УДК 517.53

М. А. ГИРНЫК

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЛИНДЕЛЕФА О ТИПЕ КАНОНИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Будем без пояснений пользоваться стандартными обозначениями теории распределения значений (см., например, [1]). Кроме того, для функций, мероморфных в единичном круге $U=\{z:|z|<1\}$, введем характеристику

$$N_0(r,\ 0,\ f)=\int_0^r n(t,\ 0,\ f)\,dt.$$

Если $N(r,\ 0,\ f)\to\infty$ при $r\to 1$, то

$$N_0(r,\ 0,\ f)\sim N(r,\ 0,\ f),\ (r\to 1)$$

и, следовательно, категории роста этих функций совпадают. Будем обозначать через $E(u,\ p)$ первичный множитель Вейерштрасса рода p.

Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{a_n\}$ такая, что:

1) $0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\cdots\leqslant|a_n|\leqslant\cdots<1$,

2) существует целое число p (род последовательности) такое, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)^p=\infty;\ \sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)^{p+1}<\infty.$$

Тогда каноническое произведение

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\bar{a}_n z},\ p\right) \tag{1}$$

абсолютно и равномерно сходится внутри круга U (здесь и везде далее сходимость произведения понимается как сходимость некоторого его остатка), а $f(z)$ — аналитическая функция в круге U с нулями в точках a_n и только в них. Если $p=0$, то $f(z)$ лишь постоянным множителем отличается от произведения Бляшке. При $p\geqslant 1$ произведение (1) является частным случаем произведений, которые рассматривал М. М. Джрбашян [2], изучая проблему факторизации мероморфных функций. Связь между ростом $T(r,\ f)$ и $N(r,\ 0,\ f)$ произведений (1) изучали А. Г. Нафталевич [3, 4] и Цудзи [5].

Напомним некоторые определения. Пусть $g(z)$ — функция, мероморфная в U. Тогда ее порядок $\rho(g)$ определяется следующим образом:

$$\rho[g]=\rho[T(r,\ g)]=\overline{\lim_{r\to 1}}\ln T(r,\ g)\{-\ln(1-r)\}^{-1}.$$

Если $\rho = \rho[g] < \infty$, то величина типа $\sigma[g]$ функции $g(z)$ определяется так:

$$\sigma[g] = \sigma[T(r, g)] = \overline{\lim_{r\to 1}} T(r, g)(1-r)^{\rho}.$$

А. Г. Нафталевичем [4] была доказана следующая

Теорема 1. *Пусть* $f(z)$ — *каноническое произведение* (1) *рода* $p > 0$. *Тогда*

$$p - 1 \leqslant \rho[f] = \rho[N(r, 0, f)] \leqslant p$$

и типы функций $T(r, f)$ и $N(r, 0, f)$ *совпадают**.

Эта теорема показывает различие между каноническими произведениями (1) и классическими произведениями Вейерштрасса: произведения Вейерштрасса в случае целого порядка могут иметь более высокий тип, чем функция нулей $N(r, 0)$, что следует из известной теоремы Линделефа [1, с. 85]. В этой статье мы покажем, что какой-то аналог теоремы Линделефа можно сформулировать и для канонических произведений (1), если величины типов $f(z)$ и $N(r, 0, f)$ измерять относительно уточненного порядка $\rho(r)$ для $[0, 1)$ (его определение [6] мы напомним ниже), т. е. считать их равными

$$\Delta_f = \overline{\lim_{r\to 1}} T(r, f)(1-r)^{\rho(r)};$$

$$\Delta_N = \overline{\lim_{r\to 1}} N(r, 0)(1-r)^{\rho(r)}.$$

Оказывается, что при $\rho = p$, когда необходимо $\sigma[f] = \sigma[N] = 0$, функция $f(z)$ может иметь более высокий тип относительно $\rho(r)$, чем $N(r, 0)$.

