УДК 513.88

К.-Д. КЮРСТЕН

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ А. ПИЧА. II

Известно, что из регулярности и ультрастабильности идол-функции следует ее полунепрерывность снизу и что каждая полунепрерывная снизу идол-функция регулярна [1]. (Определения см. ниже). Возникает вопрос: следует ли из полунепрерывности снизу ультрастабильность идол-функции? Поскольку ответ отрицателен, то дается необходимый и достаточный критерий. Приводится пример, показывающий, что этот критерий не всегда выполняется.

Воспользуемся обозначениями из [2] и будем считать известными введенные там понятия идол-функции и регулярности идол-функции.

Определение 1. *Пусть J — множество индексов и U — ультрафильтр на нем. Пусть дано семейство E_i ($i \in I$) банаховых пространств. Рассмотрим линейное пространство X всех функций $x(i)$, определенных на J, для которых $x(i) = x_i \in E_i$* и $\sup\{\|x_i\|;\ i \in J\} < \infty$. *Введем на X полунорму $p(x) = \lim\limits_{U} \|x_i\|$. Ультрапроизведением пространств E_i по ультрафильтру U называется факторпространство*

$$(E_i)_U = X/\mathrm{Ker}\,(p),$$

снабженное соответствующей нормой. Можно показать, что $(E_i)_U$ полно; его элементы обозначаются через $(x_i)_U$ (см. [3]).

Определение 2. *Пусть для всех $i \in J$ определены банаховы пространства E_i и F_i и операторы $S_i \in L(E_i, F_i)$, причем* $\sup\{\|S_i\|;$ $i \in I\} < \infty$. *Ультрапроизведением операторов S_i по ультрафильтру U называется оператор $(S_i)_U \in L((E_i)_U, (F_i)_U)$, определенный формулой*

$$(S_i)_U (x_i)_U = (S_i x_i)_U.$$

Определение 3. *Идол-функция α называется ультрастабильной, если для любого ограниченного семейства операторов S_i выполняется неравенство*

$$\alpha((S_i)_U) \leqslant \lim_{U} \alpha(S_i).$$

Определение 4. *Идол-функция называется полунепрерывной снизу, если для всех операторов $S \in L(E, F)$ имеет место соотношение*

$$\alpha(S) = \sup\{\alpha(Q_N^F S I_M^E),\ M \subset E;\ \dim M < \infty;\ N \subset F;\ \mathrm{codim}\, N < \infty\}.$$

1. Критерий ультрастабильности

Теорема 1. *Для того чтобы полунепрерывная снизу идол-функция была ультрастабильной, необходимо и достаточно,* *чтобы для каждого ультрафильтра U на произвольном множестве индексов J, для произвольных конечномерных банаховых пространств M и N и для любого ограниченного семейства операторов $T_i \in L(M, N)$ имело место соотношение*

$$\alpha(\lim_U T_i) \leqslant \lim_U \alpha(T_i).$$

Пусть U — ультрафильтр на множестве индексов J и пусть для каждого $i \in J$ F_i есть банахово пространство.

Лемма 1. *Формулой*

$$(Q(f_i)_U)((x_i)_U) = \lim_U f_i(x_i)$$

определяется линейное изометрическое отображение Q ультрапроизведения $F_1 = (F_i^*)_U$ в пространство $F^* = ((F_i)_U)^*$.

Доказательство. Пусть $(f_i)_U = (g_i)_U \in F_1$, $(x_i)_U = (y_i)_U \in F$. Имеет место соотношение

$$\lim_U |f_i(x_i) - g_i(y_i)| \leqslant \sup_J \|f_i\| \lim_U \|x_i - y_i\| + \\ + \lim_U \|f_i - g_i\| \sup_J \|y_i\| = 0.$$

Тем самым Q действительно сопоставит каждому элементу из F_1 некоторый однозначно определенный функционал на F. Из перестановочности линейной операции и операции предельного перехода следует, что функционал $Q(f_i)_U$ линеен и что Q — линейное отображение. Имеет место оценка

$$|(Q(f_i)_U)((x_i)_U)| \leqslant \lim_U \|f_i\| \|x_i\| = \|(f_i)_U\| \|(x_i)_U\|. \tag{1}$$

Для любого положительного δ найдется нормированный вектор $y_i \in F_i$ так, что выполняются неравенства

$$f_i(y_i) \geqslant \|f_i\| - \delta; \quad (Q(f_i)_U)((y_i)_U) = \\ = \lim_U f_i(y_i) \geqslant \lim_U \|f_i\| - \delta = \|(f_i)_U\| - \delta. \tag{2}$$

Неравенство (1) показывает, что $Q(f_i)_U \in F^*$. В силу произвольности δ из (1) и (2) следует

$$\|Q(f_i)_U\| = \|(f_i)_U\|.$$

Лемма 1 доказана.

