УДК 517.55

Л. С. МАЕРГОЙЗ

ОБ ОДНОМ РЕЗУЛЬТАТЕ ВАЛИРОНА

Введение. В теории роста целых функций одной переменной известно следующее

Предложение А. *Если* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *— целая функция конечного порядка,* $M_f(r) = \max\{|f(z)|, |z| = r\}$ *— максимум ее модуля и* $\mu_f(r) = \max_k |a_k| r^k$ *— ее максимальный член, то*

$$\lim_{r\to\infty} (\ln \mu_f(r))^{-1} \ln M_f(r) = 1.$$

Этот факт теории Вимана — Валирона находит многочисленные приложения (см., например, [1]). В 1923 году Ж. Валирон сформулировал следующее утверждение о двумерном аналоге предложения A [2]: если $f(z_1, z_2)$ — целая функция конечного порядка по совокупности переменных (см. [3, с. 210]), $M_f(r_1, r_2)$ — максимум ее модуля, а $\mu_f(r_1, r_2)$ — ее максимальный член, то

$$\lim_{r_1+r_2\to\infty} (\ln \mu_f(r_1, r_2))^{-1} \ln M_f(r_1, r_2) = 1. \tag{1}$$

Анализ связанных с этим утверждением рассуждений Ж. Валирона в [2, с. 186—188] показывает, что идеи Ж. Валирона приводят фактически к следующему результату.

Пусть $G = \{x \in R^2 : \lim\limits_{r\to\infty} (\ln r)^{-1} \ln^+ M_f(r^{x_1}, \ r^{x_2}) = \infty\}$; K — конус в R^2 с вершиной в точке O такой, что $K \setminus \{o\} \subset G^{0*}$. Тогда

$$\lim_{u\in K;\ |u|\to\infty} (\ln \mu_f(e^{u_1},\ e^{u_2}))^{-1} \ln M_f(e^{u_1},\ e^{u_2}) = 1. \qquad (2)$$

Соотношение (1) не справедливо, как показывает

Пример 1. Пусть $f(z) = z_2 e^{z_1}$. Тогда $M_f(r) = r_2 e^{r_1}$, $\mu_f(r) = r_2 r_1^{[r_1]} ([r_1]!)^{-1}$, где $[r_1]$ — целая часть r_1 [4]. Используя формулу Стирлинга, нетрудно получить, что

$$\lim_{\|r\|\to\infty;\ r\in\Gamma} (\ln \mu_f(r))^{-1} \ln M_f(r) = 2,$$

где $\|r\| = r_1 + r_2$,

$$\Gamma = \{r \in R^2;\ r_1 = e^t;\ r_2 = \exp(t - e^t),\ t \geqslant 0\}. \qquad (3)$$

Недавно Дж. Гопала Кришна [5, 6] доказал асимптотическую эквивалентность логарифмов максимума модуля и максимального члена целой функции от n комплексных переменных при дополнительном ограничении: каждая из переменных $r_i \to \infty$, $i = 1, \ldots, n$.

В настоящей заметке дано обобщающее результаты Ж. Валирона и Дж. Гопала Кришна описание (в логарифмических координатах) конуса направлений роста максимума модуля $M_f(r) = \max \{|f(z)| : |z_i| \leqslant r_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ целой функции

$$f(z) = \sum_{\|k\|=0}^{\infty} a_k z^k,\ z^k = z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n};\ \|k\| = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

конечного порядка, «внутри» которого имеет место асимптотическая эквивалентность $\ln M_f(r)$ и $\ln \mu_f(r)$, где $\mu_f(r) = \max\limits_k |a_k| r^k$, $r^k = |z|^k$. При $n = 2$ этот результат по содержанию близок к теореме 1 из работы И. Ф. Битляна и А. А. Гольдберга [7].

Метод доказательства центральной теоремы заметки, основанный на идеях выпуклого анализа, отличен от методов, использованных Ж. Валироном и Дж. Гопала Кришна при получении упомянутых выше результатов. При $n = 1$ доказательство этой теоремы переходит в известное элементарное доказательство предложения А [7, с. 85].