Переходим к точным формулировкам результатов статьи. Функция $\rho(r) \in C^1[0, 1)$ называется уточненным порядком для интервала $[0, 1)$, если:

$$1)\ \rho(r) \geqslant 0;\ 2)\ \lim_{r\to 1} \rho(r) = \rho,\ 0 \leqslant \rho < \infty;$$

$$3)\ \lim_{r\to 1} \rho'(r)(1-r)\ln(1-r) = 0.$$

Заметим, что функция $\rho_1(x) = \rho(1 - x^{-1})\ (x \geqslant 1)$ является обычным уточненным порядком.

Теорема 2. *Пусть* $f(z)$ — *каноническое произведение* (1) *рода* $p > 0$ *и* $p - 1 \leqslant \rho[f] < p$. *Тогда типы* $T(r, f)$ *и* $N(r, 0, f)$ *относительно любого уточненного порядка* $\rho(r) \to \rho[f]$ $(r \to 1)$ *совпадают.*

Если же $\rho[f] = p$, то имеет место аналог теоремы Линделефа.

Теорема 3. *Пусть* $f(z)$ — *каноническое произведение* (1) *рода* $p > 0$, $\rho[f] = p$ *и* $\rho(r)$ — *некоторый уточненный порядок для*

* Первая часть теоремы 1 была независимо доказана Цудзи М. [5].

$[0, 1)$, $\rho(r) \to \rho[f]$. *Обозначим*

$$\Delta_K = \overline{\lim_{r\to 1}} K(r)(1-r)^{\rho(r)},$$

где

$$K(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}^+ \left\{-\frac{1}{p+1}\sum_{|a_n|>r}\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a}_n re^{i\varphi}}\right)^{p+1}\right\} d\varphi,$$

$$\Omega = \max(\Delta_N, \Delta_K).$$

Тогда функция $f(z)$ имеет минимальный, нормальный или максимальный тип относительно $\rho(r)$ в зависимости от того, будет ли соответственно $\Omega = 0$, $0 < \Omega < \infty$ или $\Omega = \infty$.

Здесь будет приведено лишь доказательство теоремы 3, так как доказательство теоремы 2 несколько проще и проводится примерно тем же методом. Затем будут указаны примеры функций, удовлетворяющих условиям теоремы 3, таких, что: 1) $\Delta_K = \infty > \Delta_N$; 2) $\Delta_N > \Delta_K = 0$.

Доказательство теоремы 3.

Если $\Delta_N = \infty$, то доказательство тривиально, поэтому далее считаем, что $\Delta_N < \infty$. Представим функцию $f(z)$ в виде $f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z)$, где $(|z| = r)$:

$$f_1(z) = \exp\left\{-\frac{1}{p+1}\sum_{|a_n|>r}\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a}_n z}\right)^{p+1}\right\};$$

$$f_2(z) = \prod_{|a_n|\leqslant r} E\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a}_n z}, p\right)\prod_{|a_n|>r} E\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a}_n z}, p+1\right).$$

По определению $T(r, f_1) = K(r)$, поэтому

$$|T(r, f) - K(r)| = |T(r, f) - T(r, f_1)| \leqslant T(r, f_2) + O(1) \quad (r \to 1). \tag{2}$$

Оценим $T(r, f_2)$. Будем обозначать через A постоянные (вообще говоря, разные), зависящие только от $\rho[f]$. Используя известную оценку

$$\ln^+|E(u, p)| < C(p)|u|^{p+1},$$

запишем

$$\ln^+|f_2(z)| \leqslant A\left\{\sum_{|a_n|\leqslant r}\left|\frac{1-|a_n|}{1-\overline{a}_n z}\right|^{p+1} + \sum_{|a_n|>r}\left|\frac{1-|a_n|^2}{1-\overline{a}_n z}\right|^{p+2}\right\}.$$

Пусть $a_n = |a_n| e^{i\theta_n}$, $z = re^{i\varphi}$. Учитывая, что (см. [5])

