УДК 517.535.4

*А. А. ГОЛЬДБЕРГ*

# К ВОПРОСУ О СВЯЗИ МЕЖДУ ДЕФЕКТОМ И ОТКЛОНЕНИЕМ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ

1. Здесь без пояснений используются стандартные обозначения неванлинновской теории распределения значений [1]. Кроме того, через $\beta(a, f)$ обозначаем отклонение мероморфной в $C$ функции $f$ от значения $a \in \overline{C}$ [2], т. е.

$$\beta(a, f) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{\ln^+ M(r, a, f)}{T(r, f)},$$

где $M(r, \infty, f) = M(r, f)$, $M(r, a, f) = M(r, 1/(f-a))$, $a \in C$, а через $l(r, f)$ — величину $l(r, f) = \operatorname{mes}\{\varphi \in [0, 2\pi] : |f(re^{i\varphi})| > 1\}$.

В. П. Петренко, который впервые ввел величину $\beta(a, f)$, доказал, что для мероморфных функций конечного нижнего порядка из $\Delta(a, f) = 0$ следует, что $\beta(a, f) = 0$, и поставил вопрос, не будет ли для выполнения $\beta(a, f) = 0$ достаточным более слабое условие $\delta(a, f) = 0$ [2]. А. Ф. Гришин [3] дал отрицательный ответ на этот вопрос: для любого $\rho$, $0 \leqslant \rho < \infty$ он построил пример мероморфной функции $f$ порядка $\rho$, у которой $\delta(\infty, f) = 0$, однако $\beta(\infty, f) > 0$. Конструкция А. Ф. Гришина довольно сложна, поэтому здесь приведен более простой пример мероморфной функции с теми же свойствами, что и в примере А. Ф. Гришина. Кроме того, построен пример целой функции $g$ порядка $\rho$, $1/2 < \rho < \infty$, для которой выполняется

$$\varliminf_{r \to \infty} l(r, g) = 0. \qquad (1)$$

Как будет обсуждено ниже, примеры целых функций со свойством (1) тесно связаны с примерами целых и мероморфных функций типа примеров Пэйли [4] и А. Ф. Гришина.

2. Пэйли [4] построил примеры целых функций $g$ заданного порядка $\rho$, $0 \leqslant \rho < \infty$, для которых $M(r, g) = g(r)$ и

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln M(r, g)}{T(r, g)} = \infty \tag{2}$$

(детальное построение приведено в [4] для случая $\rho = 0$). Обозначим

$$\nu(r) = \left[\frac{rM'(r, g)}{M(r, g)}\right] - c,$$

где постоянная $c \geqslant 0$ выбрана так, чтобы $\nu(0) = 0$, причем в тех точках, где не существует производная, под $M'(r, g)$ понимаем правостороннюю производную (на самом деле эта оговорка излишня, так как в примере Пэйли тейлоровские коэффициенты функции $g$ неотрицательны). По теореме Адамара о трех кругах функция $\nu(r)$ не убывает и, очевидно, принимает целочисленные неотрицательные значения. Пусть $(a_k)$ — последовательность положительных чисел, для которой функция $\nu(r)$ является считающей:

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k (z + a_k)}.$$

Очевидно,

$$h(z) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k |z + a_k|} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k |\operatorname{Im} z|} = \frac{1}{|\operatorname{Im} z|},$$

следовательно, $m(r, h) = 0(1)$. С другой стороны, $n(r, h) = \nu(r) = rM'(r, g)/M(r, g) + 0(1)$ и $N(r, h) = \ln M(r, g) + 0(\ln r)$; $T(r, h) = \ln M(r, g) + 0(\ln r)$.

Пусть $f(z) = h(z) + g(z)$. Очевидно, $m(r, f) = T(r, g) + 0(1)$; $T(r, f) = N(r, h) + m(r, f) = \ln M(r, g) + T(r, g) + 0(\ln r) \leqslant 2 \ln M(r, g) + 0(\ln r)$; $M(r, f) \geqslant g(r) + h(r) > M(r, g)$.