Кроме того, в случае целой функции f бесконечного порядка получено более слабое утверждение: функции $\ln^+ M_f(r)$, $\ln^+ \mu_f(r)$ вместе с характеристикой Неванлинны $m(r;\ f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} \times \ln^+ |f(r_1 e^{i\theta_1}, \ \ldots, \ r_n e^{i\theta_n})| \, d\theta_1 \cdots d\theta_n$ функции f и функцией

* Здесь и всюду ниже A^0 — открытое ядро множества A.

$\ln^+ S(r;\ f)$, где $S(r;\ f) = \sum\limits_{\|k\|=0}^{\infty} a_k r^k$, принадлежат «одной категории роста». При $n=1$ этот факт хорошо известен [9, с. 65].

Список обозначений: $R^n_+ = \{r \in R^n : r_1, \ldots, r_n \geqslant 0\}$; $<k, u> = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i u_i$; $\varphi(rt^u) = \varphi(r_1 t^{u_1}, \ldots, r_n t^{u_n})$; если $V : R^n \to (-\infty, \infty]$, то $\operatorname{dom} V = \{u \in R^n : V(u) < \infty\}$; $V^*(y) = \sup(<u, y> - V(u) \mid u \in R^n)$ — преобразование Юнга функции V.

1°. Очевидно, что если $P(z)$ — полином от n комплексных переменных $(z_1, \ldots, z_n) = z$, то $\lim\limits_{\mu_p(r)\to\infty} (\ln \mu_p(r))^{-1} \ln M_p(r) = 1$. Центральным результатом данной заметки является следующая

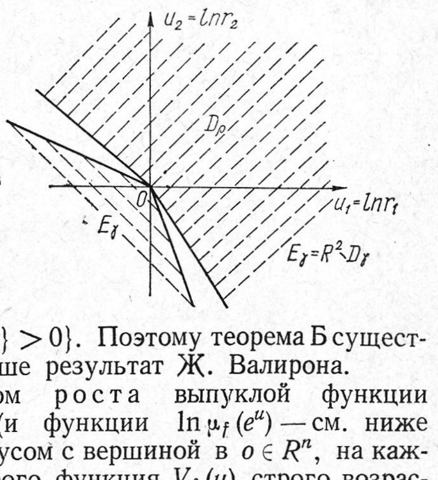
Теорема Б. *Пусть $f(z)$ — целая трансцендентная (т. е. отличается от полинома) конечного порядка ρ по совокупности переменных функция;*

$$\gamma_f(u) = \varlimsup_{t\to\infty} (\ln t)^{-1} \ln^+ M_f(t^u),\ u \in R^n, \tag{4}$$

$D_\gamma = \{u \in R^n : \gamma_f(u) > 0\}$; *$K$ — произвольный конус в R^n с вершиной в o такой, что $\overline{K} \setminus \{o\} \subset D_\gamma$. Тогда*

$$\lim_{|u|\to\infty;\ u\in K} [\ln \mu_f(e^u)]^{-1}\ \ln M_f(e^u) = 1. \tag{5}$$

Это условие выполняется, в частности, если $0 < \rho < \infty$ и $\overline{K} \setminus \{o\} \subset D_\rho = \{u \in R_n : \rho_f(u) > 0\}$, где $\rho_f(u) = \varlimsup\limits_{t\to\infty} (\ln t)^{-1} \ln^+ \ln^+ M_f(t^u)$ — порядок-функция для $f(z)$ [10, с. 124] (см. рисунок).



Конус D_γ в общем случае не совпадает с конусом $G_\gamma = \{u \in R^n : \gamma_f(u) = \infty\}$. Так, в примере 1 $G_\gamma = \{u \in R^2 : u_1 > 0\}$, а $D_\gamma = \{u \in R^2 : \max\{u_1, u_2\} > 0\}$. Поэтому теорема Б существенно усиливает упомянутый выше результат Ж. Валирона.

