УДК 511.6 + 517.56

*А. В. КРЫТОВ*

# НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ДЕФЕКТОВ $p$-МЕРНЫХ ЦЕЛЫХ КРИВЫХ

## 1. Основные результаты

Пусть $\{g_n(z)\}_{n=1}^{p}$ — $p$ линейно независимых целых функций, имеющих, самое большее, конечное число общих нулей, и $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ — фиксированный вектор $p$-мерного комплексного унитарного пространства $C_p$.

Вектор-функция пространства $C_p$

$$G(z) = \{g_1(z), g_2(z), \ldots, g_p(z)\}, \; p \geqslant 2,$$

называется целой кривой $p$ измерений.

В работах [1—3] построена теория распределения значений целых кривых, являющаяся полным аналогом теории Р. Неванлинны [4] распределения значений мероморфных функций. Напомним некоторые определения этой теории. Обозначим через $n(t, a, G)$ $(a \neq \{0, 0, \ldots, 0\})$ число корней в круге $|z| \leqslant t$ с учетом кратности скалярного произведения

$$(G(z)\,a) = \sum_{n=1}^{p} g_n(z)\,a_n$$

и определим функцию числа корней $N(r, a, G)$ обычным образом. Характеристикой целой кривой $G(z)$ называется величина

$$T(r, G) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\,d\theta - u(0),$$

где

$$u(z) = \max_{1 \leqslant n \leqslant p} \ln |g_n(z)|.$$

Положим

$$\delta(a, G) = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r, a, G)}{T(r, G)}.$$

Дефект в смысле Р. Неванлинны $\delta(a, G)$ целой кривой $G(z)$ относительно вектора $a$ является одной из основных величин, характеризующих рост и распределение значений $G(z)$.

Настоящая работа посвящена исследованию величин дефектов. Число

$$\lambda = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln T(r, G)}{\ln r}$$

называется нижним порядком целой кривой $G(z)$.

Конечная ($\geqslant p$) или бесконечная система векторов $A$ называется допустимой, если любые $p$ векторов из этой системы линейно независимы.

Известны такие оценки для суммы дефектов целой кривой $G(z)$ конечного нижнего порядка $\lambda$.

**Теорема А** [5]. *Если нижний порядок p-мерной целой кривой* $G(z)$ $\lambda \leqslant 0{,}5$, *то*

$$\sum_{a \in A} \delta(a, G) \leqslant p-1.$$

**Теорема Б** [5]. *Если нижний порядок p-мерной целой кривой* $G(z)$ $0{,}5 < \lambda \leqslant 1$, *то для любых p векторов* $\{a_k\}_{k=1}^{p}$ *из допустимой системы векторов A*

$$\sum_{k=1}^{p} \delta(a_k, G) \leqslant p - \sin \pi\lambda.$$

**Теорема В** [6, с. 790]. *Величины дефектов целой кривой* $G(z)$ *нижнего порядка* $\lambda < 1$ *относительно фиксированной допустимой системы векторов A удовлетворяют соотношению*[1]

$$\sum_{a \in A} \delta^{\alpha}(a, G) \leqslant \frac{Kp^{7p}}{(2\alpha-1)^{\frac{1}{2}}}(1+\lambda^3),$$

*где* $\alpha > 0{,}5$, *p — размерность* $G(z)$.

Предположим, что для фиксированной допустимой системы $A$ векторы из множества

$$E_A(G) = \{a \in A : \delta(a, G) > 0\}$$

занумерованы в порядке невозрастания величин дефектов:

$$\delta(a_1, G) \geqslant \delta(a_2, G) \geqslant \cdots \geqslant \delta(a_k, G) \geqslant \cdots > 0. \qquad (1.1)$$

Пусть $G(z)$ — $p$-мерная целая кривая нижнего порядка $\lambda < 1$. Следующая теорема характеризует поведение величин дефектов целой кривой $G(z)$ в зависимости от нижнего порядка $\lambda$ и является основным результатом данной работы.

