УДК 517.9

*Д. Ш. ЛУНДИНА*

# ТОЧНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ ФОРМУЛАМИ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ И ГЛАДКОСТЬЮ ПОТЕНЦИАЛА

Обозначим через $W_2^n(0, \pi)$ пространство Соболева, состоящее из $n$ раз дифференцируемых функций $f(x)$, у которых $f^{(n)}(x) \in L_2(0, \pi)$.

Если вещественная функция $v(x) \in W_2^n(0, \pi)$, то уравнение Штурма — Лиувилля

$$y'' - v(x)\, y + \mu y = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi) \tag{1}$$

при вещественных $\lambda = \sqrt{\mu}$ имеет фундаментальную систему решений $y(x, \lambda)$, $\overline{y(x, \lambda)}$ вида

$$y(x, \lambda) = e^{i\lambda x}\left[1 + \frac{u_1(x)}{i\lambda} + \cdots + \frac{u_n(x)}{(i\lambda)^n} + \frac{u_{n+1}(x, \lambda)}{(i\lambda)^{n+1}}\right], \tag{2}$$

где

$$u_1(x) = \frac{1}{2}\int_0^x v(t)\, dt;$$

$$u_k(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x L[u_{k-1}(t)]\,dt,\ k \geqslant 2;\ L \equiv \frac{d^2}{dx^2} - v(x), \tag{3}$$

а функция

$$v_{n+1}(x, \lambda) = e^{i\lambda x} u_{n+1}(x, \lambda) \tag{4}$$

удовлетворяет уравнению

$$L[v_{n+1}(x, \lambda)] + \lambda^2 v_{n+1}(x, \lambda) = -i\lambda e^{i\lambda x} L[u_n(x)]$$

и граничным условиям

$$v_{n+1}(0, \lambda) = v'_{n+1}(0, \lambda) = 0$$

(см., например, [1]).

Введем для краткости обозначения

$$P(x, \lambda) = 1 + \frac{u_1(x)}{i\lambda} + \cdots + \frac{u_n(x)}{(i\lambda)^n} + \frac{u_{n+1}(x, \lambda)}{(i\lambda)^{n+1}},\ \sigma(x, \lambda) = \frac{P'(x, \lambda)}{P(x, \lambda)}. \tag{5}$$

Тогда формула (2) перепишется в виде

$$y(x, \lambda) = \exp\left[i\lambda x + \int_0^x \sigma(t, \lambda)\,dt\right]. \tag{2'}$$

***Лемма 1.*** *Если* $v(x) \in W_2^n(0, \pi)$, *то*

$$v_{n+1}(x, \lambda) = e^{i\lambda x}\Big[u_{n+1}(x) + \varphi(x, \lambda) + \\ + \frac{1}{2i\lambda}\int_0^x v(t)\,u_{n+1}(t)\,dt\Big] + \frac{\gamma_{n+1}(x, \lambda)}{2i\lambda}, \tag{6}$$

$$v'_{n+1}(x, \lambda) = i\lambda e^{i\lambda x}\Big[u_{n+1}(x) - \varphi(x, \lambda) + \\ + \frac{1}{2i\lambda}\int_0^x v(t)\,u_{n+1}(t)\,dt\Big] + \tilde{\gamma}_{n+1}(x, \lambda), \tag{7}$$

*где*

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{2}\int_0^x e^{-2i\lambda(x-t)} L[u_n(t)]\,dt,$$

*а* $\gamma_{n+1}(x, \lambda)$, $\tilde{\gamma}_{n+1}(x, \lambda)$ *по* $\lambda$ — *функции экспоненциального типа степени* $x$, *суммируемые с квадратом на вещественной оси.*

Доказательство. Пусть $s(x, \lambda)$, $c(x, \lambda)$ — решения уравнения (1), определяемые условиями $s(0, \lambda) = c'(0, \lambda) = 0$, $s'(0, \lambda) = c(0, \lambda) = 1$. Тогда

$$v_{n+1}(x, \lambda) = -i\lambda \int_0^x [s(x, \lambda)\,c(t, \lambda) - s(t, \lambda)\,c(x, \lambda)]\,e^{i\lambda t} L[u_n(t)]\,dt.$$

Как функция переменной $t$, $s\varphi(t, x, \lambda) = s(x, \lambda) c(t, \lambda) - s(t, \lambda) c(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям $\varphi(x, x, \lambda) = 0$, $\varphi_t(t, x, \lambda)|_{t=x} = -1$ и, следовательно, по $\lambda$ является функцией экспоненциального типа степени $(x-t)$, а $v_{n+1}(x, \lambda)$ — степени $x$.