Конус D_γ является конусом р о с т а выпуклой функции $V_f(u) = \ln M_f(e^u)$ [3, с. 138] (и функции $\ln \mu_f(e^u)$ — см. ниже лемму 1), т. е. наибольшим конусом с вершиной в $o \in R^n$, на каждом исходящем из o луче которого функция $V_f(u)$ строго возрастает при удалении в ∞.

Одна из причин, почему соотношение (1) может не иметь места, как раз заключается в том, что в общем случае конус $\{u \in R^2 : \max\{u_1, u_2\} > 0\}$ содержит уходящие в ∞ пути, на которых рассматриваемые в (1) функции не возрастают. В этом убеждает такой

Пример 2. Пусть $f(z) = 1 + z_1 z_2$. Соотношение (1) нарушается, поскольку функции $M_f(r)$, $\mu_f(r)$ постоянны, например, на множестве $\{r \in R_+^2 : r_1 r_2 = 10\}$.

2°. Для полноты изложения приведем следующие известные определения, на которые будем опираться в дальнейшем.

Определение 1 [11, 12, с. 77]. *Пусть S — замкнутое выпуклое множество в R^m. Асимптотическим конусом $A(S)$ множества S называется максимальный конус с вершиной в 0, сдвиг которого можно поместить в S, т. е.*

$$A(S) = \{y \in R^m : x + \lambda y \in S,\ \forall \lambda \geqslant 0;\ x \in S\}. \tag{6}$$

Определение 2 [10, с. 83]. *Пусть $\varphi : R^n \to (-\infty, \infty]$ — полунепрерывная снизу выпуклая функция, причем $|\varphi(0)| < \infty$; $\varphi \not\equiv \infty$. Функцию $\varphi O^+(y) = \lim\limits_{\lambda \to \infty} \lambda^{-1} \varphi(\lambda y)$ назовем асимптотической функцией для φ.*

Ниже будет нужна следующая формула [13, с. 52]:

$$\varphi O^+(y) = \lim_{\lambda \to \infty;\ u \to y} \lambda^{-1} \varphi(\lambda u). \tag{7}$$

Геометрический смысл функции φO^+ таков: надграфик φO^+ — асимптотический конус надграфика функции φ [12, с. 82].

Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *В обозначениях и условиях теоремы Б справедливы формулы:*

$$\lim_{t \to \infty} (\ln t)^{-1} \ln^+ \mu_f(t^x) \equiv \gamma_f(x),\ x \in R^n;$$

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} (\ln t)^{-1} \ln^+ \ln^+ \mu_f(t^x) \equiv \rho_f(x),\ x \in R^n.$$

Доказательство. Справедливо такое неравенство в R_+^n (ср. [10, с. 127]) для всех $\alpha > 1$:

$$\mu_f(r) \leqslant M_f(r) \leqslant S(r;\ f) \leqslant (1 - \alpha^{-1})^{-n} \mu_f(\alpha r). \tag{8}$$

Лемма вытекает теперь отсюда и из того факта, что у надграфиков выпуклой функции $v(u) = \ln^+ \mu_f(e^u)$ и ее сдвига $v(u + \ln \alpha)$ одинаковые асимптотические конусы и, следовательно, одинаковые асимптотические функции. Совершенно аналогичное утверждение верно и для пары квазивыпуклых функций $\ln^+ \ln^+ M_f(e^u)$ и $\ln^+ \ln^+ \mu_f(e^u)$ [10, с. 121].

Лемма 2. *Пусть X — замкнутое выпуклое множество в R^n; $A(X)$ — его асимптотический конус; $X_c = X \cap \{x \in R^n : \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \geqslant c\}$; $P(X_c) = \{\lambda x,\ \lambda \geqslant 0,\ x \in X_c\}$ — проективный конус множества X_c. Тогда $A(X) = \bigcap\limits_{c > 0} \overline{P(X_c)}$.*

Лемма эквивалентна такому известному утверждению [12, с. 79].