**Теорема 1.** *Предположим, что величины дефектов целой кривой* $G(z)$ *нижнего порядка* $\lambda < 1$ *удовлетворяют условию* (1.1) *и* $k$ $(\geqslant p)$ — *целое число. Тогда справедливо неравенство*

$$\delta(a_k, G) \leqslant 1 - \frac{q \sin \frac{\pi\lambda}{q}}{\pi\lambda}, \qquad (1.2)$$

*где*

$$q = \left[\frac{k-1}{p-1}\right]. \qquad (1.3)$$

[1] Здесь и в дальнейшем буквой $K$ будем обозначать различные положительные абсолютные постоянные.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 имеет место неравенство*

$$\sum_{k=p}^{\infty} \delta(a_k, G) \leqslant \frac{\pi^4}{36} \lambda^2 (p-1)^2. \tag{1.4}$$

Действительно, рассмотрим правую часть неравенства (1.2) и обозначим $x = \pi\lambda([k-1)/(p-1)])^{-1}$. При $k \to \infty$ $x \to 0$ и, значит,

$$\delta(a_k, G) \leqslant 1 - \frac{\sin x}{x} \sim 1 - \frac{x - \frac{x^3}{3!}}{x} = \frac{(\pi\lambda)^2}{6} \left( \left[ \frac{k-1}{p-1} \right] \right)^{-2}. \tag{1.5}$$

Известно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{1.6}$$

Соотношение (1.4) следует из (1.5) и (1.6).

Заметим, что при $p = 2$ и малых значениях $\lambda$ следствие 1 является аналогом теоремы 1 А. Эдрея [7] о сумме дефектов мероморфной функции, сформулированной в таком виде.

**Теорема Г.** *Если мероморфная функция $f(z)$ нижнего порядка $\lambda \leqslant 0{,}5$ обладает не менее чем двумя дефектными значениями, которые занумерованы так, что $\delta(a_1, G) \geqslant \delta(a_2, G) \geqslant \cdots > 0$, то справедливо неравенство*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \delta(a_k, f) \leqslant 1 - \cos \pi\lambda.$$

Аналогично, как и при доказательстве следствия 1, получаем

Следствие 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и $\varepsilon$ — положительное число. Тогда*

$$\sum_{k=p}^{\infty} \delta^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(a_k, G) \leqslant \left(2 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{6}} \lambda (p-1) \right\}^{1+2\varepsilon}.$$

Это следствие дополняет следующий результат (см. [8, с. 34]).

**Теорема Д.** *Если целая кривая $G(z)$ имеет конечный нижний порядок $\lambda$, то ее величины дефектов относительно фиксированной допустимой системы векторов $A$ удовлетворяют соотношению*

$$\sum_{a \in A} \delta^{\alpha}(a, G) \leqslant \frac{K p^{7p+1}}{(3\alpha - 1)^{\frac{1}{3}}} (1 + \lambda^3),$$

*где $\alpha > \frac{1}{3}$ и $p$ — размерность $G(z)$.*

Следствие 3. *Для произвольной p-мерной целой кривой $G(z)$ нижнего порядка $\lambda < 1$ и фиксированной допустимой системы векторов $A$*

$$\sum_{a \in A} \delta(a, G) \leqslant p - 1 + \frac{\pi^4}{36} \lambda^2 (p-1)^2. \tag{1.7}$$

Это утверждение вытекает непосредственно из следствия 1. Оценка (1.7) становится эффективной при малых значениях $\lambda$.

Если в теореме 1 в качестве $k$ выбрать $k = p$, то получим

Следствие 4. *Пусть $G(z)$ — p-мерная целая кривая нижнего порядка $0 < \lambda < 1$. Не существует $p$ векторов $a_1, a_2 \ldots, a_p$ из фиксированной допустимой системы $A$ таких, что $\delta(a_j, G) = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$.*

Это следствие является аналогом теоремы 7 Н. Тода (см. [9, с. 336]) для алгеброидных функций.