В дальнейшем мы будем отождествлять F_1 с QF_1, считая, что $F_1 \subset F^*$.

Лемма 2. *Пусть M — конечномерное подпространство в F и пусть векторы $x_k = (x_{ki})_U$ $(k = 1, \ldots, n)$ образуют базис в M. Пусть оператор $T_i \in L(M, \operatorname{lin}\{x_{1i}, \ldots, x_{ni}\})$ определяется формулой*

$$T_i(x_k) = x_{ik}.$$

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ *существует* $U_1 \in U$, *что для* $i \in U_1$ $\| T_i \| < 1 + \varepsilon$, T_i *обратим*, $\| T_i^{-1} \| < 1 + \varepsilon$. *Следовательно*,

$$\lim_U \| T_i \| = \lim_U \| T_i^{-1} \| = 1.$$

Доказательство. Пусть положительное число $\delta < 1$ удовлетворяет неравенствам

$$(1 + \delta)(1 - \delta)^{-1} < 1 + \varepsilon; \quad (1 - \delta)((1 - \delta)^2 - \delta(1 + \delta))^{-1} < 1 + \varepsilon. \quad (3)$$

Пусть $\{y_1, \ldots, y_m\}$ есть δ-сеть в единичной сфере пространства M. Разлагая y_l по базису и используя определение оператора T_i, получаем

$$(T_i y_l)_U = y_l.$$

Поэтому существует $U_1 \in U$ такой, что для $i \in U_1$

$$1 - \delta \leqslant \| T_i y_l \| \leqslant 1 + \delta \quad (l = 1, \ldots, m).$$

Если $y \in M$, $\| y \| = 1$, то можно найти числа λ_l:

$$y = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l y_l; \quad \sum_{l=1}^{m} | \lambda_l | \leqslant (1 - \delta)^{-1}.$$

Имеет место

$$\| T_i y \| \leqslant \sum_{l=1}^{m} | \lambda_l | \, \| T_i y_l \| \leqslant (1 + \delta)(1 - \delta)^{-1}; \quad \| T_i \| \leqslant (1 + \delta)(1 - \delta)^{-1} \quad (i \in U_1).$$

Для некоторого l выполняется неравенство $\| y - y_l \| \leqslant \delta$:

$$\| T_i y \| \geqslant \| T_i y_l \| - \| T_i (y - y_l) \| \geqslant 1 - \delta - \delta (1 + \delta)(1 - \delta)^{-1}.$$

Из (3) следует

$$\| T_i \| < 1 + \varepsilon; \quad \| T_i^{-1} \| \leqslant (1 - \delta)((1 - \delta)^2 - (1 + \delta)\delta)^{-1} < 1 + \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Пусть* $\dim F_i = n$ *и пусть* $b_{1i}, \ldots, b_{ni}$ *есть базис Ауэрбаха в* F_i. *Тогда формулой*

$$T_i((b_{ki})_U) = b_{ki}$$

определяется изоморфизм между $(F_i)_U = F$ *и* F_i.

Доказательство. Допустим сначала, что $\dim F > n$. Тогда в F найдется $n + 1$-мерное подпространство. Из леммы 2 следует, что для некоторых i $\dim F_i \geqslant n + 1$. Это противоречие показывает, что $\dim F \leqslant n$.

Допустим, что

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (b_{ki})_U = (\sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_{ki})_U = 0.$$

По свойству базиса Ауэрбаха

$$|\lambda_l| \leqslant \Big\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_{ki} \Big\|.$$

Неравенство

$$|\lambda_l| = \lim_U |\lambda_l| \leqslant \lim_U \Big\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_{ki} \Big\| = \Big\| \big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_{ki} \big)_U \Big\| = 0$$

показывает, что векторы $(b_{ki})_U$ линейно независимы. Эти n векторов, следовательно, образуют базис в F. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* $M \subset F^*$, $\dim M < \infty$. *Пусть* $\{t_1, \ldots, t_p\} \subset M$, $\{z_1, \ldots, z_p\} \subset F$. *Для каждого положительного числа* ε *существует оператор* $P \in L(M, F_1)$, *удовлетворяющий неравенствам*