Пусть X — замкнутое выпуклое множество в R^n. Тогда $A(X)$ (см. (6)) — замкнутый конус, состоящий из пределов всевозможных последовательностей вида $\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_m x_m, \ldots$, где $x_i \in X$, а $\lambda_i > 0$; $\lambda_i \to 0$ при $i \to \infty$.

Следующая лемма близка по своему содержанию к теореме 14.2 из [12]

Лемма 3. *Пусть* $V : R^n \to (-\infty, \infty]$; $V \not\equiv \infty$ — *полунепрерывная снизу выпуклая функция;* $X = \overline{\operatorname{dom} V^*}$. *Тогда в обозначениях определений 1, 2 имеем:*

$$\overline{\operatorname{dom} VO^+} = \{u \in R^n : \langle u, y \rangle \leqslant 0, \ \forall y \in A(X)\}. \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим индикаторную функцию множества X: $\delta(y|x) = 0$, $y \in X$; $\delta(y|x) = \infty$, $y \in R^n \setminus X$ [10, с. 45]. Сопряженная к ней функция $\delta^*(u)$ является опорной функцией множества X [12, с. 45, 130]. Но $X = \overline{\operatorname{dom} V^*}$, поэтому [12, теорема 13.3]

$$\delta^*(u) \equiv VO^+(u), \ u \in R^n; \ \overline{\operatorname{dom} \delta^*} = \overline{\operatorname{dom} VO^+} = T. \tag{10}$$

По той же причине опорная функция $\nu(y)$ множества $\operatorname{dom} \delta^*$ совпадает с асимптотической функцией для $\delta(y|x)$. Справедлива формула [12, следствие 13.2.1]: $T = \{u \in R^n : \langle u, y \rangle \leqslant \nu(y), \ \forall y \in R^n\} = \{u \in R^n : \langle u, y \rangle \leqslant 0, \ \forall y \in A(X)\}$, так как $\nu(y) = \delta(y|x)$.

3°. Доказательство теоремы Б.

Заметим, что D_γ — открытый конус в R^n; $\gamma_f(u)$ — полунепрерывная снизу функция [12, теорема 8.5]. Поэтому условие (5) эквивалентно следующему условию:

$$\lim_{u \to x;\ t \to \infty} (\ln \mu_f(t^u))^{-1} \ln M_f(t^u) = 1, \ \forall x \in D_\gamma. \tag{11}$$

1. Пусть множество $\Gamma^0 \neq \varnothing$, где

$$\Gamma = \{x \in R^n : 0 < \gamma_f(x) < \infty\}. \tag{12}$$

Так как $V(u) = \ln M_f(e^u)$ — выпуклая функция, то последовательность $\Phi_t(u) = t^{-1}[V(ut) - V(0)]$ возрастает при $t \to \infty$ и ее предел γ_f (см. (4)) — выпуклая и, следовательно, непрерывная функция на Γ^0. Поэтому $\Phi_t(u) \to \gamma_f(u)$ при $t \to \infty$ равномерно на любом компакте $F \subset \Gamma^0$. То же самое справедливо и для функции $\ln \mu_f(e^u)$. Из леммы 1 теперь вытекает справедливость условия (11) для $x \in \Gamma^0$.

2. Поскольку функция f имеет конечный порядок ρ по совокупности переменных, то для любого $\gamma > \rho$ найдется $s > 0$ такое, что коэффициенты Тейлора $\{a_k\}$ для f удовлетворяют неравенству [3, с. 211]

$$|a_k| < \|k\|^{-\frac{\|k\|}{\gamma}}, \ \|k\| > s. \tag{13}$$

Пусть $N_f = \{k : a_k \neq 0\}$; X — замкнутая выпуклая оболочка совокупности N_f целых точек; $A(X)$ — асимптотический конус множества X; $\Pi = \{u \in R^n : \sum_{i=1}^{n} u_i = \gamma\}$; E_ε — ε — окрестность множества $\Pi \cap A(X)$. Учитывая, что $X \subset R_+^n$, заключаем из леммы 2 о существовании такого $c = c(\varepsilon) > s$ (см. (13)), что

$$\overline{P(X_c)} \cap \Pi \subset E_\varepsilon. \qquad (14)$$

Пусть

$$S(\varepsilon; u) = \max_{\alpha \in E_\varepsilon} e^{<\alpha,\, u>}; \quad T_\varepsilon(u) = \max\{c,\ 2^\gamma S(\varepsilon,\ u)\}. \qquad (15)$$