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{|1-\lambda e^{i\psi}|^{k+1}} = O((1-\lambda)^{-k}) \quad (k > 0, \lambda \to 1),$$

а также что $n(r, 0)(1-r)^{p+1} \to 0$ при $r \to 1$ (последнее следует из условия 2, наложенного на $\{a_n\}$), получаем

$$T(r, f_2) \leqslant A\left\{\sum_{|a_n|\leqslant r} \int_0^{2\pi} \frac{(1-|a_n|)^{p+1}\,d\varphi}{|1-|a_n|re^{i(\varphi-\theta_n)}|^{p+1}} + \right.$$

$$+\left.\sum_{|a_n|>r} \int_0^{2\pi} \frac{(1-|a_n|)^{p+2}\,d\varphi}{|1-|a_n|re^{i(\varphi-\theta_n)}|^{p+2}}\right\} = A\left\{\sum_{|a_n|\leqslant r} \int_0^{2\pi} \frac{(1-|a_n|)^{p+1}\,d\varphi}{|1-|a_n|re^{i\varphi}|^{p+1}} + \right.$$

$$+\left.\sum_{|a_n|>r} \int_0^{2\pi} \frac{(1-|a_n|)^{p+2}\,d\varphi}{|1-|a_n|re^{i\varphi}|^{p+2}}\right\} \leqslant A\left\{\sum_{|a_n|\leqslant r} \frac{(1-|a_n|)^{p+1}}{(1-|a_n|r)^{p}} + \right.$$

$$+\left.\sum_{|a_n|>r} \frac{(1-|a_n|)^{p+2}}{(1-|a_n|r)^{p+1}}\right\} \leqslant A\left\{\sum_{|a_n|\leqslant r} (1-|a_n|) + \right.$$

$$+\left.\sum_{|a_n|>r} (1-|a_n|)^{p+2}(1-r)^{-p-1}\right\} =$$

$$= A\left\{\int_0^r (1-t)\,dn(t, 0) + (1-r)^{-p-1}\int_r^1 (1-t)^{p+2}\,dn(t, 0)\right\} =$$

$$= A\left\{N_0(r, 0) + (1-r)^{-p-1}(p+2)\int_r^1 (1-t)^{p+1} n(t, 0)\,dt\right\}.$$

Воспользуемся результатом Б. О. Гыжи [6]: если $\Delta_N < \infty$, то при r, достаточно близких к 1, справедливо неравенство

$$n(r, 0) < A(\Delta_N + \varepsilon)(1-r)^{-\rho(r)-1}.$$

Отсюда следует, что при r, достаточно близких к 1,

$$T(r, f_2) \leqslant A(\Delta_N + \varepsilon)\left\{(1-r)^{-\rho(r)} + \right.$$

$$\left. + (1-r)^{-p-1}\int_r^1 (1-t)^{p-\rho(t)}\,dt\right\}.$$

Произведя замену $x = (1-t)^{-1}$ и воспользовавшись известными свойствами уточненного порядка, получаем, что

$$\int_r^1 (1-t)^{p-\rho(t)}\,dt = \int_{(1-r)^{-1}}^{\infty} x^{\rho_1(x)-p-2}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant A(1-r)^{p+1-\rho_1\left(\frac{1}{1-r}\right)} = A(1-r)^{-\rho(r)+p+1}.$$

Таким образом, при $r(\varepsilon) < r < 1$

$$T(r, f_2) \leqslant A(\Delta_N + \varepsilon)(1-r)^{-\rho(r)}. \quad (3)$$

Из неравенства (2) и оценки (3) следует утверждение теоремы (ср. [1, с. 85].