Поэтому порядок мероморфной функции $f$ равен $\rho$ и

$$\delta(\infty, f) \leqslant \varliminf_{r \to \infty} \frac{T(r, g)}{\ln M(r, g) + T(r, g)} = 0;$$

$$\beta(\infty, f) \geqslant \varliminf_{r \to \infty} \frac{\ln M(r, g)}{2 \ln M(r, g)} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, функция $f$ обладает требуемыми свойствами.

*Замечание 1.* Если бы за $\nu(r)$ взяли

$$\nu(r) = [\varepsilon r M'(r, g)/M(r, g)] - c, \ 0 < \varepsilon < \infty,$$

то получили бы пример с $\beta(\infty, f) \geqslant 1/(1 + \varepsilon)$. Несколько усложнив пример, могли бы получить оценку $\beta(\infty, f) \geqslant 1$. Для этого достаточно взять вместо постоянного $\varepsilon$ монотонно стремящуюся к нулю функцию $\varepsilon(r) > 0$ такую, что $\varepsilon(r) rM'(r, g)/M(r, g)$ не убывает и для некоторой последовательности $r_k \to \infty$, на которой $T(r_k, g) = 0(\ln M(r_k, g))$, выполняется $\varepsilon(r_k) \geqslant (T(r_k, g)/\ln M(r_k, g))^{1/2}$. Нетрудно убедиться, что такой выбор $\varepsilon(r)$ всегда возможен.

*Замечание 2.* Пусть $\pi(z)$ — каноническое произведение Вейерштрасса, построенное по нулям $(-a_k)$, $G(z) = (f(z)\pi(z),\ z^{p-2}\pi(z);\ z^{p-3}\pi(z), \ldots, \pi(z))$ — $p$-мерная целая кривая; $p \geqslant 2$, $b_k$ — $p$-мерный вектор, у которого $k$-я компонента равна 1, а остальные — нулю. Нетрудно посчитать, что $T(r, G) = T(r, f) + 0(\ln r)$; $m(r, b_k, G) = m(r, f) + 0(\ln r)$; $L(r, b_k, G) = \ln M(r, f) + 0(\ln r)$; $\delta(b_k, G) = \delta(\infty, f) = 0$, $\beta(b_k, G) = \beta(\infty, f) > 0$, $k = 2, \ldots, p$, порядок $G(z)$ равен $\rho$ (определения и обозначения см. [5]). Если воспользоваться замечанием 1, то будем иметь пример с $\beta(b_k, G) \geqslant 1$, $k = 2, \ldots, p$. В случае $\rho = 0$ согласно одной теореме В. П. Петренко [6] имеем $\sum\limits_{k=1}^{p} \beta(b_k, G) \leqslant p - 1$. Следовательно, $\beta(b_1, G) = 0$; $\beta(b_k, G) = 1$, $2 \leqslant k \leqslant p$ и $\delta(\beta_k, G) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant p$.

*Замечание 3.* А. Ф. Гришин [3] сравнивал не только $\delta(\infty, f)$ и $\beta(\infty, f)$, но рассматривал более общую задачу о сравнении $\delta_p(\infty, f)$ и $\delta_q(\infty, f)$, $1 \leqslant q < p \leqslant \infty$ (определения см. в [3]). Так как $m_p(r, f)$ — выпуклая функция относительно $\ln r$, то можно применить использованный нами прием и заметно упростить рассуждения А. Ф. Гришина, поскольку нам требуется только свойство, указанное в замечании 1 [3, с. 65].

3. Известно, что для целых функций $f$ конечного нижнего порядка $\lambda$ справедливо

$$\varlimsup_{r\to\infty} l(r, f) \geqslant \min\left(\frac{\pi}{\lambda},\ 2\pi\right)$$

и эта оценка достигается (см. например, в [1, с. 233] более сильный результат, принадлежащий Ариме). Здесь будут построены целые функции порядка $\rho$, $^1/_2 < \rho < \infty$, для которых выполняется (1). При $0 \leqslant \rho \leqslant {}^1/_2$ вопрос о существовании таких функций остается открытым. Очевидно, из (1) следует (2), поэтому наше построение, существенно использующее одну теорему П. М. Тамразова [7] о конформных отображениях полуполос, дает новый подход к конструкции примеров типа Пэйли.