Имеем из (13), полагая $L = \{k \in N_f : \|k\| > T_\varepsilon(u)\}$:

$$M_f(e^u) \leqslant \sum_{k \in N_f} |a_k|\, e^{<k,\, u>} \leqslant \sum_{\|k\| \leqslant T_\varepsilon(u)} |a_k|\, e^{<k,\, u>} +$$

$$+ \sum_{k \in L} e^{<k,\, u>} \|k\|^{-\frac{\|k\|}{\gamma}}. \qquad (16)$$

Из (14), (15) находим:

$$\sup_{\alpha \in E_\varepsilon} 2^\gamma e^{<\alpha,\, u>} > 2^\gamma \exp\left(\frac{\gamma < k,\ u >}{\|k\|}\right), \ \forall k \in N_f,\ \|k\| > c.$$

Поэтому $e^{<k,\, u>} \|k\|^{-\frac{\|k\|}{\gamma}} \leqslant 2^{-\|k\|}$, $\|k\| > T_\varepsilon(u)$, и из (16) заключаем:

$$\mu_f(e^u) \leqslant M_f(e^u) \leqslant (T_\varepsilon(u) + 1)^n \mu_f(e^u) + 1. \qquad (17)$$

3. Множество $D_\gamma \setminus \Gamma^0 \neq \varnothing$ (см. (12)) : $f(z)$ — трансцендентная функция. Рассмотрим на нем функцию

$$B_\varepsilon(x) = \lim_{u \to x;\ t \to \infty} (v(ut))^{-1} \ln T_\varepsilon(ut); \ v(u) = \ln \mu_f(e^u).$$

Если $vo^+(x) = \gamma_f(x) = \infty$ (см. лемму 1), то, используя формулу (7), получаем: $B_\varepsilon(x) = 0$; если же $x \in \Gamma \setminus \Gamma^0$, то

$$B_\varepsilon(x) = (\gamma_f(x))^{-1} (\sup\{<x,\ y>,\ y \in \Pi \cap A(X)\} + \varepsilon |x|). \qquad (18)$$

Заметим, что $v(u) = \varphi^*(u)$, где $\varphi(y) = -\ln|a_y|$, $y \in N_f$; $\varphi(y) = \infty$, $y \in R^n \setminus N_f$. Поэтому [14, предложения 1.3—1.4] в обозначениях пункта 2 доказательства теоремы Б находим: $\overline{\operatorname{dom} v^*} = X$. Учитывая, что $A(X) = \{\lambda y,\ \lambda \geqslant 0;\ y \in A(X) \cap \Pi\} \subset R_+^n$, заключаем теперь из леммы 3:

$$T^{\text{опр}} = \overline{\operatorname{dom} vo^+} = \{u \in R^n : <u,\ y> \leqslant 0,\ \forall y \in A(X) \cap \Pi\}. \qquad (19)$$

Отсюда вытекает, что если $x \in \partial T$, то $\sup\{<x,\ y>,\ y \in A(X) \cap \Pi\} = 0$. Следовательно, из (18) имеем:

$$B_\varepsilon(x) = 0,\ \forall x \in D_\gamma \setminus \Gamma; \ B_\varepsilon(x) = (\gamma_f(x))^{-1} \varepsilon |x|,\ \forall x \in \Gamma \setminus \Gamma^0. \qquad (20)$$

Так как $\varepsilon > 0$ — произвольно мало, то, используя (20), нетрудно убедиться из неравенства (17) в справедливости формулы (11) и для $x \in D_\gamma \setminus \Gamma^0$.