Пример 1. Пусть $f_0(z)$ — каноническое произведение (1) рода $p>0$ с положительными нулями такими, что

$$n(r, 0) \sim \Delta (1-r)^{-\rho(r)-1}; \quad 0<\Delta<\infty,$$

$\rho(r) \to p\ (r \to 1)$ — некоторый уточненный порядок для $[0, 1)$, причем

$$\int_0^1 (1-t)^{-\rho(t)-1+p}\,dt < \infty.$$

Тогда

$$\ln|f_0(z)| = \operatorname{Re}\left\{-\Delta 2^{p+1}(1-z)^{-p-1}\int_{1-|1-z|}^{1}(1-t)^{p-\rho(t)-1}\,dt\right\} + \\ + 0\left(|1-z|^{-p-1}\int_{1-|1-z|}^{1}(1-t)^{p-\rho(t)-1}\,dt\right) \tag{4}$$

при $z \to 1$ для всех z, не принадлежащих некоторой системе кругов:

$$C=\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j; \quad C_j=\{z:|z-z_j|<r_j\}$$

такой, что при $r \to 1$

$$\sum_{j:|1-z_j|<1-r} r_j = 0(1-r).$$

Обозначим

$$(1-r)^{-\rho_0(r)} = (1-r)^{-p}\int_r^1 (1-t)^{p-\rho(t)-1}\,dt.$$

Легко проверить (ср. [1, с. 109]), что $\rho_0(r)$ является уточненным порядком для $[0, 1)$:

$$\rho_0(r) \to p; \quad (1-r)^{-p} = 0((1-r)^{-\rho_0(r)}),$$
$$(1-r)^{-\rho(r)} = 0((1-r)^{-\rho_0(r)}) \ (r \to 1).$$

Оценивая $T(r, f_0)$, как при доказательстве теоремы 3, получаем, что

$$T(r, f_0) \leqslant A\left\{N_0(r, 0) + (p+1)\,(1-r)^{-p} \times \right.$$
$$\left. \times \int_r^1 (1-t)^p n(t, 0)\,dt\right\} \leqslant 2A\Delta\,\{(1-r)^{-\rho(r)} +$$
$$+ (p+1)(1-r)^{-\rho_0(r)}\} \leqslant A\Delta\,(1-r)^{-\rho_0(r)}$$

при r, достаточно близких к 1.

Оценим теперь $T(r, f_0)$ снизу. Нетрудно видеть, что

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}^+\{-(1-re^{i\varphi})^{-p-1}\}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} |1-re^{i\varphi}|^{-p-1} \times$$

$$\times \cos^{-}\{(p+1)\arg(1-re^{i\varphi})\}\,d\varphi \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\psi_1(r)}^{\psi_2(r)} \frac{1}{2}\,|1-re^{i\varphi}|^{-p-1}\,d\varphi \geqslant \frac{1}{2}\,|1-re^{i\psi_2(r)}|^{-p-1}\times$$

$$\times\{\psi_2(r)-\psi_1(r)\} \sim \frac{1}{2}(1-r)^{-p-1}\left|\cos\frac{5\pi}{4}\right|^{-p-1}\times$$

$$\times\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4(p+1)}-\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4(p+1)}\right)(1-r)$$

при $r\to 1$, где $(j=1, 2)$;

$$\psi_j(r)=\arcsin\left\{\frac{\sin\alpha_j}{r}\right\}-\alpha_j;\quad \alpha_1=\frac{3\pi}{4(p+1)};\quad \alpha_2=\frac{5\pi}{4(p+1)}.$$

Отсюда и из асимптотического равенства (3) следует, что для всех r, достаточно близких к 1 и не принадлежащих некоторому множеству $E\subset[0, 1)$ такому, что

$$\lim_{t\to 1}\frac{\operatorname{mes}\{E\cap[t, 1)\}}{1-t}=0,$$

выполняются неравенства

$$A_1\Delta(1-r)^{-\rho_0(r)}<T(r, f_0)<A_2\Delta(1-r)^{-\rho_0(r)},$$

где A_1 и A_2 $(0<A_1<A_2<\infty)$ — константы, зависящие только от p. В силу монотонности характеристики $T(r, f_0)$ эти неравенства (с другими A_1 и A_2) остаются в силе для всех значений r, достаточно близких к 1. Поскольку $N(r, 0)\sim\frac{\Delta}{p}(1-r)^{-\rho(r)}$, то $\Delta_f=\infty>\Delta_N$.

