УДК 513.88

*В. Н. КАЛЮЖНЫЙ*

# КВАЗИКОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ ИЗОМЕТРИЙ ПРОСТРАНСТВ МИНКОВСКОГО

## 1. Постановка задачи

Пространством Минковского называется конечномерное вещественное или комплексное линейное нормированное пространство. Норма в нем, как известно, вполне определяется единичным шаром $B = \{x : \|x\| \leqslant 1\}$. Линейный оператор $T$ является изометрией пространства Минковского, если он сохраняет шар $B$, т. е. если $T(B) = B$. Группу всех изометрий обозначим $\operatorname{Iso} B$. Если ввести скалярное произведение, инвариантное относительно группы $\operatorname{Iso} B$, то она станет замкнутой подгруппой полной ортогональной (унитарной) группы соответствующего евклидова (унитарного) пространства.

Наоборот, пусть задано евклидово (унитарное) пространство $E$ и в нем группа $G$ ортогональных (унитарных) операторов. Возникает вопрос, при каком условии $G$ реализуется как группа изометрий пространства Минковского, т. е. когда существует такой единичный шар $B$ в $E$, что $G = \operatorname{Iso} B$? Очевидно, что $G$ должна быть компактной группой и должна содержать все скалярные операторы $\alpha I$ ($|\alpha| = 1$).

В настоящей заметке вопрос о реализации будет решен для квазиконечных групп. Компактная группа $G$ называется квазиконечной, если связная компонента $G_I$ единицы $I$ группы $G$ коммутативна, т. е. если $G_I$ является тором. Следующие две леммы справедливы для произвольной группы $G$ ортогональных (унитарных) операторов.

**Лемма 1.** *Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — попарно не пересекающиеся, замкнутые, нигде не плотные подмножества единичной евклидовой сферы, инвариантные относительно $G$. Тогда в $E$ существует такой единичный шар $B$, инвариантный относительно $G$, что любой оператор $T \in \operatorname{Iso} B$ является ортогональным (унитарным) и сохраняет каждое из множеств $A_1, \ldots, A_m$.*

Доказательство дано в [1].

**Лемма 2.** *Пусть $E = \bigoplus E_k$ — разложение в ортогональную сумму инвариантных относительно $G$ подпространств $E_k$, для которых представления $g \to g \mid E_k$ примарны и попарно дизъюнктны. Если*

$$u = \sum_k u_k \quad (u_k \in E_k),$$

*то линейная оболочка орбиты $G(u)$ имеет вид*

$$\operatorname{Lin} G(u) = \bigoplus_k \operatorname{Lin} G(u_k).$$

Доказательство. Подпространство $\operatorname{Lin} G(u)$ инвариантно относительно $G$. Поэтому (см. [2, с. 136])

$$\operatorname{Lin} G(u) = \bigoplus_k (\operatorname{Lin} G(u)) \cap E_k) = \bigoplus_k \operatorname{Lin} G(u_k).$$

***Лемма 3.*** *Если линейная комбинация комплексных мультипликативных характеров принимает на торе значения тождественно равные по модулю единице, то она сводится к одному слагаемому.*

С точностью до формулировки это доказано в [3].

В дальнейшем группа $G$ будет считаться квазиконечной. Вопрос о ее реализации как группы изометрий пространства Минковского будет рассмотрен поочередно в комплексном и вещественном случаях.

## 2. Комплексный случай

Для комплексного мультипликативного характера $\chi$ тора $G_I$ положим

$$E_\chi = \{u \in E : gu = \chi(g)\, u\ (g \in G_I)\}.$$

Пусть

$$X = \{\chi : E_\chi \neq (0)\}.$$

Тогда, как известно, пространство $E$ разлагается в ортогональную сумму весовых подпространств

$$E = \bigoplus_{\chi \in X} E_\chi.$$

Для вектора

$$u = \sum_{\chi \in X} u_\chi\ (u_\chi \in E_\chi) \tag{1}$$

при любом $g \in G_I$ имеем

$$gu = \sum_{\chi \in X} \chi(g)\, u_\chi.$$

Обозначим

$$L(u) = \operatorname{Lin} G_I(u).$$

Тогда $L(u_\chi) = Cu_\chi$ и по лемме 2 получаем

$$L(u) = \bigoplus_{\chi \in X} L(u_\chi) = \bigoplus_{\chi \in X} Cu_\chi.$$

***Лемма 4.*** *Пусть вектор $u$ таков, что в разложении* (1) *все $\|u_\chi\|$ различны. Тогда, если унитарный оператор $T$ сохраняет орбиту $G_I(u)$, существует такой $g \in G_I$, что $T \mid L(u) = g \mid L(u)$.*