4. Последняя часть теоремы объясняется тем, что $D_\rho \subset \{x \in R^n : \gamma_f(x) = \infty\}$, причем для функции f порядок-функция $\rho_f(u)$ — конечная выпуклая и, следовательно, непрерывная функция в R^n [10].

5. Если множество $\Gamma^0 = \varnothing$ (или если Γ — открытое множество), доказательство теоремы становится столь же простым, как и при $n = 1$ [8, с. 85]. В этом случае отпадает необходимость в использовании лемм 2, 3, а вместо функции $T_\varepsilon(u)$ достаточно рассмотреть функцию $\max\{s, 2^\gamma \sup(e^{<\alpha, u>}, \alpha \in \Pi \cap R^n_+)\}$ (см. (13), (15)).

Следствие (теорема Дж. Г. Кришна [5, 6]). *В условиях теоремы Б справедливо соотношение*

$$\lim_{r_1, \ldots, r_n \to \infty} (\ln \mu_f(r))^{-1} \ln M_f(r) = 1,$$

если целая функция $f(z)$ не является постоянной ни по одной из переменных $z_1, \ldots, z_n$.

Достаточно показать, что $R^n_+ \setminus \{o\} \subset D_\gamma$. Так как функция $f(z)$ зависит (существенно) от переменных $z_1, \ldots, z_n$, то в ее тейлоровском разложении найдутся коэффициенты $a_k^{(j)} \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$; $k^{(j)} = (k_{j1}, \ldots, k_{jn})$ такие, что $k_{jj} > 0$ при $j = 1, \ldots, n$. Пусть $\varphi(r) = \max(|a_{k^{(j)}}|, r^{k^{(j)}}, 1 \leqslant j \leqslant n)$. Тогда

$$\varphi(r) \leqslant \mu_f(r), \ \forall r \in R^n_+; \ \nu(u) \leqslant \gamma_f(u), \ \forall u \in R^n,$$

где $\nu(u) = \max\{<k^{(j)}, u>, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ — асимптотическая функция для $\ln \varphi(e^u)$. Поэтому $R^n_+ \setminus \{0\} \subset \{u \in R^n : \nu(u) < 0\} \subset D_\gamma$. Отметим также, что дополнение $R^n \setminus D_\gamma$ множества D_γ — выпуклый конус, содержащий отрицательный октант $\{u \in R^n : u_1, \ldots, u_n \leqslant 0\}$.

Замечание. В теореме Б условие $\overline{K} \setminus \{o\} \subset D_\gamma$ ослабить нельзя, как показывает пример 1. Здесь $D_\gamma = \{u \in R^2 : \max\{u_1, u_2\} > 0\}$. Пусть Γ (см. (3)) нельзя поместить ни в один конус K с вершиной в O и такой, что $\overline{K} \setminus \{o\} \subset D_\gamma$. Этот пример легко обобщается на случай любого числа переменных: достаточно взять функцию $f(z) = z_n \exp\{z_1 + \cdots z_{n-1}\}$.

4°. Пусть $A = \{\Phi\}$ — класс полунепрерывных сверху неубывающих по каждой переменной функций в R^n_+, выпуклых относительно $\ln r_1, \ldots, \ln r_n$ в $R^n_0 = \{r \in R^n : r_1, \ldots, r_n > 0\}$; $\rho(\Phi)$ — порядок функции Φ из A по совокупности переменных [3]; $P_n = \Phi \in A : 0 < \rho(\Phi) < \infty$; $\rho_\Phi(u) = \overline{\lim_{t \to \infty}} (\ln t)^{-1} \ln^+ \Phi(t^u)$ — порядок-функция функции Φ; $T_\Phi = \{u \in R^n : \rho_\Phi(u) = 1\}$ — порядок-гиперповерхность функции Φ; $\sigma_\Phi(x)$ — x-тип функции Φ, т. е. тип функции $\varphi_x(t) = \Phi(t^x)$.