$$\|P\| \leqslant 1 + \varepsilon; \tag{4}$$

$$|(Pt_l)(z_l) - t_l(z_l)| < \varepsilon \quad (l = 1, \ldots, p). \tag{5}$$

Доказательство. Определим число $\delta > 0$ так, чтобы $(1-\delta)^{-1} < 1 + \varepsilon$, $\delta < 1$. Пусть $\{h_1, \ldots, h_n\}$ — нормированный базис в M и пусть $\{g_1, \ldots g_m\}$ есть δ-сеть в единичной сфере пространства M, содержащая этот базис. Определим числа a_{qj}, b_{lj} и c:

$$g_q = \sum_{j=1}^{n} a_{qj} h_j \quad (q = 1, \ldots, m); \quad t_l = \sum_{j=1}^{n} b_{lj} h_j \quad (l = 1, \ldots, p);$$

$$c = \max_{q,\, j} |a_{qj}|$$

и подмножества в произведениях n пространств F_1 и F_i^* соответственно:

$$K_q = \{(f_1, \ldots, f_n) \in F_1^n;\ \Big\| \sum_{j=1}^{n} a_{qj} f_j \Big\| \leqslant 1\};$$

$$K_{qi} = \{(f_1, \ldots, f_n) \in (F_i^*)^n;\ \Big\| \sum_{j=1}^{n} a_{qj} f_j \Big\| \leqslant 1\}.$$

Множества K_q и K_{qi} можно рассматривать как подмножества сопряженных пространств к произведениям n пространств F и F_i соответственно.

Докажем, что $H = (h_1, \ldots, h_n)$ принадлежит слабому* замыканию множества $\bigcap_{q=1}^{m} K_q$ в $(F^n)^*$. Пусть

$$\eta = ((x_{1i})_U, \ldots, (x_{ni})_U) \in (\bigcap K_q)_\pi; \quad \eta_i = (x_{1i}, \ldots, x_{ni}). \tag{6}$$

(Для подмножества X банахова пространства X^π — это поляра. Если X лежит в сопряженном пространстве, то X_π — поляра множества X в исходном пространстве). Для $1 \leqslant l \leqslant n$ найдется q такое, что $g_q = h_l$. Тогда

$$K_{ql} = \{(f_1, \ldots, f_n) \in (F_i^*)^n;\ \|f_l\| \leqslant 1\}.$$

Поэтому множества $\bigcap\limits_{q=1}^{m} K_{qi}$ ограничены равномерно по i. Для произвольного положительного ϑ можно найти $\varphi_i = (f_{1i}, \ldots, f_{ni}) \in \bigcap K_{qi}$ так, что

$$\langle \varphi_i, \eta_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} f_{ji}(x_{ji}) \geqslant (1+\vartheta)^{-1} \sup \{ |\langle \psi, \eta_i \rangle|;\ \psi \in \bigcap K_{qi} \}. \tag{7}$$

При этом существует

$$\varphi = ((f_{1i})_U, \ldots, (f_{ni})_U).$$

Неравенство

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} a_{qj} (f_{ji})_U \Big\| = \lim_U \Big\| \sum_{j=1}^{n} a_{qj} f_{ji} \Big\| < 1$$

показывает, что $\varphi \in \bigcap K_q$. Следовательно, по (6)

$$\lim_U \Big| \sum_{j=1}^{n} f_{ji}(x_{ji}) \Big| = |\langle \varphi, \eta \rangle| \leqslant 1.$$

Найдется $U_1 \in U$, что для $i \in U_1$ $|\langle \varphi_i, \eta_i \rangle| \leqslant 1 + \vartheta$. Из соотношения (7) следует теперь, что для $i \in U_1$

$$\eta_i \in (1+\vartheta)^2 (\bigcap K_{qi})_\pi. \tag{8}$$

Очевидно, для каждого нормированного $x \in F_i$ $(a_{1q}x, \ldots, a_{nq}x) \in (K_{qi})_\pi$. Если $(f_1, \ldots, f_n) \notin K_{qi}$ (т. е. $\Big\| \sum\limits_{j=1}^{n} a_{qj} f_j \Big\| > 1$), то найдется $x \in F_i$, $\|x\| = 1$, что $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{qj} f_j(x) > 1$. Это показывает, что K_{qi} слабо* замкнуто. Из легко проверяемого соотношения

$$(\bigcap (K_{qi})^\pi_\pi)_\pi \subset (\bigcup (K_{qi})_\pi)^\pi_\pi \subset (\bigcap K_{qi})_\pi$$

следует теперь

$$(\bigcap K_{qi})_\pi = (\bigcup (K_{qi})_\pi)^\pi_\pi.$$

Это множество есть слабое (и, следовательно, нормированное) замыкание выпуклой оболочки множества $\bigcup (K_{qj})_\pi$. Используя (8), мы найдем числа λ_{qi} и элементы

$$(y^i_{1q}, \ldots, y^i_{nq}) \in (K_{qi})_\pi \quad (i \in U_1) \tag{9}$$

такие, что

$$\sum_{q=1}^{m} |\lambda_{qi}| \leqslant (1+\vartheta)^2; \quad \Big\| x_{ji} - \sum_{q=1}^{m} \lambda_{qi} y^i_{jq} \Big\| < \vartheta. \tag{10}$$