Замечая, что $v_{n+1}(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$v_{n+1}(x, \lambda) = -i \int_0^x \sin\lambda(x-t)\, e^{i\lambda t} L[u_n(t)]\, dt + \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} v(t)\, v_{n+1}(t, \lambda)\, dt \qquad (8)$$

и итерируя это уравнение один раз, находим, что

$$v_{n+1}(x, \lambda) = e^{i\lambda x}\left[-\frac{1}{2}\int_0^x L[u_n(t)]\, dt + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-2i\lambda(x-t)} L[u_n(t)]\, dt + \frac{1}{2i\lambda}\int_0^x v(t)\, u_{n+1}(t)\, dt\right] + \frac{\gamma_{n+1}(x, \lambda)}{2i\lambda}.$$

Отсюда следует, что $\gamma_{n+1}(x, \lambda)$ — функция экспоненциального типа степени $x$. Непосредственной проверкой убеждаемся также, что $\gamma_{n+1}(x, \lambda) \in L_2(-\infty, \infty)$.

Формулу (7) получим, дифференцируя уравнение (8) по переменной $x$.

*Замечание.* Как следует из рекуррентных формул (3),

$$L[u_n(t)] = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}} v^{(n)}(t) + g(t),$$

где $g(t) \in W_2^1(0, \pi)$. Поэтому

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{2}\int_0^x e^{-2i\lambda(x-t)} L[u_n(t)]\, dt = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\int_0^x e^{-2i\lambda(x-t)} v^{(n)}(t)\, dt + \frac{1}{4i\lambda} g(x) - \frac{1}{4i\lambda} g(0)\, e^{-2i\lambda x} - \frac{1}{4i\lambda}\tilde{g}(x, \lambda), \qquad (9)$$

причем $\tilde{g}(x, \lambda) = \int_0^x e^{-2i\lambda(x-t)} g'(t)\, dt$ — функция экспоненциального типа по $\lambda$ степени, не превышающей $2x$, принадлежащая $L_2(-\infty, \infty)$.

Рассмотрим граничную задачу, определяемую уравнением (1) и условиями

$$h\varphi(0, \lambda) - \varphi'(0, \lambda) = 0; \;\; H\varphi(\pi, \lambda) - \varphi'(\pi, \lambda) = 0. \qquad (10)$$

Пусть $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k, \ldots$ — собственные значения этой задачи. Как известно [2], при $k \to \infty$ выполняются асимптотические равенства

$$\sqrt{\mu_k} = k + \frac{a_0}{k} + \cdots + \frac{a_l}{k^{2l+1}} + \frac{\gamma_k}{k^{2l+1}}, \quad l = \left[\frac{n}{2}\right], \quad \sum |\gamma_k|^2 < \infty.$$

В настоящей заметке мы получим уточнение этих формул, аналогично тому, как это сделано в [3] для других краевых задач.

**Теорема 1.** *Если вещественная функция* $v(x) \in W_2^n(0, \pi)$, *то собственные значения* $\mu_k = \lambda_k^2$ *задачи* (1)—(10) *при* $k \to \infty$ *удовлетворяют асимптотическим равенствам*

$$\lambda_k = k + \sum_{1 \leqslant 2j+1 \leqslant n+3} \frac{b_{2j+1}}{k^{2j+1}} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{(-1)^{n-1}}{(2ik)^{n+1}} \int_0^\pi v^{(n)}(t) \quad e^{2ikt}$$

$$\times \left[1 + \frac{2h - \frac{2}{\pi} t\,(h + u_1(\pi) - H)}{ik}\right] dt + \frac{\delta_k}{k^{n+2}} + \frac{\varepsilon_k(H, h)}{k^{n+3}},$$