**Теорема Е.** *Пусть $f(z)$ — n-значная алгеброидная функция. Если существуют $n+1$ значений $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ таких, что $\delta(a_j, f) = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$, то порядок $f(z)$ — целый положительный или бесконечный. Более того, $f(z)$ имеет регулярный рост.*

Доказательство теоремы 1 приведено в п. 3; в п. 2 сформулированы подготовительные леммы.

## 2. Вспомогательные утверждения

Ниже мы будем пользоваться методом работы [5].

Предположим, что $p$-мерная целая кривая $G(z)$ имеет нерегулярный рост, т. е. $0 \leqslant \lambda[G] < \rho[G] < 1$. Обозначим $(k = 1, 2, \ldots, q;\ q > p)$:

$$F_k(z) = (G(z)\, a_k) = \sum_{n=1}^{p} g_n(z)\, a_{kn},$$

где

$$a_k = \{\bar{a}_{k1}, \bar{a}_{k2}, \ldots, \bar{a}_{kp}\} \in A.$$

Пусть $\{a_n(k)\}$ — нули функции $F_k(z)$, $\gamma_k$ — кратность корня $F_k(z)$ в нуле.

Функция[1]

$$g_R(z) = \frac{F_1(z)}{C_1 z^{\gamma_1} \prod\limits_{|a_n(1)| \leqslant R} \left(1 - \dfrac{z}{a_n(1)}\right)}$$

аналитическая и не имеет нулей при $|z| \leqslant R$ ($R$ фиксировано). Рассмотрим аналитическую кривую (см. [5])

$$G_R(z) = \left\{\frac{g_1(z)}{g_R(z)}, \frac{g_2(z)}{g_R(z)}, \ldots, \frac{g_p(z)}{g_R(z)}\right\}. \tag{2.1}$$

[1] Буквой $C$ будем обозначать различные положительные постоянные, зависящие лишь от рассматриваемой функции.

При $|z| = r < R$ справедливы соотношения

$$m(r, a, G_R) = m(r, a, G),\ T(r, G_R) = T(r, G).$$

Пусть теперь целая кривая $G(z)$ имеет регулярный рост, т. е. $0 \leqslant \lambda[G] = \rho[G] < 1$.
Рассмотрим функцию

$$D_k(z) = z^{\gamma_k} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_{n(k)}}\right).$$

Функция

$$S_1(z) = \frac{F_1(z)}{D_1(z)}$$

целая без корней и, значит,

$$S_1(z) = \exp(g(z)),$$

где $g(z)$ — целая функция.

Введем в рассмотрение целую кривую (см. [5])

$$G_0(z) = \left\{\frac{g_1(z)}{S_1(z)},\ \frac{g_2(z)}{S_1(z)},\ \ldots,\ \frac{g_p(z)}{S_1(z)}\right\}. \tag{2.2}$$

Легко проверить справедливость следующих соотношений ($a \in A$):

$$m(r, a, G_0) = m(r, a, G);\ T(r, G_0) = T(r, G);$$
$$N(r, a, G_0) = N(r, a, G);\ \delta(a, G_0) = \delta(a, G).$$

В дальнейшем, исследуя величины дефектов целой кривой $G(z)$ нерегулярного роста, будем использовать при $|z| \leqslant R$ соответствующие соотношения для аналитической кривой $G_R(z)$, определенной (2.1), а при исследовании величин дефектов целой кривой $G(z)$ регулярного роста будем использовать соответствующие соотношения для целой кривой $G_0(z)$, определенной (2.2). При этом полагаем, если $\lambda < \rho$,

$$\Phi_n(z) = (G_R(z)\, a_n)\ \ (|z| \leqslant R),$$

а если $\lambda = \rho$, то

$$\Phi_n(z) = (G_0(z)\, a_n).$$

Обозначим также при фиксированном $z$:

$$z = z_1;\ ze^{\frac{2\pi i}{p}} = z_2;\ ze^{2\frac{2\pi i}{q}} = z_3,\ \ldots,\ ze^{(q-1)\frac{2\pi i}{q}} = z_q,$$

