x_0^{k-1}} \right|_{x_0=0} = g_k(x'), \; k = 1, 2, \ldots, \varkappa, \; ||| v |||_{s, \gamma, \rho}^T \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k=1}^{\varkappa} \| g_k \|'_{s-\left(k-\frac{1}{2}\right)\gamma, \rho}.$$

Затем по теореме 3.3 найдем $w(x) \in W_{\alpha, \gamma, \rho}(\Omega_0, \tau)$:

$$P^+ A w = f - P^+ A v,$$

причем

$$|||w|||^T_{s, \gamma, \rho} \leqslant C(|||f|||^T_{s-\alpha, \gamma, \rho} + |||v|||^T_{s, \gamma, \rho}).$$

Тогда $u(x) = v(x) + w(x)$ есть искомое решение. Единственность его следует из оценки (3.1).

Результаты данной статьи без труда обобщаются на случай систем псевдодифференциальных уравнений, параболических по И. Г. Петровскому.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эйдельман С. Д. Параболические системы. М., «Наука», 1964, 443 с.
2. Солонников В. А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида.— «Труды МИ АН», 1965, т. 83, с. 1—162.
3. Вишик М. И., Эскин Г. И. Уравнения в свертках в ограниченной области.— «Усп. мат. наук», 1965, т. 20, вып. 3, с. 89—152.
4. Вишик М. И., Эскин Г. И. Параболические уравнения в свертках в ограниченной области.— «Мат. сб.», 1965, т. 71, вып. 2, с. 145—190.

Поступила 27 марта 1975 г.