*где* $\delta_k$ *не зависит от* $H$, $h$ *и*

$$\sum |\delta_k|^2 < \infty, \quad \sum |\varepsilon_k(H, h)|^2 < \infty.$$

Доказательство. Так как функции $y(x, \lambda)$, $\overline{y(x, \lambda)}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1), то задача (1)—(10) будет иметь нетривиальное решение тогда и только тогда, когда система

$$h\,[x_1 y(0, \lambda) + x_2 \overline{y(0, \lambda)}] - [x_1 y'(0, \lambda) + x_2 \overline{y'(0, \lambda)}] = 0,$$
$$H\,[x_1 y(\pi, \lambda) + x_2 \overline{y(\pi, \lambda)}] - [x_1 y'(\pi, \lambda) + x_2 \overline{y'(\pi, \lambda)}] = 0$$

имеет ненулевое решение относительно $x_1$, $x_2$.

Приравнивая определитель этой системы нулю, после простых преобразований получим уравнение

$$\frac{y(\pi, \lambda)}{\overline{y(\pi, \lambda)}} = \frac{\left[1 - \frac{h}{i\lambda} + \frac{\sigma(0, \lambda)}{i\lambda}\right]\left[1 + \frac{H}{i\lambda} - \frac{\overline{\sigma(\pi, \lambda)}}{i\lambda}\right]}{\left[1 + \frac{h}{i\lambda} - \frac{\overline{\sigma(0, \lambda)}}{i\lambda}\right]\left[1 - \frac{H}{i\lambda} + \frac{\sigma(\pi, \lambda)}{i\lambda}\right]}, \tag{11}$$

квадраты корней которого есть собственные значения рассматриваемой краевой задачи. Используя формулу (2′), перепишем это уравнение в виде

$$\exp\left[2i\left(\lambda\pi + \operatorname{Im}\int_0^\pi \sigma(t, \lambda)\,dt\right)\right] =$$

$$= \exp\left\{2i \operatorname{Im}\left[\ln\left(1 - \frac{h}{i\lambda} + \frac{\sigma(0, \lambda)}{i\lambda}\right) - \ln\left(1 - \frac{H}{i\lambda} + \frac{\sigma(\pi, \lambda)}{i\lambda}\right)\right]\right\}.$$

Отсюда, в силу обозначений (5), находим, что $\lambda_k = \sqrt{\mu_k}$ является корнем уравнения

$$(\lambda - k)\pi = \operatorname{Im}\left\{\ln\left(1 - \frac{h}{i\lambda} + \frac{\sigma(0, \lambda)}{i\lambda}\right) - \right.$$
$$- \ln\left[\left(1 - \frac{H}{i\lambda}\right)\left(1 + \frac{u_1(\pi)}{i\lambda} + \cdots + \frac{u_n(\pi)}{(i\lambda)^n} + \right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{u_1'(\pi)}{(i\lambda)^2} + \cdots + \frac{u_n'(\pi)}{(i\lambda)^{n+1}} + \frac{u_{n+1}(\pi, \lambda)}{(i\lambda)^{n+1}}\left(1 - \frac{H}{i\lambda}\right) + \frac{u_{n+1}'(\pi, \lambda)}{(i\lambda)^{n+2}}\right]\right\}$$

или

$$(\lambda - k)\pi = \operatorname{Im}\left\{\ln\left(1 - \frac{h}{i\lambda} + \frac{\sigma(0, \lambda)}{i\lambda}\right) - \right.$$
$$- \ln\left[1 + \frac{u_1(\pi) - H}{i\lambda} + \cdots + \frac{u_n'(\pi) - Hu_n(\pi)}{(i\lambda)^{n+1}} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{(i\lambda)^{n+2}}(i\lambda u_{n+1}(\pi, \lambda) + u_{n+1}'(\pi, \lambda) - Hu_{n+1}(\pi, \lambda)\, u_{n+1}(\pi,\lambda)\right]\right\}. \quad (12)$$

Замечая, что

$$i\lambda u_{n+1}(\pi, \lambda) + u_{n+1}'(\pi, \lambda) = e^{-i\lambda\pi} v_{n+1}'(\pi, \lambda),$$