Определение 3. *Неотрицательные функции Φ, χ из A обладают одинаковой категорией роста, если*

1) у функций $\Phi(e^u)$, $\chi(e^u)$ общая асимптотическая функция с точностью до постоянного множителя;

2) *у Φ, χ общая порядок-функция:* $\rho(u) \overset{\text{опр}}{=} \rho_\Phi(u) = \rho_\chi(u)$, $u \in R^n$;

3) в случае, когда функция Φ, $\chi \in P_n$, у них одновременно минимальный, нормальный или максимальный x-тип при любом $x \in T^\rho$, где $T^\rho = \{u \in R^n : \rho(u) = 1\}$ — их общая порядок-гиперповерхность, и один класс сходимости, т. е. функции $\varphi_x(t) = \Phi(t^x)$, $\psi_x(t) = \chi(t^x)$ принадлежат одному классу сходимости или расходимости при любом $x \in T^\rho$ [9, с. 62].

Замечание. При $n = 1$ определение 3 переходит в известное определение, данное Б. Я. Левиным [15] (условие *1* в этом случае выполняется автоматически). Если функции Φ, χ имеют одинаковую категорию роста, то условие *3* определения 3 справедливо и при любом $x \in \{u \in R^n : 0 < \rho(u) < \infty\}$.

Теорема В. *Функции* $\ln^+ M_f(r)$, $\ln^+ \mu_f(r)$, $m(r, f)$, $S(r, f)$ (см. введение) *имеют одинаковую категорию роста, какова бы ни была целая функция $f(z)$* в C^n.

Предварительно отметим ряд лемм.

Лемма 4. *Пусть $\Phi \in A$. Тогда в любой точке $x \in R^n$ у функции Φ порядок-функция*

$$\rho_\Phi(x) \equiv \varlimsup_{t \to \infty} (\ln t)^{-1} \Phi(rt^x), \ r \in R_0^n.$$

Лемма 5. *Пусть $\Phi \in P_n$; $x \in \{u \in R^n : \rho_\Phi(u) > 0\}$. Если интеграл $\int_1^\infty t^{-\rho_\Phi(x)-1} \Phi(rt^x)\, dt$ сходится (расходится) в некоторой точке $b \in R_0^n$, то он сходится (расходится) и при всех $r \in R_+^n$.*

Лемма 6. (Ср. [9, с. 54]). *При любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 1$; $r \in R_+^n$ справедливо неравенство*

$$m(r;\ f) \leqslant \ln^+ M_f(r) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_i - 1}\right)^2 m(\alpha_1 r_1, \ \ldots, \ \alpha_n r_n f), \qquad (21)$$

какова бы ни была целая функция $f(z)$ в C^n.

Леммы 4, 5, 6 являются модификацией соответственно теоремы Э. Бореля [3, с. 180], теоремы Л. И. Ронкина [3, с. 189], неравенства Л. И. Ронкина [3, с. 407].

Доказательство теоремы В.

Перечисленные в теореме функции — из класса A [3, с. 138]. Поскольку неравенства (6), (21) однотипные, то достаточно доказать теорему для $\Phi = \ln^+ M_f(r)$, $m = m(r;\ f)$. Условие *1* определения 3 для них проверяется точно так же, как при доказательстве леммы 1. Справедливость условия *2* вытекает из (21) и леммы 4. Если Φ и, следовательно, $m \in P_n$, то их общая порядок-функция $\rho(u)$ конечна и выпукла в R^n [10]. Из (21) имеем для всей $x \in T^{\rho}$; $r \in R^n_+$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 1$:

$$\sigma_m(r;\ x) \leqslant \sigma_\Phi(r;\ x) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_i - 1}\right)^2 \sigma_m((\alpha_1 r_1, \ldots, \alpha_n r_n);\ x), \quad (22)$$

где $\sigma_\Phi(r;\ x) = \lim\limits_{a \to r;\ t \to \infty} t^{-1} \Phi(at^x)$; $\sigma_m(r;\ x)$ — x-тип-функции соответственно функций Φ, m [16]. Когда Φ, $m \in P_n$, то $\sigma_m(r;\ x)$ либо $\equiv 0$, либо $\equiv \infty$, либо $0 < \sigma_m(r;\ x) < \infty$, $\forall r \in R^n_0$ [16]. Отсюда, из леммы 5 и неравенства (21) и следует *3*.