Легко видеть, что

$$K_{qi} \supset \{(0, \ldots, f_l, 0, \ldots 0);\ f_l \in F_i^*;\ \|f_l\| < c^{-1}\}.$$

Поэтому из (9) следует, что $\| y^i_{jq} \| \leqslant c$. Для определения ультрапроизведения важны только индексы $i \in U_1$. (Для $i \notin U_1$ можно полагать $y^i_{jq} = 0$).

Существует ультрапроизведение $(y^i_{jq})_U = y_{jq}$. Используя соотношение (10), мы получим

$$\| (x_{ji})_U - \sum_{q=1}^{m} (\lim_U \lambda_{qi})\, y_{jq} \| \leqslant \vartheta;$$

$$|\langle H, \eta\rangle| \leqslant | \sum_{j=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} (\lim_U \lambda_{qi})\, h_j(y_{jq}) | + n\vartheta \leqslant$$

$$\leqslant (1+\vartheta)^2 \max_q | \sum_{j=1}^{n} h_j(y_{jq}) | + n\vartheta. \tag{11}$$

По лемме 2 для пространства $N = \operatorname{lin}\{y_{1q}, \ldots, y_{nq}\}$ определяются операторы T_i и элементы $U_2 \in U, U_2 \subset U_1$ так, что для $i \in U_2$ $\|T_i^{-1}\| \leqslant 2$. Пусть $a_{ql} \neq 0$. Для $i \in U_2$ определяем функционалы на $T_i(N)$:

$$e_{ji}(x) = h_j(T_i^{-1}x) \quad (j \neq l);$$

$$e_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{qj} h_j(T_i^{-1}x).$$

Эти линейные функционалы распространяем по теореме Хана—Банаха на все пространство F_i с сохранением нормы. Кроме того, определим

$$e_{li} = (a_{ql})^{-1}(e_i - \sum_{j \neq l} a_{qj} e_{ji}).$$

Тогда имеют место соотношения:

$$\| e_{ji} \| \leqslant \| T_i^{-1} \| \leqslant 2 \quad (f \neq l);$$

$$\| e_{li} \| \leqslant 2\, | a_{ql} |^{-1} \; (1 + nc);$$

$$\| \sum_{j=1}^{n} a_{qj} e_{ji} \| = \| e_i \| \leqslant \| g_q \| \, \| T_i^{-1} \| = \| T_i^{-1} \|;$$

$$(e_{1i}, \ldots, e_{ni}) \in \| T_i^{-1} \| K_{qi};$$

$$| \sum_{j=1}^{n} h_j(y_{jq}) | = | \sum_{j=1}^{n} e_{ji}(T_i y_{jq}) | \leqslant$$

$$\leqslant \lim_U \sum_{j=1}^{n} \| e_{ji} \| \, \| y^i_{jq} - T_i y_{jq} \| +$$

$$+ \lim_U | \sum_{j=1}^{n} e_{ji}(y^i_{jq}) | \leqslant \lim_U \| T_i^{-1} \| = 1.$$

(Мы использовали (9) и утверждение леммы 2). Наконец, в силу произвольности ϑ из (11) получим

$$|\langle H, \eta\rangle| \leqslant 1; \; H \in (\bigcap K_q)^{\pi}_{\pi}.$$

Заканчиваем доказательство леммы. Пусть

$$\eta_l = (b_{l1}z_l, \ldots, b_{ln}z_l) \ (l = 1, \ldots p).$$

Найдется функционал

$$H_1 = (f_1, \ldots, f_n) \in \bigcap K_q; \ |\langle H - H_1; \ \eta_l\rangle| < \varepsilon \ (l = 1, \ldots, p).$$

Определим оператор P формулой

$$P\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j h_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j.$$

Пусть $f \in M$, $\|f\| = 1$. Найдутся числа λ_q:

$$f = \sum_{q=1}^{m} \lambda_q g_q; \ \sum_{q=1}^{m} |\lambda_q| \leqslant (1-\delta)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\|Pf\| = \Big\|\sum_{q=1}^{m} \lambda_q \sum_{j=1}^{n} a_{qj} f_j\Big\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{q=1}^{m} |\lambda_q| \Big\|\sum_{j=1}^{n} a_{qj} f_j\Big\| \leqslant (1-\delta)^{-1} \leqslant 1+\varepsilon; \ \|P\| \leqslant 1+\varepsilon.$$

Кроме того,

$$|(Pt_l)(z_l) - t_l(z_l)| = \Big|\sum_{j=1}^{n} b_{lj} f_j(z_l) - \sum_{j=1}^{n} b_{lj} h_j(z_l)\Big| =$$
$$= |\langle H_1 - H, \ \eta_l\rangle| < \varepsilon.$$

Таким образом, лемма доказана.