где $v_{n+1}(x, \lambda)$ — функция, определенная равенством (4), находим, используя формулы (6), (7), (9):

$$\frac{1}{(i\lambda)^{n+2}}(i\lambda u_{n+1}(\pi, \lambda) + u_{n+1}'(\pi, \lambda) - Hu_{n+1}(\pi, \lambda)) =$$
$$= \frac{u_{n+1}(\pi)}{(i\lambda)^{n+1}} + \frac{1}{(i\lambda)^{n+2}}\left(\frac{1}{2}\int_0^\pi v(t)\, u_{n+1}(t)\, dt - Hu_{n+1}(\pi)\right) +$$
$$+ \frac{H}{2(i\lambda)^{n+3}}\int_0^\pi v(t)\, u_{n+1}(t)\, dt + \frac{1}{4(i\lambda)^{n+2}}(e^{-i\lambda\pi} g(0) - g(\pi))\left(1 + \frac{H}{i\lambda}\right) +$$
$$+ \frac{(-1)^n}{(2i\lambda)^{n+1}}\int_0^\pi e^{-2i\lambda(\pi - t)} v^{(n)}(t)\, dt\left(1 + \frac{H}{i\lambda}\right) + \frac{\hat{\delta}(\lambda)}{(i\lambda)^{n+2}} + \frac{\sigma(H, h, \lambda)}{(i\lambda)^{n+3}}.$$

Здесь

$$\hat{\delta}(\lambda) = \frac{1}{4}\int_0^\pi e^{-2i\lambda(\pi - t)} g'(t)\, dt + e^{-i\lambda\pi}\tilde{\gamma}_{n+1}(\pi, \lambda),$$

$$\sigma(H, h, \lambda) = \frac{H}{4}\int_0^\pi e^{-2i\lambda(\pi - t)} g'(t)\, dt - He^{-i\lambda\pi}\gamma_{n+1}(\pi, \lambda)$$

функции экспоненциального типа степени, не превышающей $2\pi$, принадлежащие $L_2(-\infty, \infty)$.

Таким образом, характеристическое уравнение (12) перепишется в виде

$$(\lambda - k)\pi = \operatorname{Im}\left\{\ln\left(1 - \frac{h}{i\lambda} + \frac{\sigma(0,\lambda)}{i\lambda}\right) - \right.$$

$$- \ln\left(1 + \frac{u_1(\pi) - H}{i\lambda} + \cdots + \frac{\frac{H}{2} H \int\limits_0^\pi v(t)\, u_{n+1}(t)\, dt}{(i\lambda)^{n+3}}\right) -$$

$$\left. - \ln\left(1 + \frac{\frac{(-1)^n}{(2i\lambda)^{n+1}} \int\limits_0^\pi e^{-2i\lambda(\pi - t)} v^{(n)}(t)\, dt \left(1 + \frac{H}{i\lambda}\right) + \cdots + \frac{\hat\delta(\lambda)}{(i\lambda)^{n+2}} + \frac{\sigma(H, h, \lambda)}{(i\lambda)^{n+3}}}{1 + \frac{u_1(\pi) - H}{i\lambda} + \cdots}\right)\right\}.$$

При $\lambda \to \infty$ отсюда следует, что

$$(\lambda - k)\pi + \left\{\frac{H - h - u_1(\pi)}{\lambda} + \cdots + \frac{c_{2p+1}}{\lambda^{2p+1}} + \cdots\right\} =$$

$$= -\operatorname{Im}\left[\frac{(-1)^n}{(2i\lambda)^{n+1}} \int\limits_0^\pi e^{-2i\lambda(\pi - t)} v^{(n)}(t)\, dt \left(1 + \frac{2H - u_1(\pi)}{i\lambda}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-i\lambda\pi} g(0)}{4(i\lambda)^{n+2}}\left(1 + \frac{H}{i\lambda}\right) + \frac{\hat\delta(\lambda)}{(i\lambda)^{n+2}} + \frac{\sigma(H, h, \lambda)}{(i\lambda)^{n+3}} + \cdots\right].$$

Пусть $\mu_k = \lambda_k^2$ — собственные значения задачи (1)—(10). Как известно, при $k \to \infty$ $\lambda_k = k + \theta_k$, где $\theta_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$ и, следовательно, $\lambda_k^{-p} = k^{-p}\left(1 + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)$.