Доказательство. Поскольку $T$ сохраняет $G_I(u)$, то существует такой $g \in G_I$, что $Tu = gu$. Оператор $A = g^{-1}T$ также унитарен и сохраняет орбиту $G_I(u)$. Поэтому для каждого $h \in G_I$ найдется такой $f_h \in G_I$, что $Ahu = f_h u$, т. е.

$$\sum_{\varphi \in X} \varphi(h)\, Au_\varphi = \sum_{\chi \in X} \chi(f_h)\, u_\chi.$$

Отсюда для произвольного $\chi$ имеем

$$\chi(f_h) = \| u_\chi \|^{-2} \sum_{\varphi \in X} \varphi(h) (Au_\varphi, u_\chi).$$

Поскольку $|\chi(g)| = 1$ ($g \in G_I$), то выражение в правой части удовлетворяет условию леммы 3. Следовательно, существует такой характер $\tilde{\chi} \in X$, что $(Au_\varphi, u_\chi) = 0$ для всех $\varphi \neq \tilde{\chi}$ и $|(Au_{\tilde{\chi}}, u_\chi)| = \| u_\chi \|^2$. Векторы $\{Au_\varphi\}_{\varphi \in X}$ образуют ортогональный базис в $L(u)$. Поэтому

$$u_\chi = \sum_{\varphi \in X} \frac{(u_\chi, Au_\varphi)}{\| Au_\varphi \|^2} Au_\varphi = \frac{(u_\chi, Au_{\tilde{\chi}})}{\| Au_{\tilde{\chi}} \|^2} Au_{\tilde{\chi}}.$$

Отсюда $\| u_\chi \| = \| u_{\tilde{\chi}} \|$, что возможно только при $\chi = \tilde{\chi}$. Значит, $Au_\chi = a_\chi u_\chi$ ($a_\chi \in C$). Из равенства $Au = u$ теперь следует, что $Au_\chi = u_\chi$. В силу произвольности $\chi$, оператор $A$ единичен на $L(u)$. Таким образом, $T \mid L(u) = g \mid L(u)$, что и требовалось.

**Теорема 1.** *Всякая квазиконечная группа унитарных операторов, содержащая все скалярные операторы, реализуется как группа изометрий пространства Минковского.*

Доказательство. Случай $\dim E = 1$ очевиден.

Рассмотрим отдельно случай, когда все $E_\chi$ одномерны: $E_\chi = Cu_\chi$. Положим $u = \sum_{\chi \in X} u_\chi$. По лемме 1 существует такой единичный шар $B$, инвариантный относительно $G$, что любая его изометрия $T$ является унитарным оператором и сохраняет орбиту $G(u)$. Множество $G(u)$ распадается на связные компоненты вида $gG_I(u)$, которые переставляются оператором $T$. Можно считать, что $TG_I(u) = G_I(u)$. По лемме 4 (условие которой можно считать выполненным) оператор $T$ совпадает с некоторым $h \in G_I$ на подпространстве $L(u) = \bigoplus_{\chi \in X} Cu_\chi = \bigoplus_{\chi \in X} E_\chi = E$.

В общем случае для любого $\varepsilon > 0$ в каждом из подпространств $E_\chi$ ($\chi \in X$) найдется базис $\{u_\chi^i : i = 1, \ldots, n_\chi\}$ такой, что для любых $i$, $j$ и $\chi \neq \varphi$ будут выполняться неравенства

$$\| u_\chi^i - u_\chi^j \| < \varepsilon; \ \| u_\chi^i \| \neq \| u_\varphi^j \|.$$

Положим

$$u = \sum_{\chi \in X} n_\chi^{-1} \sum_{i=1}^{n_\chi} u_\chi^i.$$

Пусть $F$ — множество всех отображений $f: X \to N$ таких, что $f(\chi) \in \{1, \ldots, n_\chi\}$. Для каждого $f \in F$ положим

$$u_1 = \sum_{\chi \in X} u_\chi^{f(\chi)}.$$

Пусть $B$ — единичный шар, всякая изометрия $T$ которого унитарна и сохраняет орбиты $G(u)$, $G(u_f)$ ($f \in F$). Можно считать, что