Пример 2. Пусть $r_n=1-n^{-1}2^{-n/2}$, $n=1, 2, \ldots$ Обозначим через $\{a_k\}$ последовательность точек вида $r_ne^{\frac{2\pi ij}{2^n}}$ $(j=0, 1, \ldots, 2^n-1)$, пронумерованных в порядке неубывания их модулей. Из того, что $(1-r_n)^2 2^n=n^{-2}$, следует, что род этой последовательности равен 1.

Рассмотрим каноническое произведение (1) рода 1 с нулями в точках a_k.

Исследуем асимптотическое поведение при $r=|z|\to 1$ функции

$$\ln f_1(z)=-\frac{1}{2}\sum_{|a_k|>r}\left(\frac{1-|a_k|^2}{1-\bar{a}_kz}\right)^2.$$

Пусть

$$r_{n_0-1}\leqslant|z|=r<r_{n_0}. \tag{5}$$

Обозначим через $\nu(t)$ считающую функцию для последовательности точек $a_{kn}=r_n>0$. Легко видеть, что $\nu(t)=0\left(\ln\frac{1}{1-t}\right)\times$

$\times (t \to 1)$. Имеет место следующее представление для функции $\left(j = 0, 1, \ldots, 2^{n_0} - 1, \ \theta_j = \frac{2\pi j}{2^{n_0}}\right)$:

$$\ln f_{j, n_0}(z) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{|a_k| \geq r n_0 \\ \arg a_k = \theta_j}} \left(\frac{1 - |a_k|^2}{1 - \bar{a}_k z}\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_r^1 \frac{(1 - t^2)^2}{(1 - te^{-i\theta_j} z)^2} d[\nu(t) - \nu(r)] =$$

$$= \int_r^1 \frac{(1 - t^2)(t^2 z e^{-i\theta_j} - 2t + z e^{-i\theta_j})}{(1 - tze^{-i\theta_j})^3} [\nu(t) - \nu(r)] \, dt.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\ln f_{n_0}(z) = \sum_{j=0}^{2^{n_0} - 1} \ln f_{j, n_0}(z) = \frac{2^{n_0}}{2\pi} \int_r^1 (1 - t^2)[\nu(t) - \nu(r)] \times$$

$$\times \left\{ \sum_{j=0}^{2n_0 - 1} \frac{t^2 z e^{-i\theta_j} - 2t + z e^{-i\theta_j}}{(1 - tze^{-i\theta_j})^3} \frac{2\pi}{2^{n_0}} \right\} dt =$$

$$= \frac{2^{n_0}}{2\pi} \int_r^1 (1 - t^2)[\nu(t) - \nu(r)] \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{t^2 z e^{-i\theta} - 2t + z e^{-i\theta}}{(1 - tze^{-i\theta})^3} d\theta + R_{n_0}(t, z) \right\} dt =$$

$$= -2^{n_0 + 1} \int_r^1 (1 - t^2) t [\nu(t) - \nu(r)] \, dt +$$

$$+ \frac{2^{n_0}}{2\pi} \int_r^1 (1 - t^2) R_{n_0}(t, z) [\nu(t) - \nu(r)] \, dt.$$

Выше мы перешли от интегральной суммы к интегралу по θ, который равен $-4t\pi$ согласно теореме о среднем. Остаточный член формулы прямоугольников для комплекснозначной функции оценивается следующим образом (см. [7, п. 325]):

$$|R_{n_0}(t, z)| \leq \frac{2(2\pi)^3}{24 \, 2^{2n_0}} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left| \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left\{ \frac{t^2 z e^{-i\theta} - 2t + z e^{-i\theta}}{(1 - tze^{-i\theta})^3} \right\} \right|.$$