Пусть сначала $^1/_2 < \rho \leqslant 1$. Воспользуемся теоремой П. М. Тамразова [7], которую сформулируем в удобной для нас форме.

**Теорема.** *Пусть заданы две последовательности положительных чисел* $(c_n)$, $0 < c_n < \pi$, $c_n \to 0$ *и* $(a_n)$, $a_n < a_{n+1}$, $a_n \to \infty$, *такие, что*

$$\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{\pi}{c_n} = 0(a_n),\ n \to \infty. \tag{3}$$

*Пусть* $(\zeta=\xi+i\eta,\ \omega=\tau+i\sigma)$; $D=\{\zeta:\xi>0,\ |\eta|<\pi\}\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\xi=a_n,\ c_n\leqslant|\eta|<\pi\}$; $\Delta=\{\omega:\tau>0,\ |\sigma|<\pi\}$. *Предположим, что функция* $\omega=\omega(\zeta)$ *конформно и однолистно отображает* $D$ *на* $\Delta$, $\omega(\pm\pi i)=\pi i$, $\omega(\infty)=\infty$. *Тогда*

$$\lim_{\zeta\to\infty}\frac{\operatorname{Re}\omega(\zeta)}{\operatorname{Re}\zeta}=1. \tag{4}$$

Очевидно, функцию $\omega(\zeta)$ можно по принципу симметрии аналитически продолжить через интервал $(-\pi i,\ \pi i)$. Обозначим $\Delta_q=\{\omega:|\sigma|<q\}$, $0<q<\pi$, $D_q=\omega^{-1}(\Delta q)$. Пусть $D^n=\{\zeta:|\eta|<<\pi\}\setminus\{\zeta:\xi=0,\ c_n\leqslant|\eta|<\pi\}$, $\omega_n(\zeta)$ — конформное однолистное отображение $D^n$ на $\{\omega:|\sigma|<\pi\}$, $\omega_n(\pm\infty)=\pm\infty$, $\omega_n(0)=0$. (Для $\omega_n(\zeta)$ можно записать явное выражение $\omega_n(\zeta)=2\operatorname{arsh}\left\{\left(\operatorname{sh}\frac{\zeta}{2}\right)\Big/\left(\operatorname{sh}\frac{c_n}{2}\right)\right\}$, но оно нам не потребуется). Обозначим через $D_q^n$ область $D_q^n=\overset{-1}{\omega_n}(\Delta_q)$, а через $D_q(n)$ образ $D_q^n$ при отображении $\zeta\to\zeta+a_n$. Нетрудно убедиться, что

$$D_q\cap D\subset D_q^0=D\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}D_q(n)\subset\Delta_q\cap D.$$

Выберем некоторое $\alpha$, $\pi>\alpha>\pi/(2\rho)$. Обозначим через $\Gamma$ границу $D_\alpha^0$, проходимую в отрицательном направлении, а через $\gamma$ — образ $\Gamma$ при отображении $z=\exp\zeta$. Пусть $E$, $E_\alpha$, $E_{\pi/2}$ — образы соответственно $D$, $D_\alpha^0$, $D_{\pi/2}^0$ при том же отображении $z=\exp\zeta$. Легко видеть, что расстояние $\Gamma$ до $D_{\pi/2}^0$ и до границы $D$ без интервала $(-\pi i,\ \pi i)$ зависит только от выбора $c_n$, но не от выбора $a_n$. Поэтому последовательность $(a_n)$ можно выбрать столь быстро возрастающей, чтобы помимо (3) выполнялось требование: расстояния от $\gamma$ до $E_{\pi/2}$ и до $\partial E\cap\{z:|z|>1\}$ были положительными числами.