Полагая в предыдущем равенстве $\lambda = \lambda_k$, будем иметь

$$\theta_k\pi + \left\{\frac{H - h - u_1(\pi)}{k + \theta_k} + \cdots + \frac{c_{2p+1}}{(k + \theta_k)^{2p+1}} + \cdots\right\} =$$

$$= -\operatorname{Im}\left[\frac{(-1)^n}{(2ik)^{n+1}} \int\limits_0^\pi e^{-2i(k+\theta_k)(\pi - t)} v^{(n)}(t)\, dt \left(1 + \frac{2H - u_1(\pi)}{ik}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\hat\delta(\lambda_k)}{(ik)^{n+2}} + \frac{e^{-i(k+\theta_k)\pi} g(0)}{4(ik)^{n+2}}\left(1 + \frac{H}{ik}\right) + \frac{\sigma(H, h, \lambda_k)}{(ik)^{n+3}}\right] + \frac{\alpha_k}{k^{n+3}},$$

где $\sum |\alpha_k|^2 < \infty$.

Заметим, что если $f(\lambda)$ — функция экспоненциального типа, принадлежащая $L_2(-\infty, \infty)$, то, как легко проверить,

$$f(k + \theta_k) = f(k) + \theta_k \dot f(k) + \frac{f_1(k)}{k^2},$$

причем $\sum |f(k)|^2 < \infty$, $\sum |\dot f(k)|^2 < \infty$, $\sum |f_1(k)|^2 < \infty$.

Воспользуемся этим фактом и перепишем предыдущее равенство в виде

$$\theta_k\pi + \left\{\frac{H - h - u_1(\pi)}{k + \theta_k} + \cdots + \frac{c_{2p+1}}{(k+\theta_k)^{2p+1}} + \cdots\right\} =$$

$$= -\mathrm{Im}\left[\frac{(-1)^n}{(2ik)^{n+1}}\int_0^\pi e^{2ikt}v^{(n)}(t)\,(1 - 2i\theta_k(\pi - t)\,dt\left(1 + \frac{2H - u_1(\pi)}{ik}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\hat{\delta}(k)}{(ik)^{n+2}} + \frac{e^{-ik\pi}(1 - i\theta_k\pi)}{4(ik)^{n+2}}\,g(0)\left(1 + \frac{H}{ik}\right)\right] + \frac{\varepsilon_k(H, h)}{k^{n+3}},$$

где $\hat{\delta}(k)$ не зависит от параметров $h$, $H$ и $\sum|\hat{\delta}(k)|^2 < \infty$, $\sum|\varepsilon_k(H, h)|^2 < \infty$.

Отсюда, в частности, следует, что даже при $n = 0$

$$\theta_k\pi = \frac{h - H + u_1(\pi)}{\pi k} + \frac{\Delta_k}{k}, \ \sum|\Delta_k|^2 < \infty$$

и, значит, справедливо равенство

$$\theta_k\pi + \left\{\frac{H - h - u_1(\pi)}{k + \theta_k} + \cdots + \frac{\tilde{c}_{2p+1}}{(k+\theta_k)^{2p+1}} + \cdots\right\} =$$

$$= \mathrm{Im}\,\frac{(-1)^{n-1}}{(2ik)^{n+1}}\int_0^\pi e^{2ikt}v^{(n)}(t)\left[1 + \frac{2h - \frac{2}{\pi}t\,(h + u_1(\pi) - H)}{ik}\right]dt +$$

$$+ \frac{\delta_k}{k^{n+2}} + \frac{\varepsilon_k(H, h)}{k^{n+3}}. \tag{13}$$

Пусть $\bar{\theta}_k$ находится из уравнения

$$\bar{\theta}_k\pi + \left\{\frac{H - h - u_1(\pi)}{k + \bar{\theta}_k} + \cdots + \frac{\tilde{c}_{2p+1}}{(k+\bar{\theta}_k)^{2p+1}} + \cdots\right\} = 0. \tag{14}$$

Тогда

$$\bar{\theta}_k = \frac{h - H + u_1(\pi)}{\pi k} + \sum_{3 \leqslant 2j+1 < \infty}\frac{b_{2j+1}}{k^{2j+1}}. \tag{15}$$

Вычитая из равенства (13) равенство (14), находим, что

$$(\theta_k - \bar{\theta}_k)\,\pi\left(1 + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) =$$

$$= \mathrm{Im}\,\frac{(-1)^{n-1}}{(2ik)^{n+1}}\int_0^\pi e^{2ikt}v^{(n)}(t)\left[1 + \frac{2h - \frac{2}{\pi}t\,(h + u_1(\pi) - H)}{ik}\right]dt +$$

$$+ \frac{\delta_k}{k^{n+2}} + \frac{\varepsilon_k(H, h)}{k^{n+3}}.$$

Формулу (11) получим отсюда, воспользовавшись (15). И теорема доказана.