Метод доказательств леммы 2 и леммы 4 основан на доказательстве теоремы о локальной рефлексивности [4].

Доказательство теоремы 1.

Необходимость. Пусть M и N — конечномерные пространства и пусть в них зафиксированы базисы Ауэрбаха $\{e_k\}_1^m$ и $\{h_j\}_1^n$. Пусть

$$T_i e_k = \sum_{j=1}^{n} t_{jk}^i h_j \ (i \in I, \ k = 1, \ldots, m); \ \lim_U t_{jk}^i = t_{jk};$$
$$\lim_U T_i = T; \ M_i = M; \ N_i = N.$$

Если элементы зафиксированных ранее базисов рассматриваются как элементы M_i или N_i, то они обозначаются через e_{ki} и h_{ji} соответственно. По лемме 3 пространства $(M_i)_U$ и $M_i = M$ ($(N_i)_U$ и $N_i = N$) изоморфны. Норма построенного в лемме 3 изоморфизма и норма обратного изоморфизма при этом не зависят от i. По лемме 2 эти нормы равны 1 и изоморфизм на самом деле есть изометрия. Оператор T_i рассматривается как элемент $L(M_i, N_i)$, а T

рассматривается как оператор из $L((M_i)_U, (N_i)_U)$, действующий по формуле

$$T(e_{ki})_U = \sum_{j=1}^{n} t_{jk}(h_{ji})_U.$$

Тогда

$$\| ((T_i)_U - T)(e_{ki})_U \| = \| \sum_{j=1}^{n} ((t_{jk}^i - t_{jk}) f_{ji})_U = 0; \quad (T_i)_U = T.$$

Из ультрастабильности идол-функции α следует

$$\alpha(T) = \alpha((T_i)_U) \leqslant \lim_U \alpha(T_i).$$

Замечание. При доказательстве необходимости не была использована полунепрерывность снизу.

Достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$, пусть E_i и F_i — банаховы пространства и пусть

$$S_i \in L(E_i, F_i); \ \sup\{\| S_i \|; \ i \in J\} < \infty; \ E = (E_i)_U; \ F = (F_i)_U; \ S = (S_i)_U.$$

В силу полунепрерывности снизу идол-функции α найдутся такие подпространства $M_1 \subset E$ и $N_1 \subset F$, чтобы выполнялись соотношения

$$\alpha(S) \leqslant \alpha(Q_{N_1}^F S I_{M_1}^E) + \varepsilon; \ \dim M_1 < \infty; \ \operatorname{codim} N_1 < \infty. \tag{12}$$

Найдется конечномерное, тотальное на $M_2 = SM_1$ подпространство $L_1 \subset F^*$, содержащее поляру $(N_1)^\pi$. Полагаем

$$N_2 = (L_1)_\pi, \ F_2 = F/N_2, \ N_3 = Q_{N_2}^F(N_1).$$

Тогда существует изометрия I_1 такая, что

$$Q_{N_1}^F = I_1 Q_{N_3}^{F_2} Q_{N_2}^F. \tag{13}$$

Можно найти векторы $x_1, \ldots, x_m$ в F такие, что векторы $x_1, \ldots, x_n$ образуют базис в M_2, а векторы $Q_{N_2}^F(x_1) = z_1, \ldots, Q_{N_2}^F(x_m) = z_m$ образуют базис в F/N_2. Оператор $A \in L(F/N_2, F)$ определяется формулой

$$A(z_j) = x_j \ (j = 1, \ldots, m).$$

Пусть $\delta > 0$ и

$$0 < (1+\delta)(1 - \delta - \delta(1+\delta)\| A \|)^{-1} < 1 + \varepsilon \tag{14}$$