Определим в дополнении к $\overline{E}_\alpha$ аналитическую функцию $g(z)$ интегралом типа Коши:

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\psi(z')}{z'-z}\,dz',\quad z\overline{\in}\overline{E}_\alpha, \tag{5}$$

где $\psi(z)=\exp\exp(\rho\omega(\ln z))$ — аналитическая функция в $E$ и на дуге $\{z:|z|=1,\ |\arg z|<\pi\}$. При $z\in\gamma$ имеем $|\operatorname{Im}\omega(\ln z)\geqslant\alpha$ и $|\psi(z)|=\exp\{\exp(\rho\operatorname{Re}\omega(\ln z))\cos(\rho\operatorname{Im}\omega(\ln z))\}\leqslant\exp\{\exp(\rho\operatorname{Re}\omega\times\times(\ln z))\cos(\alpha\rho)\}=\exp\{|z|^{\rho+0(1)}\cos(\alpha\rho)\}$ в силу (4). Так как $\pi>\alpha\rho>\pi/2$, то $\cos(\alpha\rho)<0$, и поскольку длина $\gamma\cap\{z:|z|<<r\}=0(r)$, $r\to\infty$, то интеграл (5) абсолютно сходится. Обычными приемами (ср. [8, с. 54—55]; [1, с. 242—243]) получаем,

что $g(z)$ аналитически продолжается как целая функция на конечную $z$-плоскость и для нее справедливы соотношения

$$g(z)=\begin{cases}0(1), & z\bar{\in}E\alpha,\\ 0(1)+\psi(z), & z\in E_{\alpha}.\end{cases}$$

Используя (4), легко получаем, что $\ln|\psi(z)|\leqslant|z|^{\rho+0(1)}$ при $z\in E_{\alpha}$, $z\to\infty$ и $\ln|\psi(r)|=r^{\rho+0(1)}$, $r\to\infty$. Поэтому $\ln M(r,g)=r^{\rho+0(1)}$ и целая функция $g(z)$ имеет порядок $\rho$. Но дуги $C_n=\{z:|z|=e^{a_n},\ c_n\leqslant|\arg z|\leqslant\pi\}$ лежат в дополнении к $E_{\alpha}$, поэтому на них модуль $|g(z)|$ равномерно ограничен. Не уменьшая общности, можно считать, что на $C_n$ выполняется $|g(z)|\leqslant 1$ (этого всегда можно добиться, умножив $g(z)$ на достаточно малую положительную постоянную). Тогда $l(e^{a_n},g)\leqslant 2c_n\to 0$ при $n\to\infty$, т. е. выполняется (1). Рассматривая функции $g(z^n)$, $n=1,2,\ldots$, получаем примеры целых функций, для которых выполняется (1), с любым заданным порядком $\rho$, $1/2<\rho<\infty$.

*Замечание 4.* Если известна целая функция $g$ со свойством (1), то так же, как в п. 2, можно взять мероморфную функцию $h(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k/(z-z_k)$ такую, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|A_k/z_k|<\infty$, $n(r,\ h)=\nu(r)$ и $h(z)$ равномерно ограничена на множестве $\{z:g(z)=M(|z|,g)\}$. Тогда все рассуждения п. 2 можно повторить, причем соотношение $m(r,h)=0(1)$ при $r\to\infty$ получаем с помощью теоремы М. В. Келдыша [1, с. 327], так что снова приходим к примеру мероморфной функции $f$ с $\delta(\infty,f)=0$, $\beta(\infty,f)>0$.

Благодарю А. Ф. Гришина и В. П. Петренко за полезное обсуждение заметки. Выражаю глубокую признательность П. М. Тамразову, который по моей просьбе доказал цитируемую в п. 3 теорему, играющую ключевую роль в рассуждениях второй половины заметки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука«, 1970. 592 с.
2. Петренко В. П. Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка.— «Изв. АН СССР, сер. мат.», 1969, т. 33, № 2, с. 414—454.
3. Гришин А. Ф. О сравнении дефектов $\delta_p(a)$.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 25. Харьков. 1976, с. 56—66.
4. Paley R. E. A. C. A note of integral functions.— «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1932, vol. 28, p. 262—265.
5. Петренко В. П., Хуссайн М. О росте целых кривых.— «Изв. АН СССР, сер. мат.», 1973, т. 37, № 2, с. 446—477.
6. Петренко В. П. О величинах отклонений целых кривых нижнего порядка $\lambda<1$.— ДАН СССР, 1972, т. 207, № 3, с. 538—540.
7. Тамразов П. М. Об искажении при конформном отображении криволинейных полуполос.— Сб. «Конф. Томск. ун-та. Тезисы», 1975, с. 36—37.
8. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М., ГИТТЛ, 1957. 160 с.

*Поступила 22 марта 1976 г.*