*Замечание 1.* Из доказанной теоремы следует также, что

$$\lambda_k = k + \sum_{1 \leqslant 2j+1 \leqslant n+2} \frac{b_{2j+1}}{k^{2j+1}} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{(-1)^{n-1}}{(2ik)^{n+1}} \int_0^\pi e^{2ikt} v^{(n)}(t)\, dt + \frac{\alpha_k}{k^{n+2}}, \tag{16}$$

где $\sum |\alpha_k|^2 < \infty$,

*Замечание 2.* Рассмотрим наряду с задачей (1)—(10) краевую задачу, определяемую уравнением (1) и условиями

$$hy(0) - y'(0) = 0; \; H'y(\pi) - y'(\pi) = 0. \tag{17}$$

Ясно, что для собственных значений $\nu_k = \xi_k^2$ этой задачи выполняются асимптотические равенства (11), если вместо значения параметра $H$ подставить $H'$. Если из формулы (11) вычесть аналогичную формулу, содержащую $H'$, то получим

$$\lambda_k - \xi_k = \sum_{1 \leqslant 2j+1 \leqslant n+3} \frac{c_{2j+1}}{k^{2j+1}} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{(-1)^{n-1}}{(2ik)^{n+2}} \frac{4(H - H')}{\pi} \int_0^\pi e^{2ikt} \underset{(t)}{v^{(n)}}(t)\, dt + \frac{\beta_k}{k^{n+3}}, \tag{18}$$

где $\sum |\beta_k|^2 < \infty$.

**Теорема 2.** *Для того чтобы вещественная функция $v(x) \in L_2(0, \pi)$ принадлежала $W_2^n(0, \pi)$, необходимо и достаточно, чтобы для собственных значений $\mu_k = \lambda_k^2$, $\nu_k = \xi_k^2$ задач* (1)—(10), (1)—(17) *при $k \to \infty$ выполнялись асимптотические равенства*

$$\lambda_k = k + \sum_{1 \leqslant 2j+1 \leqslant n+2} \frac{\tilde{b}_{2j+1}}{k^{2j+1}} + \frac{\delta_k}{k^{n+1}}$$

$$\lambda_k - \xi_k = \sum_{1 \leqslant 2j+1 \leqslant n+3} \frac{\tilde{c}_{2j+1}}{k^{2j+1}} + \frac{\theta_k}{k^{n+2}}, \tag{19}$$

*где* $\sum |\delta_k|^2 < \infty$, $\sum |\theta_k|^2 < \infty$.

Доказательство. Необходимость этих условий следует из (16), (18). Докажем достаточность. Предположим, что $v(x) \in W_2^m(0, \pi)$, но $v(x) \bar{\in} W_2^{m+1}(0, \pi)$, где $m < n$. Для определенности предположим, что $m = 2e$.

Тогда, в силу (16), (18), будем иметь

$$\lambda_k = k + \sum_{1 \leqslant 2j+1 \leqslant m+2} \frac{b_{2j+1}}{k^{2j+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^e}{(2k)^{m+1}} C_{2k}^m + \frac{\alpha_k}{k^{m+2}},$$

$$\lambda_k - \xi_k = \sum_{1 \leqslant 2j+1 \leqslant m+3} \frac{c_{2j+1}}{k^{2j+1}} + \frac{2(H-H')}{\pi (2k)^{m+2}} (-1)^e \hat{S}_{2k}^m + \frac{\beta_k}{k^{m+3}},$$

где

$$C_{2k}^m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v^{(m)}(t) \cos 2kt \, dt,$$

$$\hat{S}_{2k}^m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v^{(m)}(t)\, t \sin 2kt \, dt.$$