где $q$ определено соотношением (1.3), и ($a_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{np}\} \in A$):

$$\Phi_n(z) = \bar{a}_{n1} g_1(z) + \bar{a}_{n2} g_2(z) + \cdots + \bar{a}_{np} g_p(z)$$
$$(n = 1,\ 2,\ \ldots,\ k;\ k \geqslant p);$$
$$\max\{|g_1(z_j)|;\ |g_2(z_j)|,\ \ldots,\ |g_p(z_j)|\} = |g_{\nu_{j(z)}}(z_j)|;$$
$$u(z_j) = \ln|g_{\nu_{j(z)}}(z_j)|\ \ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ q).$$

***Лемма 1.*** *Существует число* $l = l(z)$ $(1 \leqslant l \leqslant k;\ k \geqslant p)$ *такое, что*

$$\sum_{j=1}^{q} u(z_j) \leqslant \ln \left| \prod_{j=1}^{q} \Phi_l(z_j) \right| + C. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть $z_s$ — произвольная точка множества $\{z_1, z_2, \ldots, z_q\}$. Расположим функции $\Phi_1(z_s)$, $\Phi_2(z_s)$, ... ..., $\Phi_k(z_s)$ в порядке неубывания величин их модулей

$$|\Phi_{m_1}(z_s)| \leqslant |\Phi_{m_2}(z_s)| \leqslant \cdots \leqslant |\Phi_{m_k}(z_s)| \tag{2.4}$$

и рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} \Phi_{m_1}(z_s) = \bar{a}_{m_1 1} g_1(z_s) + \cdots + \bar{a}_{m_1 p} g_p(z_s); \\ \Phi_{m_2}(z_s) = \bar{a}_{m_2 1} g_1(z_s) + \cdots + \bar{a}_{m_2 p} g_p(z_s); \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Phi_{m_p}(z_s) = \bar{a}_{m_p 1} g_1(z_s) + \cdots + \bar{a}_{m_p p} g_p(z_s). \end{cases}$$

Будем считать, что в этой системе $g_1(z_s)$, $g_2(z_s)$, ..., $g_p(z_s)$ — неизвестные величины. Определитель системы уравнений

$$\begin{vmatrix} \bar{a}_{m_1 1} & \bar{a}_{m_1 2} & \ldots & \bar{a}_{m_1 p} \\ \bar{a}_{m_2 1} & \bar{a}_{m_2 2} & \ldots & \bar{a}_{m_2 p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{a}_{m_p 1} & \bar{a}_{m_p 2} & \ldots & \bar{a}_{m_p p} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля и, следовательно, система имеет единственное решение. Решая систему, получим

$$g_n(z_s) = \sum_{j=1}^{p} A_j^{(n)} \Phi_{m_j}(z_s) \quad (n = 1, 2, \ldots, p).$$

Отсюда следует, что

$$|g_{\nu_s}(z_s)| = \max_{1 \leqslant n \leqslant p} |g_n(z_s)| \leqslant C \sum_{j=1}^{p} |\Phi_{m_j}(z_s)| \leqslant C \max_{1 \leqslant n \leqslant p} |\Phi_{m_n}(z_s)| = \\ = C\,|\Phi_{m_p}(z_s)|$$

и согласно (2.4)

$$|g_{\nu_s}(z_s)| \leqslant C\,|\Phi_{m_n}(z_s)| \quad (p \leqslant n \leqslant k). \tag{2.5}$$

Введем в рассмотрение матрицу, состоящую из $q$ строк и $k$ столбцов:

$$M = \begin{pmatrix} |\Phi_1(z_1)| & |\Phi_2(z_1)| & \ldots & |\Phi_k(z_1)| \\ |\Phi_1(z_2)| & |\Phi_2(z_2)| & \ldots & |\Phi_k(z_2)| \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ |\Phi_1(z_q)| & |\Phi_2(z_q)| & \ldots & |\Phi_k(z_q)| \end{pmatrix}.$$