$TG_I(u) = G_I(u)$. При достаточно малом $\varepsilon$ для всех $f \in F$ расстояние от $G_I(u)$ до $G_I(u_f)$ меньше расстояния от $G_I(u)$ до остальных связных компонент орбиты $G(u_f)$ и, следовательно, $T$ сохраняет также каждую орбиту $G_I(u_f)$. По лемме 4 существует такой $g_f \in G_I$, что $T \mid L(u_f) = g_f \mid L(u_f)$. В частности,

$$Tu_\chi^{f(\chi)} = g_f u_\chi^{f(\chi)} = \chi(g_f)\, u_\chi^{f(\chi)}.$$

Это значит, что оператор $T$ диагонален:

$$Tu_\chi^i = \alpha_\chi^i u_\chi^i \, (\alpha_\chi^i \in C).$$

Наконец, существует такой $g \in G_I$, что $Tu = gu$. Проектируя это равенство на $u_\chi^i$, получим $\alpha_\chi^i = \chi(g)$. Поэтому $T = g \in G$. Теорема доказана.

### 3. Вещественный случай

Обозначим через $O(E)$ (соответственно $SO(E)$) полную (специальную) ортогональную группу евклидова пространства $E$. Если $H$ — группа операторов, действующих в подпространстве $L \subset E$, то пусть $H \bigoplus I$ обозначает группу, образованную ортогональными суммами операторов $h \in H$ и единичного оператора в ортогональном дополнении $L^\perp$. Группу операторов $G$ пространства $E$ назовем насыщенной, если $G$ содержит подгруппу $O(L) \bigoplus I$ всякий раз, когда $G$ содержит $SO(L) \bigoplus I$ для некоторого подпространства $L \subset E$.

Можно показать, что группа изометрий пространства Минковского насыщена для любой евклидовой метрики, инвариантной относительно $\operatorname{Iso} B$. Отметим также, что из условия $O(L) \bigoplus I \subset \subset \operatorname{Iso} B$ следует евклидовость подпространства $L$ и существование такого проектора $P$ на $L$, что $P$ и $I - P$ являются ортопроекторами и $P$ коммутирует с любой изометрией шара $B$, для которой подпространство $L$ инвариантно.

**Теорема 2.** *Всякая насыщенная квазиконечная группа ортогональных операторов, содержащая оператор* $(-I)$, *реализуется как группа изометрий пространства Минковского.*

Доказательство. Напомним, что комплексной структурой в евклидовом пространстве называется ортогональный оператор $J$ такой, что $J^2 = -I$.

Действие тора $G_I$ в пространстве $E$ описывается следующим образом. Существует множество $X$ ненулевых вещественных аддитивных (mod $2\pi$) характеров тора $G_I$. Существует, далее, множество ненулевых подпространств $E_\chi (\chi \in X)$ и, возможно, нулевое подпространство $E_0$. В каждом из подпространств $E_\chi\, (\chi \in X)$ существует комплексная структура $J_\chi$. Пространство $E$ разлагается в ортогональную сумму подпространств

$$E = E_0 \bigoplus_{\chi \in X} E_\chi,$$

а произвольный оператор $g \in G_I$ разлагается в ортогональную сумму операторов

$$g = I_0 \bigoplus_{\chi \in X} \exp(\chi(g) J_\chi),$$

где $I_0$ — единичный оператор в пространстве $E_0$. Для элемента

$$u = u_0 + \sum_{\chi \in X} u_\chi \quad (u_0 \in E_0,\ u_\chi \in E_\chi) \tag{2}$$

имеем

$$gu = u_0 + \sum_{\chi \in X} (\cos \chi(g) u_\chi + \sin \chi(g) J_\chi u_\chi).$$

По лемме 2 $L(u) \equiv \operatorname{Lin} G_I(u)$ имеет вид

$$L(u) = Ru_0 \bigoplus_{\chi \in X} L_\chi(u),$$

где

$$L_\chi(u) = \operatorname{Lin}(u_\chi,\ J_\chi u_\chi).$$

***Лемма 5.*** *Пусть вектор* $u$ *таков, что в разложении* (2) *все* $\| u_\chi \|$ *различны. Тогда если ортогональный оператор* $T$ *сохраняет орбиту* $G_I(u)$, *то* $Tu_0 = u_0$ *и подпространства* $L_\chi(u)$ $(\chi \in X)$ *инвариантны относительно* $T$. *Если к тому же* $Tu = u$, *то* $Tu_\chi = u_\chi$ *для всех* $\chi \in X$.