Замечание. Структура общей порядок-гиперповерхности и, следовательно, гиперповерхности сопряженных порядков перечисленных в теореме В функций для случая, когда они из P_n, описана в [10] (ср. [3, с. 379]).

Из (22) и [16, с. 1039—1043] вытекает

Следствие. *Пусть $f(z)$ — целая функция такая, что функция $\Phi(r) = \ln^+ M_f(r) \in P_n$ и имеет нормальный x-тип $\sigma_\Phi(x)$. Тогда при всех $r \in R^n_+$*

$$\sigma_m(r;\ x) \leqslant \sigma_\Phi(r;\ x) \leqslant A_x \sigma_m(r;\ x), \quad (23)$$

где $A_x = \inf\limits_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 1} \sup\limits_{y \in \partial\rho_\Phi(x)} \prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i^{2+y_i}}{(\alpha_i - 1)^2}$; *$\partial\rho_\Phi(x)$—субдифференциал порядок-функции $\rho_\Phi(u)$ в точке $x \in T_\Phi$* [12]; *$\sigma_m(r;\ x)$, $\sigma_\Phi(r;\ x)$ — x-тип-функции для $m(r;\ f)$, $\Phi(r)$. В частности, если функция $\rho_\Phi(u)$ дифференцируема в точке x, то* $A_x = 4^{-n} \prod\limits_{i=1}^{n} y_i^{-y_i} (2 + y_i)^{2+y_i}$, $y_i = \dfrac{\partial\rho}{\partial x_i}$, $i = 1,\ n$.

При $n = 1$ справедливо более тонкое неравенство по сравнению с (23) (см. [9], приложение): $\rho_\Phi(x) = \max\{0,\ \gamma x\}$, $\gamma > 0$.

В заключение выражаю признательность Л. И. Ронкину за ряд ценных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Basinger R. C. On the coefficients of entire series with gaps. — «I. Math. Anal. Appl.», 1972, vol. 38, N 3, p. 790—792.
2. Valiron G. Sur un treoreme de M. Hadamard. — «Bull. Sci. math.», 1923, vol. 47, N 1, p. 177—192.
3. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., Наука», 1971. 430 с.
4. Полия Г., Сеге Г. Задачи и теоремы анализа. Т. 2, М., Гостехиздат, 1956. 407 с.
5. Gopala Krishna J. Maximum tert of a power series in one and several complex variables. — «Pacif. J. Math.», 1969, vol. 29, N 3, p. 609—622.

6. Gopala Krishna J. Probabilistic techniques leading to a Valiron type theorem in several complex variables. — «Ann. Math. Statist.», 1970, vol. 41, N 6, p. 2126—2129.
7. Битлян И. Ф., Гольдберг А. А. Теорема Вимана—Валирона для целых функций многих комплексных переменных. — «Вестн. Ленингр. ун-та», № 13, сер. мат., мех. и астрон., 1959, вып. 2, с. 27—41.
8. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М., Физматгиз, 1962. 158 с.
9. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970. 591 с.
10. Маергойз Л. С. Функция порядков и шкалы роста целых функций многих переменных. — «Сиб. мат. журн.», 1972, т. XIII, № 1, с. 118—132.
11. Stoker J. J. Unbounded convex point sets. — «Amer. J. Math»., 1940, vol. 62, p. 165—179.
12. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М., «Мир», 1973. 468 с.
13. Rockafellar R. T. Level sets and continuity of conjugate convex functions. — «Trans. Amer. Math. Soc»., 1966, vol. 123, N 1, p. 46—63.
14. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи. — УМН, 1968, т. XXIII, № 6 (141), с. 51—116.
15. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956. 632 с.
16. Маергойз Л. С. Функция типов целой функции многих переменных по направлениям ее роста. — «Сиб. мат. журн.», 1973, т. XIV, № 5, с. 1037—1056.

Поступила 15 октября 1974 г.