Поставим в соответствие $j$-й строке матрицы величину $|g_{\nu_j}(z_j)|$. Будем оценивать сверху величины $|g_{\nu_j}(z_j)|$ $(1 \leqslant j \leqslant q)$ элементами соответствующих строк. Из (2.5) следует, что в $j$-й строке найдется хотя бы один элемент, оценивающий сверху $|g_{\nu_j}(z_j)|$; с другой стороны, тех элементов, которые не оценивают сверху $|g_{\nu_j}(z_j)|$, самое большее $p-1$. Эти элементы расположены самое большее в $p-1$ различных столбцах матрицы $M$. Так как матрица $M$ имеет $q$ строк, то максимальное число столбцов, содержащих элементы, которые не оценивают сверху одновременно все величины $|g_{\nu_j}(z_j)|$, равно $(p-1)q = (p-1)\left[\frac{k-1}{p-1}\right] \leqslant k-1$. В силу того что матрица $M$ имеет $k$ столбцов, отсюда следует, что найдется по крайней мере один столбец, элементы которого одновременно оценивают сверху все величины $|g_{\nu_j}(z_j)|$. Другими словами, существует число $l = l(z)$ $(1 \leqslant l \leqslant k;\ k \geqslant p)$ такое, что

$$|g_{\nu_j}(z_j)| \leqslant C\,|\Phi_l(z_j)| \quad (1 \leqslant j \leqslant q).$$

Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 1 понадобится

***Лемма 2*** [10, с. 427]. *Для любой мероморфной при $z \neq \infty$ функции $f(z)$ при фиксированном $r$ $(r_0 \leqslant r \leqslant 0,5R)$ справедливо неравенство*

$$\ln M(r, f) \leqslant (2x)^2 r^{2x} \int\limits_0^R \frac{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \ln|f(te^{i\theta})|\,d\theta}{(t^{2x}+r^{2x})^2}\, t^{2x-1}\,dt -$$

$$-\sum_{|a_k| \leqslant 2R} \ln\left|\frac{r^{2x}+|a_k|^{2x}}{r^{2x}-|a_k|^{2x}}\right| + \sum_{|b_k| \leqslant 2R} \ln\left|\frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{r^{2x}-|b_k|^{2x}}\right| +$$

$$+K\left(\frac{r}{R}\right)^{2x}\{T(4R, f) + T_1(4R, f)\} + C, \qquad (2.6)$$

*где $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ — нули и полюсы функции $f(z)$, $x = \frac{\pi}{2\alpha} > 0,5$ — любое фиксированное число и*

$$T_1(r) = \int\limits_1^r \frac{T(s)}{s}\,ds.$$

### 3. Доказательство теоремы 1

Обозначим при фиксированном $z$

$$|g(\zeta)| = \left|\prod_{n=0}^{q-1} \Phi_{l(z)}\left(\zeta e^{n\frac{2\pi i}{q}}\right)\right|,$$

где число $l(z)$ определено леммой 1, и

$$M(r, g) = \max_{|\zeta|=r} |g(\zeta)|.$$

Выбирая в лемме 2 $\alpha = \pi/q$ и применяя формулу (2.6) к функции $g(\zeta)$, получаем ($z$ фиксировано)

$$\ln M(r, g) \leqslant q^2 r^q \int\limits_0^R \frac{\frac{1}{2\pi} \sum\limits_{n=0}^{q-1} \int\limits_{-\frac{\pi}{q}}^{\frac{\pi}{q}} \ln \left| \Phi_l \left( te^{i\left(\Theta + n\frac{2\pi i}{q}\right)} \right) \right| d\Theta}{(t^q + r^q)^2} t^{q-1} dt +$$

$$+ K \left(\frac{r}{R}\right)^q \{T(4R, \Phi_l) + T_1(4R, \Phi_l)\} + C. \tag{3.1}$$