Доказательство. Для любого $g \in G_I$ существует такой $h \in G_I$, что $Tgu = hu$, т. е.

$$\begin{aligned} Tu_0 + \sum_{\varphi \in X} \cos \varphi(g) Tu_\varphi + \sum_{\varphi \in X} \sin \varphi(g) TJ_\varphi u_\varphi = \\ = u_0 + \sum_{\chi \in X} \cos \chi(h) u_\chi + \sum_{\chi \in X} \sin \chi(h) J_\chi u_\chi. \end{aligned} \tag{3}$$

Умножая скалярно на $u_0$ и интегрируя по $G_I$, получим $(Tu_0,\ u_0) = \| u_0 \|^2$, откуда $Tu_0 = u_0$. Далее из (3) для произвольного $\chi$ найдем

$$e^{i\chi(h)} = \sum_{\varphi \in X} a_\varphi^+ e^{i\varphi(g)} + \sum_{\varphi \in X} a_\varphi^- e^{-i\varphi(g)},$$

где

$$\begin{aligned} 2a_\varphi^\pm \| u_\chi \|^2 = (Tu_\varphi,\ u_\chi) \pm (TJ_\varphi u_\varphi,\ J_\chi u_\chi) + i\,[(Tu_\varphi,\ J_\chi u_\chi) \mp \\ \mp (TJ_\varphi u_\varphi,\ u_\chi)]. \end{aligned}$$

По лемме 3 существует такой характер $\tilde{\chi}$, что $a_\varphi^\pm = 0$ для всех $\varphi \neq \tilde{\chi}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} (Tu_\varphi,\ u_\chi) = (Tu_\varphi,\ J_\chi u_\chi) = (TJ_\varphi u_\varphi,\ u_\chi) = \\ = (TJ_\varphi u_\varphi,\ J_\chi u_\chi) = 0, \end{aligned}$$

т. е. подпространство $TL_\varphi(u)$ ортогонально к $L_\chi(u)$. Поэтому $TL_{\tilde{\chi}}(u) = L_\chi(u)$. Будем теперь считать, что $Tu = u$. Проектируя это равенство на $L_\chi(u)$, получим $Tu_{\tilde{\chi}} = u_\chi$, откуда $\tilde{\chi} = \chi$. Итак равенства

$$TL_\chi(u) = L_\chi(u),\ Tu_\chi = u_\chi$$

выполняются для любого $\chi \in X$. Лемма доказана.

Пусть $G_I^*$ — группа характеров тора $G_I$. Как известно, она изоморфна целочисленной решетке $L^r$. Подгруппу, порожденную подмножеством $Y \subset G_I^*$, будем обозначать $\langle Y \rangle$. Очевидно, что $\langle X \rangle = G_I^*$. Подмножество $Y \subset G_I^* \setminus \{0\}$ назовем неразложимым, если $\langle Y_1 \rangle \bigcap \langle Y_2 \rangle \neq (0)$ для любого разбиения $Y = Y_1 \bigcup Y_2$. Неразложимое подмножество, содержащее более одного элемента, целочисленно линейно зависимо.

Семейство максимальных неразложимых подмножеств множества $X$ образует его разбиение $\Omega$. Пусть $X_1$ — объединение неодноэлементных классов разбиения $\Omega$.

***Лемма 6.*** *Пусть вектор u удовлетворяет условию леммы 5. Сколь угодно близко к u существует вектор v, обладающий следующим свойством. Для любого ортогонального оператора T, сохраняющего орбиты $G_I(u)$, $G_I(v)$, существует такой $g \in G_I$, что $T \mid L_\chi(u) = g \mid L_\chi(u)$ для всех $\chi \in X_1$ и таких, что $u_\chi \neq 0$.*

Доказательство. Будем считать, что $Tu = u$. Тогда $Tu_0 = u_0$, $Tu_\chi = u_\chi$, $TL_\chi(u) = L_\chi(u)\ (\chi \in X)$. Пускай $u_\chi \neq 0$. Поскольку $J_\chi u_\chi$ ортогонально к $u_\chi$, то $TJ_\chi u_\chi = \pm J_\chi u_\chi$. Для $Y \in \Omega$ положим $Y^\pm = \{\chi \in Y : TJ_\chi u_\chi = \pm J_\chi u_\chi\}$. Очевидно, что $Y = Y^+ \bigcup Y^-$. Если $\chi \in Y^\pm$, то из (3) следует, что $\chi(g) = \pm \chi(h)$. Поэтому если $\lambda \in \langle Y^\pm \rangle$, то $\lambda(g) = \pm \lambda(h)$. Следовательно, $\langle Y^+ \rangle \bigcap \langle Y^- \rangle = (0)$. Поскольку $Y$ неразложимо, то либо $Y = Y^+$, либо $Y = Y^-$.