Сравнивая эти формулы с условиями (19), получим

$$1)\ \tilde{b}_{2j+1} = b_{2j+1},\ 1 \leqslant 2j+1 \leqslant m+1,\ \frac{1}{2}(-1)^e C_{2k}^m = \frac{\eta_k}{k},$$

$$\sum |\eta_k|^2 < \infty;$$

$$2)\ \tilde{c}_{2j+1} = c_{2j+1},\ 1 \leqslant 2j+1 \leqslant m+1,$$

$$\frac{2(H-H')}{\pi} (-1)^e \hat{S}_{2k}^m = \frac{\tilde{c}_{2e+3} - c_{2e+3}}{k} + \frac{\zeta_k}{k},\ \sum |\zeta_k|^2 < \infty.$$

Пусть $v^{(m)}(x) = v_1^{(m)}(x) + v_2^{(m)}(x)$, где $v_1^{(m)}(x)$ — нечетная относительно $x = \frac{\pi}{2}$ компонента $v^{(m)}(x)$, а $v_2^{(m)}(x)$ — четная. Тогда, согласно 1),

$$\frac{1}{2}(-1)^e v_2^{(m)}(x) = \sum \frac{\eta_k}{k} \cos 2kx$$

и так как $\sum |\eta_k|^2 < \infty$, то $v_2^{(m)}(x) \in W_2^1(0, \pi)$.

С другой стороны, для нечетной относительно $x = \frac{\pi}{2}$ компоненты функции $v^{(m)}(x)\, x$, которая имеет вид $v_2^{(m)}(x)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} v_1^{(m)}(x)$ в силу 2), справедливо равенство

$$\frac{2(-1)^e (H-H')}{\pi} \left[ v_2^{(m)}(x)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} v_1^{(m)}(x) \right] = \sum \frac{\tilde{c}_{2e+3} - c_{2e+3}}{k} \sin 2kx + \sum \frac{\zeta_k}{k} \sin 2kx.$$

Так как

$$\sum \frac{\tilde{c}_{2e+3} - c_{2e+3}}{k} \sin 2kx = (\tilde{c}_{2e+3} - c_{2e+3}) \left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

то, учитывая, что $\sum |\zeta_k|^2 < \infty$, устанавливаем, что $v_2^{(m)}(x)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} v_1^{(m)}(x) \in W_2^1(0, \pi)$. Поскольку, как показано выше, $v_2^{(m)}(x) \in W_2^1(0, \pi)$, то, следовательно, и $v_1^{(m)}(x) \in W_2^1(0, \pi)$, т. е. $v(x) \in W_2^{m+1}(0, \pi)$, что противоречит сделанному предположению. Тем самым показано, что $v(x) \in W_2^n(0, \pi)$.

Доказательство достаточности условий (19) при нечетных $\overline{m}$ проводится аналогично.

В работах Б. М. Левитана и М. Г. Гасымова [2, 4] было доказано, что две последовательности вещественных чисел $\{\mu_k\}$ и $\{\nu_k\}$ являются спектрами двух краевых задач, порождаемых условиями (10), (17) и одним и тем же уравнением (1) с вещественным потенциалом $v(x) \in L_2(0, \pi)$, тогда и только тогда, когда они перемежаются и удовлетворяют асимптотическим равенствам

$$\sqrt{\mu_k} = k + \frac{a}{k} + \frac{\varepsilon_k}{k}, \quad \sqrt{\mu_k} - \sqrt{\nu_k} = \frac{c}{k} + \frac{\theta_k}{k^2},$$

где $\sum |\varepsilon_k|^2 < \infty$, $\sum |\theta_k|^2 < \infty$.

Отсюда и из теоремы 2 вытекает

Следствие. *Для того чтобы две последовательности вещественных чисел были спектрами двух краевых задач, порождаемых условиями* (10), (17) *и одним и тем же уравнением* (1) *с вещественным потенциалом* $v(x) \in W_2^n(0, \pi)$, *необходимо и достаточно, чтобы они перемежались и удовлетворяли асимптотическим формулам* (19).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля. Киев, «Наукова думка», 1972. 217 с.
2. Левитан Б. М. и Гасымов М. В. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам. — УМН, 1964, т. 19, вып. 2 (116), с. 3—63.
3. Марченко В. А. и Островский И. В. Характеристика спектра оператора Хилла. — «Мат. сб.». 1975, т. 97 (139), вып. 4, с. 538—604.
4. Гасымов М. Г. Определение уравнения Штурма — Лиувилля с особенностью по двум спектрам. — ДАН СССР, 1965, т. 88, № 2, с. 274—276.


*Поступила 15 мая 1975 г.*