Заметим, что (см. [11, с. 294])

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{q-1} \int\limits_{-\frac{\pi}{q}}^{\frac{\pi}{q}} \ln \left| \Phi_l \left( te^{i\left(\Theta + n\frac{2\pi i}{q}\right)} \right) \right| d\Theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln |\Phi_l(te^{i\Theta})| \, d\Theta = N(t, 0, \Phi_l) + \ln |\Phi_l(0)| \tag{3.2}$$

и при $t > t_0$ и $\varepsilon > 0$

$$N(t, 0, \Phi_l) \leqslant (1 + \varepsilon - \delta(a_l, G)) T(t, G) \leqslant$$
$$\leqslant (1 + \varepsilon - \delta(a_k, G)) T(t, G). \tag{3.3}$$

Из (2.3), (3.1), (3.2) и (3.3) имеем

$$\sum_{n=1}^{q} u(z_n) \leqslant q^2 r^q (1 + \varepsilon - \delta(a_k, G)) \int\limits_{t_0}^{R} \frac{T(t, G)}{(t^q + r^q)^2} t^{q-1} dt +$$

$$+ K \left(\frac{r}{R}\right)^q \{T(4R, \Phi_l) + T_1(4R, \Phi_l)\} + C.$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по $\Theta$ от 0 до $2\pi$ и пользуясь определением $T(r, G)$, получаем

$$qT(r, G) \leqslant q^2 r^q (1 + \varepsilon - \delta(a_k, G)) \int\limits_{t_0}^{R} \frac{T(t, G)}{(t^q + r^q)^2} t^{q-1} dt +$$

$$+ K \left(\frac{r}{R}\right)^q \{T(4R, \Phi_l) + T_1(4R, \Phi_l)\} + C. \tag{3.4}$$

Положим (см. об этом методе в [10])

$$\gamma(r) = \begin{cases} \lambda + \varepsilon_1 \ (\varepsilon_1 > 0), & \text{если } G(z) \text{ нерегулярного роста } (\lambda < \rho); \\ \rho(r), & \text{если } G(z) \text{ регулярного роста } (\lambda = \rho), \end{cases}$$

где $\rho(r)$ — уточненный порядок функции $T(r, G) + T_1(r, G)$.

Проведем далее доказательство теоремы 1 в случае, когда целая кривая $G(z)$ имеет нерегулярный рост. Деля неравенство (3.4) на $r^{\gamma+1}$, интегрируя его по $r$ от $r_0$ до $0{,}5R$ ($r_0 < 0{,}5R$) и меняя порядок интегрирования в первом слагаемом справа, что возможно в силу теоремы Фубини, получаем

$$\int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, G)}{r^{\gamma+1}} dr \leqslant q(1 + \varepsilon -$$
$$- \delta(a_k, G)) \int\limits_{t_0}^{R} \frac{T(t, G)}{t^{\gamma+1}} \left[ \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{t}{r}\right)^{\gamma+1} \frac{r^q t^{q-1}}{(t^q + r^q)^2} dr \right] dt +$$
$$+ KB(R, \Phi_l) + C. \tag{3.5}$$

Следующая лемма характеризует асимптотическое поведение величины

$$B(R, \Phi_l) = \{T(4R, \Phi_l) + T_1(4R, \Phi_l)\}/R^{\gamma}.$$

***Лемма 3*** [12]. *Если целая кривая $G(z)$ имеет нерегулярный рост, то существует последовательность $\{R_n\} \uparrow \infty$ такая, что*

$$B(R_n, \Phi_l) \to 0. \tag{3.6}$$

*Для целой кривой $G(z)$ регулярного роста при $R \to \infty$ справедливо соотношение*

$$B(R, \Phi_l) = O(1). \tag{3.7}$$

Вычислим внутренний интеграл в первом слагаемом правой части неравенства (3.5). Используя теорию вычетов, находим

$$\int\limits_0^{\infty} \left(\frac{t}{r}\right)^{\gamma+1} \frac{r^q t^{q-1}}{(t^q + r^q)^2} dr = \frac{1}{q^2} \frac{\pi\gamma}{\sin\frac{\pi\gamma}{q}}. \tag{3.8}$$