Положим

$$v = u_0 + \sum_{\chi \in X} \exp(\alpha_\chi J_\chi) u_\chi,$$

где числа $\pi$, $\alpha_\chi\ (\chi \in X_1)$ целочисленно линейно независимы. Вектор $v$ сколь угодно близок к $u$ при достаточно малых $\alpha_\chi$. По условию найдется $h \in G_I$ такое, что $Tv = hv$.

Возьмем произвольный $\chi \in X_1$. Пусть $Y$ — то неодноэлементное подмножество из $\Omega$, которое содержит $\chi$. Если $Y = Y^-$, то, проектируя равенство $Tv = hv$ на $L_\chi(u)$, получим

$$\chi(h) \equiv -2\alpha_\chi \pmod{2\pi}.$$

Следовательно, целочисленная линейная зависимость множества $Y$ влечет целочисленную линейную зависимость чисел $\pi$, $\alpha_\chi\ (\chi \in Y)$. Полученное противоречие показывает, что $Y = Y^+$. Поэтому $T \mid L_\chi(u) = I \mid L_\chi(u)$.

*Лемма 7. Пусть $E$ — евклидово пространство размерности $2n > 2$ и $I$ — комплексная структура в $E$. Пусть векторы $u_1, \ldots, u_n$ таковы, что $(u_i, u_j) \neq 0\ (i \neq j)$ и имеет место разложение в прямую сумму:*

$$E = \cdot \sum_{i=1}^{n} L_i \ (L_i = \operatorname{Lin}(u_i, Ju_i)).$$

*Тогда существует такой вектор $u_0$, что если ортогональный оператор $T$ сохраняет подпространства $L_i\ (i = 0, 1, \ldots, n)$, то $T = \exp(\alpha J)$. При этом можно считать, что для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство*

$$\max_i \{\| u_0 - u_i \|\} < \varepsilon + \max_{k, j} \{\| u_k - u_j \|\}.$$

Доказательство опустим.

Отметим, что в евклидовом пространстве $E$ с комплексной структурой $J$ существует система сколь угодно близких друг к другу векторов $u_1, \ldots, u_n$, удовлетворяющая условию леммы 7. При этом вектор $u_0$ можно выбрать столь же близким к ним.

Для $Y \in \Omega$ рассмотрим подгруппу

$$G_Y = \{g \in G_I : (\forall \chi \,\overline{\in}\, Y)(\chi(g) = 0)\}.$$

В силу двойственности [4] $G_Y \neq (1)$. Оператор $h \in G_Y$ действует тождественно на подпространствах $E_\chi\ (\chi \,\overline{\in}\, Y)$. Если $\{\psi\} \in \Omega$ и $h \in G_{\{\psi\}}$, то $h \mid E_\psi = \exp(\psi(h) J_\psi)$. Если к тому же $\dim E_\psi = 2$. то $G_{\{\psi\}} = SO(E_\psi) \oplus I$. По условию теоремы $O(E_\psi) \oplus I \subset G$. Положим $X_3 = \{\psi \in X : \{\psi\} \in \Omega,\ \dim E_\psi = 2\}$. Тогда для любого $g \in G$ и произвольных $T_\psi \in O(E_\psi)$ оператор

$$I_0 \bigoplus_{\chi \in X \setminus X_3} \exp(\chi(g) J_\chi) \bigoplus_{\psi \in X_3} T_\psi \tag{4}$$

принадлежит группе $G$. Положим также $X_2 = \{\varphi \in X : \{\varphi\} \in \Omega,$ $\dim E_\psi > 2\}$.

