УДК 513.83

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ

О ПОВОРОТЕ ПОДПРОСТРАНСТВ

1. Рассмотрим семейство $H(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ подпространств гильбертова пространства H. Здесь Λ — некоторое метрическое пространство. Будем считать, что подпространства $H(\lambda)$ непрерывно (в смысле раствора [1]) зависят от λ; это значит, что операторы $P(\lambda)$ ортогонального проектирования на $H(\lambda)$ непрерывно (по норме операторов) зависят от λ. Через $Q(\lambda)$ обозначим операторы $Q(\lambda) = I - P(\lambda)$ ортогонального проектирования на ортогональные дополнения $N(\lambda)$ к $H(\lambda)$. Операторы $Q(\lambda)$ также непрерывно зависят от λ.

Непрерывную по норме операторов функцию $U(\mu, \lambda)$ $(\mu, \lambda \in \Lambda)$, значениями которой являются унитарные операторы, назовем правильным поворотом подпространств $H(\lambda)$, если $U(\mu, \lambda) H(\lambda) = H(\mu)$ и $U(\mu, \lambda) x = x$ $(x \in [H(\lambda) \cap H(\mu)] \cup [N(\lambda) \cap N(\mu)])$ (в частности, $U(\lambda, \lambda) \equiv I$).

Специальные повороты подпространств (в случае скалярного λ) изучались Ю. Л. Далецким и С. Г. Крейном (см. [2]) в связи с асимптотической теорией дифференциальных уравнений.

Как оказывается, в достаточно общей ситуации для поворота может быть указана простая «явная» формула.

2. Пусть выполнено условие

$$\| P(\lambda) - P(\mu) \| < 1 \quad (\lambda, \mu \in \Lambda). \tag{1}$$

При каждых $\lambda, \mu \in \Lambda$ определен оператор $P(\lambda) P(\mu) P(\lambda)$. Этот оператор, очевидно, самосопряжен; в силу (1) он отображает все H на $H(\lambda)$; его сужение $|\!\!\lceil P(\lambda) P(\mu) P(\lambda) \rceil\!\!|$ на $H(\lambda)$ будет положительно определенным оператором. В дальнейших построениях используется положительно определенный самосопряженный оператор $\left[P(\lambda)P(\mu)P(\lambda)\right]^{-\frac{1}{2}}$, действующий в $H(\lambda)$.

Аналогичным образом определяется действующий в $N(\lambda)$ положительно определенный самосопряженный оператор $\left[Q(\lambda)Q(\mu)Q(\lambda)\right]^{-\frac{1}{2}}$, где $\left[Q(\lambda)Q(\mu)Q(\lambda)\right]$ — сужение на $N(\lambda)$ оператора $Q(\lambda)Q(\mu)Q(\lambda)$.

Теорема. *Пусть выполнено условие* (1). *Тогда операторы*

$$U(\mu, \lambda) = P(\mu)\left[P(\lambda)P(\mu)P(\lambda)\right]^{-\frac{1}{2}}P(\lambda) + \\ + Q(\mu)\left[Q(\lambda)Q(\mu)Q(\lambda)\right]^{-\frac{1}{2}}Q(\lambda) \quad (\lambda, \mu \in \Lambda) \tag{2}$$

унитарны и определяют правильный поворот подпространств $H(\lambda)$.

Доказательство не требует преодоления каких-либо трудностей, кроме технических. Унитарность $U(\mu, \lambda)$ вытекает из почти очевидных равенств

$$\|P(\mu)\left[P(\lambda)P(\mu)P(\lambda)\right]^{-\frac{1}{2}}P(\lambda)x\| = \|P(\lambda)x\| \quad (x \in H);$$

$$\|Q(\mu)\left[Q(\lambda)Q(\mu)Q(\lambda)\right]^{-\frac{1}{2}}Q(\lambda)x\| = \|Q(\lambda)x\| \quad (x \in H).$$

Непрерывность $U(\mu, \lambda)$ по μ очевидна. Для доказательства непрерывности по λ можно воспользоваться представляющим самостоятельный интерес равенством $U(\mu, \lambda)U(\lambda, \mu) \equiv I$ (это равенство, по существу, установлено в [3]).

3. Отметим во избежание ошибок при использовании формулы (2), что (в случае скалярного λ) поворот (2) не обладает полугрупповым свойством.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1966. 544 с.
2. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., «Наука», 1970. 534 с.
3. Крейн М. Г., Красносельский М. А., Мильман Д. П. О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах.— «Сб. трудов Ин-та мат. АН УССР», 1948, № 11, с. 11—25.

Поступила 8 мая 1975 г.