Обозначим

$$I(R) = \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, G)}{r^{\gamma+1}} dr. \tag{3.9}$$

Принимая во внимание (3.8) и (3.9), запишем неравенство (3.5) в виде

$$I(R) \leqslant (1 + \varepsilon - \delta(a_k, G)) \frac{\pi\gamma}{q \sin\frac{\pi\gamma}{q}} I(R) + KB(R, \Phi_l) + C. \tag{3.10}$$

Известно, что интеграл $I(R)$ расходится при неограниченно возрастающем $R$ [13, с. 1331]. Разделим обе части неравенства (3.10) на интеграл $I(R)$. Устремляя $\varepsilon$ и $\varepsilon_1$ к 0, а $R$ — к $\infty$ по последовательности, на которой выполняется соотношение (3.6), приходим к доказываемому неравенству (1.2).

Теорема 1 в случае нерегулярного роста целой кривой $G(z)$ доказана.

В случае регулярного роста $G(z)$ доказательство теоремы 1 проводится аналогично с использованием уточненного порядка $\rho(r)$ функции $T(r, G) + T_1(r, G)$ (см. [10]). Заметим только, что для оценки величины $B(R, \Phi_l)$ следует воспользоваться соотношением (3.7), а расходимость интеграла $I(R)$ доказана в работе [10, с. 429].

Теорема 1 доказана полностью.

Автор выражает глубокую благодарность В. П. Петренко за руководство работой.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ahlfors L. The theory of meromorphic curves.— "Acta Soc. Sci. Fenn.", 1941, vol. 3, № 4, p. 1—31.
2. Cartan H. Sur les zéros des combinaisons lineaires de $p$ fonctions holomorphes données.— "Mathematica", 1933, t. 7, p. 5—31.
3. Weyl H. Meromorphic functions and analytic curves. Princeton, 1943, 531 p.
4. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции. М.—Л., Гостехиздат, 1941, 388 с.
5. Петренко В. П., Хуссайн М. О дефектах целых кривых нижнего порядка $\lambda < 1$.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 24. Харьков, 1975, с. 128—138.
6. Крутінь В. І. Про величини відхилень цілих кривих.— «Доп. АН. УРСР», сер. А, 1974, № 9, с. 789—791.
7. Edrei A. Sums of deficiencies of meromorphic functions.— "Journ. anal. math.", 1965, vol. 14, p. 79—107.
8. Крутинь В. И. Замечание о росте и распределении значений $p$-мерных целых кривых.— «Вестн. Харьк. ун-та», 1974, № 113, сер. мат. и мех., вып. 39, с. 31—36.
9. Toda N. Sur la croissance de fonctions algébroides à valeurs déficientes.— "Kodai Math. Sem. Rep.", 1970, vol. 22, p. 324—337.
10. Петренко В. П. Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка.— «Изв. АН СССР», сер. мат., 1969, т. 33, № 2, с. 414—454.
11. Гольдберг А. А. Некоторые вопросы теории распределения значений (Доп. к кн.: Г. Виттих. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям). М., Физматгиз, 1960, с. 289—300.
12. Петренко В. П., Крытов А. В. Замечание о дефектах мероморфных функций.— В кн.: Вопросы математической физики и функционального анализа. Киев, «Наукова думка», 1976, с. 33—42.
13. Петренко В. П. Некоторые оценки для величин дефектов мероморфных функций.— «Сиб. мат. журн.». 1966, т. 7, № 6, с. 1319—1336.

*Поступила 30 января 1975 г.*