Перейдем к построению единичного шара $B$. В подпространстве $E_0$ выберем базис из сколь угодно близких друг к другу векторов $u_0^i\ (i = 1, \ldots, n_0)$. В каждом из подпространств $E_\chi\ (\chi \in X)$ найдем такую систему сколь угодно близких друг к другу векторов $u_\chi^i\ (i = 1, \ldots, n_\chi)$, чтобы $E_\chi$ разлагалось в прямую сумму подпространств $L_\chi^i = \operatorname{Lin}(u_\chi^i, J_\chi u_\chi^i)$. При этом можно считать, что нормы всех векторов $u_\chi^i\ (\chi \in X_1,\ i = 1, \ldots, n_\chi)$ различны. Пусть $F$ — множество всевозможных отображений $f : X \cup \{0\} \to N$, удовлетворяющих условию $f(\chi) \in \{1, \ldots, n_\chi\}$ для всех $\chi \in X \cup \{0\}$. Образуем векторы

$$u_f = \sum_{\chi \in X \cup \{0\}} u_\chi^{f(\chi)}.$$

Для каждого $u_f$ подберем вектор $v_f$, пользуясь леммой 6. Для $\chi \in X_1$ положим

$$u_\chi = \frac{1}{n_\chi} \sum_{i=1}^{n_\chi} u_\chi^i.$$

Если $\varphi \in X_2$, то возьмем вектор $u_\varphi^0$ по лемме 7. Положим

$$u = u_0^1 + \sum_{\chi \in X_1} u_\chi + \sum_{\varphi \in X_2} u_\varphi^0.$$

Можно считать, что все векторы $u_f$, $v_f$, $u$ сколь угодно близки друг к другу.

По лемме 1 существует такой единичный шар $B$, что каждая его изометрия $T$ является ортогональным оператором и сохраняет орбиты $G(u_f)$, $G(v_f)$ $(f \in F)$, $G(u)$. Можно считать, что $T$ сохраняет также орбиты $G_I(u_f)$, $G_I(v_f)$, $G_I(u)$. По лемме 5 выполняются равенства $Tu_0^i = u_0^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и подпространства $L_\chi^i$ $(i = 1, \ldots, n_\chi;\ \chi \in X)$, $\mathrm{Lin}(u_\chi^0, J_\chi u_\chi^0)$ $(\chi \in X_2)$ инвариантны относительно $T$. В силу лемм 6, 7 существуют такие числа: $t_\chi^i$ $(i = 1, \ldots, n_\chi;\ \chi \in X_1)$, $t_\varphi$ $(\varphi \in X_2)$, что

$$T \setminus L_\chi^i = \exp(t_\chi^i J_\chi) \mid L_\chi^i;\ T \mid E_\varphi = \exp(t_\varphi J_\varphi).$$

Наконец, существует такой $g \in G_I$, что $Tu = gu$. Проектируя это равенство на соответствующие подпространства, получим

$$t_\chi \equiv t_\chi^i \equiv \chi(g) \pmod{2\pi}.$$

Обозначим $T_\psi = T \mid E_\psi$ $(\psi \in X_3)$. Тогда оператор $T$ приобретает вид, указанный равенством (4), и, следовательно, $T$ входит в группу $G$. Теорема доказана.

Как показывают примеры, условие насыщенности не является достаточным в классе всех некоммутативных групп. В то же время справедливо

Следствие. *Всякая конечная подгруппа в $O(E)$, содержащая оператор $(-I)$, реализуется как группа изометрий пространства Минковского.*

Доказательство теоремы 2 показывает также, что верна

**Теорема 3.** *Произвольная связная коммутативная группа ортогональных операторов реализуется как связная компонента единицы группы изометрий пространства Минковского.*

Сформулируем один результат, относящийся к некоммутативному случаю.

**Теорема 4.** *Пусть $G$ — максимальная связная подгруппа в $SO(E)$ или $U(E)$, не транзитивно действующая на единичной сфере. Тогда $G$ реализуется как связная компонента единицы группы изометрий пространства Минковского.*

Группы, удовлетворяющие условию теоремы 4, описаны в работах Е. Б. Дынкина и А. Л. Онищика.

Автор благодарит Ю. И. Любича, давшего толчок настоящей работе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калюжный В. Н. Коммутативные группы изометрий пространств Минковского.— «Сиб. мат. журн.», 1974, т. XV, № 5, с. 1138—1142.
2. Кириллов А. А. Элементы теории представлений. М., «Наука», 1972. 336 с.
3. Bojanic R., Stoll W. A characterization of monomial.— «Proc. Amer. Math. Soc.», 1962, vol. 13, № 1, p. 115—116.
4. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. М., ГИТТЛ, 1954. 515 с.

*Поступила 25 июня 1974 г.*