и пусть $\{y_1, \ldots, y_p\}$ есть δ-сеть в единичной сфере пространства F/N_2. В силу естественной изометричности пространств $(F/N_2)^*$ и L_1 можно найти функционалы $f_l \in L_1$, $\| f_l \| = 1$, $f_l(Ay_l) = 1$ $(l = 1, \ldots, p)$. По лемме 4 существует оператор $P \in L(L_1, F_1)$:

$$|(Pf_l)(Ay_l) - f_l(Ay_l)| < \delta; \ \| P \| \leqslant 1 + \delta.$$

Положим $P(L_1)=L_2$; $(L_2)_\pi=N_4$. Для нормированного вектора $y\in F/N_2$ найдется l, что

$$\|y-y_l\|<\delta;\ |(Pf_l)(Ay)|\geqslant|(Pf_l)(Ay_l)^1-\delta\|Pf_l\|\,\|A\|\geqslant 1-\delta-\\-\delta(1+\delta)\|A\|;$$

$$\|Q^F_{N_4}Ay\|\geqslant|(Pf_l)(Ay)|\,\|Pf_l\|^{-1}\geqslant(1-\delta-\delta(1+\delta)\|A\|)(1+\\+\delta)^{-1}\geqslant(1+\varepsilon)^{-1}.$$

Последнее неравенство вместе с очевидным соотношением

$$\dim F/N_4=\dim L_2\leqslant\dim L_1=\dim F/N_2$$

показывает, что формулой

$$I_2Q^F_{N_4}Ay=y$$

определяется изоморфизм $I_2\in L(F/N_4,\ F/N_2)$ и что при этом

$$\|I_2\|\leqslant 1+\varepsilon. \tag{15}$$

Из определения оператора A следует, что для $x\in M_2$

$$AQ^F_{N_2}x=x.$$

Следовательно,

$$Q^F_{N_2}SI^E_{M_1}=I_2Q^F_{N_4}AQ^F_{N_2}SI^E_{M_1}=I_2Q^F_{N_4}SI^E_{M_1}. \tag{16}$$

С помощью леммы 2 определим операторы V_i и W_i, отображающие M_1 и L_2 в подпространства $M_i\subset E_i$ и $L_i\subset F^*_i$ соответственно. Полагая $(L_i)_\pi=N_i$ и замечая, что сопряженное к факторпространству изометрично поляре, мы определим оператор $R_i\in L(F_i/N_i,\ F/N_4)$, удовлетворяющий равенствам

$$\|R_i\|=\|W_i\|;\ \varphi(R_iz)=(W_i\varphi)(z)$$
$$(z\in F_i/N_i;\ \varphi\in L_2=(F/N_4)^*).$$

Для любого $\varphi\in(F/N_4)^*=L_2$ и для $x\in M_1$ имеет место

$$\lim_U\varphi(Q^F_{N_4}SI^E_Mx-R_iQ^{F_i}_{N_i}S_iI^{E_i}_{M_i}V_ix)=$$
$$=\varphi(Q^F_{N_4}(S_i)_U(V_ix)_U)-\lim_U\varphi(R_iQ^{F_i}_{N_i}S_i(V_ix))=$$
$$=((W_i\varphi)_U)((S_i(V_ix))_U)-\lim_U(W_i\varphi)(S_i(V_ix))=0;$$
$$\lim_U R_iQ^{F_i}_{N_i}S_iI^{E_i}_{M_i}V_i=Q^F_{N_4}SI^E_{M_1}.$$

Используя (12), (13), (15) и (16) и предположение теоремы, получаем

$$\alpha(S)\leqslant\alpha(Q^F_{N_1}SI^E_{M_1})+\varepsilon\leqslant\|I_1Q^{F_2}_{N_3}\|\,\alpha(I_2Q^F_{N_4}SI^E_{M_1})+\varepsilon\leqslant$$
$$\leqslant(1+\varepsilon)\,\alpha(\lim_U R_iQ^{F_i}_{N_i}S_iI^{E_i}_{M_i}V_i)+\varepsilon\leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon) \lim_U \alpha (R_i Q_{N_i}^{F_i} S_i I_{M_i}^{E_i} V_i) + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon) \lim_U \| R_i \| \lim_U \alpha (S_i) \lim_U \| V_i \| + \varepsilon.$$

По лемме 2

$$\lim_U \| R_i \| = \lim_U \| W_i \| = 1; \ \lim_U \| V_i \| = 1.$$

В силу произвольности ε получим

$$\alpha (S) \leqslant \lim_U \alpha (S_i),$$

что и требовалось доказать.

2. Пример полунепрерывной снизу идол-функции, которая не ультрастабильна

В пространстве l_∞^3 рассмотрим базис из координатных ортов e_1, e_2, e_3. Не будем различать операторы в l_∞^3 и их матричные представления.

Лемма 5. *Пусть* $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$,

$$D = (d_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— операторы в l_∞^3. *Если* $BDA = D$, $\| A \| \leqslant 1$, $\| B \| \leqslant 1$, *то операторы* A и B *обратимы.*

Доказательство. Если выполняются условия леммы, то

$$\sum_k | a_{ik} | \leqslant 1, \ \sum_k | b_{ik} | \leqslant 1 \ \ (i = 1, 2, 3), \tag{17}$$

$$\sum_{i, k, l, m} | b_{il} d_{lm} a_{mk} | = \sum_{i, m, l} | b_{il} d_{lm} | \sum_k | a_{mk} | \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i, l} | b_{il} | \sum_m | d_{lm} | = 2 \sum_{il} | b_{il} | \leqslant 6, \tag{18}$$

$$\sum_{i, k, l, m; \ d_{ik} \neq 0} | b_{il} d_{lm} a_{mk} | \geqslant \sum_{i, k; \ d_{ik} \neq 0} \Big| \sum_{lm} b_{il} d_{lm} a_{mk} \Big| \geqslant \sum_{i, k} | d_{ik} | = 6. \tag{19}$$

Сопоставляя эти неравенства, мы получаем

$$\sum_l | b_{il} | = 1 \ \ (i = 1, 2, 3); \tag{20}$$

$$\sum_{i, k, l, m; \ d_{ik} = 0} | b_{il} d_{lm} a_{mk} | = 0. \tag{21}$$

Допустим, что матрица A необратима. Тогда

$$\{0\} \neq \operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} BDA = \operatorname{Ker} D = \operatorname{lin} \{\sum_k e_k\}; \tag{22}$$

$$A (\sum_k e_k) = 0; \ \sum_k a_{mk} = 0 \ \ (m = 1, 2, 3).$$

Можно найти числа m_0, k_1, k_2, i_1, i_2, l_1, l_2, что

$$a_{m_0k_1} \neq 0;\ a_{m_0k_2} \neq 0,\ k_1 \neq k_2,$$
$$d_{i_1k_1} = 0,\ d_{i_2k_2} = 0,\ i_1 \neq i_2,$$
$$d_{l_1m_0} \neq 0,\ d_{l_2m_0} \neq 0,\ l_1 \neq l_2.$$

Из соотношения (21) следует

$$b_{i_1l_1} d_{l_1m_0} a_{m_0k_1} = 0,\ b_{i_1l_1} = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$b_{i_1l_2} = b_{i_2l_1} = b_{i_2l_2} = 0.$$

Следовательно, матрица B необратима.

Пусть A', B', D' — транспонированные матрицы к A, B, D. Имеет место $A'D'B' = D'$. Допустим, что лемма не верна. Тогда матрица B, а следовательно, и матрица B' необратима:

$$\{0\} \neq \operatorname{Ker} B' \subset \operatorname{Ker} D' = \operatorname{lin}\{\sum_i e_i\}, \tag{23}$$

$$B'(\sum_i e_i) = 0,\ \sum_i b_{il} = 0\ (l = 1, 2, 3). \tag{24}$$

Из (20), (23) и (24) следует что можно найти элемент $b_{i_0l_1}$ матрицы B, что $0 < |b_{i_0l_1}| < 1$. По (20) можно найти $l_2 \neq l_1$, $b_{i_0l_2} \neq 0$. Кроме того, найдется число k_0, что $d_{i_0k_0} = 0$. Используя (21), получим

$$b_{i_0l_{1,2}} d_{l_{1,2}m} a_{mk_0} = 0;\ d_{l_{1,2}m} a_{mk_0} = 0.$$

Для каждого $m \in (1, 2, 3)$ одно из чисел d_{l_1m} и d_{l_2m} не равно нулю. Следовательно,

$$a_{mk_0} = 0;\ e_{k_0} \in \operatorname{Ker} A.$$

Это противоречит соотношению (22), что и доказывает лемму.

Для каждого оператора $S \in L(E, F)$ определим неотрицательное число $\alpha(S)$:

$$\alpha(S) = 0,\ \text{если}\ \dim S \leqslant 1;$$
$$\alpha(S) = \sup\{\|A\|^{-1}\|B\|^{-1};\ A \in L(l_\infty^3, E);$$
$$B \in L(F, l_\infty^3),\ BSA = D\},\ \text{если}\ \dim S > 1.$$

Лемма 6. *Функция $\alpha(S)$ есть полунепрерывная снизу идол-функция.*

Доказательство. Если $\dim RST \leqslant 1$, то

$$\alpha(RST) = 0 \leqslant \|R\|\,\alpha(S)\,\|T\|.$$

Пусть $\dim RST > 1$ и пусть $\varepsilon > 0$. Существуют операторы A и B такие, что

$$B(RST)A = D;\ \|A\|^{-1}\|B\|^{-1} \geqslant \alpha(RST) - \varepsilon;$$
$$\alpha(S) \geqslant \|BR\|^{-1}\|TA\|^{-1} \geqslant (\|B\|\,\|R\|\,\|T\|\,\|A\|)^{-1};$$
$$\|R\|\,\alpha(S)\,\|T\| \geqslant \|A\|^{-1}\|B\|^{-1} \geqslant \alpha(RST) - \varepsilon.$$

Тем самым $\alpha(S)$ — идол-функция. Докажем, что

$$\alpha(S) \leqslant \sup\{\alpha(Q_N^F S I_M^E);\ \operatorname{codim} N < \infty,\ \dim M < \infty\}. \tag{25}$$

Если $\dim S \leqslant 1$, то (25), очевидно, выполняется.

Пусть $\dim S > 1$ и пусть

$$BSA = D;\ \alpha(S) \leqslant \|A\|^{-1}\|B\|^{-1} + \varepsilon;\ M_0 = A(l_\infty^3);\ N_0 = \operatorname{Ker} B.$$

Тогда $\dim M_0 < \infty$, $\operatorname{codim} N_0 < \infty$ и существуют операторы A_1 и B_1 такие, что

$$A = I_{M_0}^E A_1;\ \|A_1\| = \|A\|;\ B = B_1 Q_{N_0}^F;\ \|B_1\| = \|B\|.$$

Выполняется соотношение

$$\alpha(Q_{N_0}^F S I_{M_0}^E) \geqslant \|A_1\|^{-1}\|B_1\|^{-1} = \|A\|^{-1}\|B\|^{-1} \geqslant \alpha(S) - \varepsilon.$$

Отсюда следует неравенство (25). Произвольность числа ε и неравенство

$$\alpha(Q_N^F S I_M^E) \leqslant \alpha(S)$$

показывают, что α полунепрерывно снизу. Лемма доказана.

Предложение. *Полунепрерывная снизу идол-функция α не ультрастабильна.*

Доказательство. Пусть J — множество натуральных чисел и пусть U — ультрафильтр на J, содержащий для каждого $i_0 \in J$ множество $\{i \in J;\ i > i_0\}$. Пусть ε_i — последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю. Пусть

$$D_i = D + \varepsilon_i I,$$

где I — тождественное отображение. Имеет место

$$\lim_U D_i = D;\ \alpha(D) = 1.$$

Допустим, что идол-функция α ультрастабильна. Тогда по теореме 1

$$\lim_U \alpha(D_i) \geqslant 1.$$

Найдутся такие операторы A_i и B_i, что

$$B_i D_i A_i = D;\ \|A_i\| = 1;\ \|B_i\|^{-1} \geqslant \alpha(D_i) - \varepsilon_i.$$

Пусть

$$A = \lim_U A_i;\ B = \lim_U B_i;$$
$$U_1 = \{i \in J;\ A_i \text{ необратим}\},$$
$$U_2 = \{i \in J;\ B_i \text{ необратим}\}.$$

Для каждого $i \in J$ хотя бы один из операторов A_i и B_i необратим. Следовательно, $U_1 \cup U_2 = J$. По свойству ультрафильтра хотя бы одно из множеств U_1 и U_2 принадлежит U. Из замкнутости множества необратимых операторов следует, что хотя бы один из операторов A и B необратим. С другой стороны,

$$\|BDA-D\|=\lim_U\|BDA-B_iD_iA_i\|\leqslant\lim_U(\|BD\|\,\|A-A_i\|+$$
$$+\|B\|\,\|D-D_i\|\,\|A_i\|+\|B-B_i\|\,\|D_iA_i\|=0;\ BDA=D;$$
$$\|A\|\leqslant\lim_U\|A_i\|=1;\ \|B\|\leqslant\lim_U\|B_i\|\leqslant\lim_U(\alpha(D_i)-\varepsilon_i)^{-1}\leqslant 1.$$

Это противоречит лемме 5. Предложение доказано.

Выражаю благодарность профессору М. И. Кадецу за руководство и оказанную помощь при оформлении работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pietsch A. Ultraprodukte von Operatoren in Banach räumen. Препринт. — «Math. Nachr.», 1974, Bd 61, S. 123—132.
2. Кюрстен К. Д. О некоторых вопросах А. Пича. I. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 28. Харьков, 1977, с. 45—51.
3. Dacunha—Castelle D. et Krivine I. L. Applications des ultraproduits à l'étude des espaces et des algèbres de Banach. — «Studia Math.», 1972, vol 41, p. 305—324.
4. Lindenstrauss J., Rosenthal H. P. The L_p-spaces, «Isr. J. Math.», 1969, vol. 7, p. 325—349.

Поступила 17 мая 1974 г.