Поскольку

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left\{\frac{t^2ze^{-i\theta}-2t+ze^{-i\theta}}{(1-tze^{-i\theta})^3}\right\}\right|=\left|6tze^{i\theta}\left\{\frac{1+t^2}{(1-tze^{-i\theta})^4}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2(1-t^2)}{(1-tze^{-i\theta})^5}\right\}\right|\leqslant 6\left\{\frac{2}{(1-r)^4}+\frac{4}{(1-r)^4}\right\}=\frac{36}{(1-r)^4},$$

то

$$|\tilde{R}_{n_0}(r)|=\left|\frac{2^{n_0}}{2\pi}\int_r^1(1-t^2)R_{n_0}(t,z)\times[\nu(t)-\nu(r)]\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant 3(2\pi)^2 2^{-n_0}(1-r)^{-4}\int_r^1(1-t^2)[\nu(t)-\nu(r)]\,dt\leqslant 3(2\pi)^2 2^{-n_0}\times$$

$$\times(1-r_{n_0})^{-4}\int_r^1(1-t^2)[\nu(t)-\nu(r)]\,dt\leqslant 3(2\pi)^2\times$$

$$\times 2^{n_0}n_0^4\int_r^1(1-t^2)[\nu(t)-\nu(r)]\,dt.$$

Если $n>n_0$, то, пользуясь аналогичными рассуждениями, показываем, что

$$\ln f_n(z)=\sum_{m=1}^{2^{n-1}}\ln f_{2m-1,n}(z)=$$

$$=\sum_{m=1}^{2^{n-1}}\sum_{\substack{|a_k|\geqslant r_n\\ \arg a_k=\frac{2\pi(2m-1)}{2^n}}}\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1-|a_k|^2}{1-\bar{a}_kz}\right)^2\right\}=$$

$$=-2^n\int_{r_n}^1(1-t^2)\,t\,[\nu(t)-\nu(r_{n-1})]\,dt+\tilde{R}_n(r),$$

где

$$|\tilde{R}_n(r)|<3(2\pi)^2 2^{-n}(1-r)^{-4}\int_{r_n}^1(1-t^2)[\nu(t)-\nu(r_{n-1})]\,dt<$$

$$<3(2\pi)^2 2^{-n}2^{2n_0}n_0^4\int_{r_n}^1(1-t^2)[\nu(t)-\nu(r_{n-1})]\,dt.$$

Отсюда

$$\ln|f_n(z)|\leqslant\{-2^nr_n+3(2\pi)^2 2^{-n}2^{2n_0}n_0^4\}\times$$

$$\times\int_{r_n}^1(1-t^2)[\nu(t)-\nu(r_{n-1})]\,dt.$$

При достаточно большом n_0 и $n \geqslant 2n_0 + 1$ выражение в фигурных скобках меньше нуля. Поэтому

$$\ln|f_1(z)| = \sum_{n=n_0}^{\infty} \ln|f_n(z)| \leqslant \sum_{n=n_0}^{2n_0} |\tilde{R}_n(r)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=n_0}^{2n_0} \left\{3(2\pi)^2 2^{2n_0} n_0^4 2^{-n+1} \int_{r_{n_0}}^{1} (1-t^2)[\nu(t)-\nu(r)]\,dt\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 240 \cdot 2^{n_0} n_0^5 \times \int_{r_{n_0}}^{1} (1-t_2)\,t\,[\nu(t)-\nu(r)]\,dt = 240 \cdot 2^{n_0} n_0^5 \times$$

$$\times \frac{1}{4} \int_{r_{n_0}}^{1} (1-t^2)^2\, d[\nu(t)-\nu(r)] = 60 \cdot 2^{n_0} n_0^5 \sum_{n=n_0}^{\infty} (1-r_n^2)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 240 \cdot 2^{n_0} n_0^5 \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} n^{-2} < 480 \cdot 2^{n_0} n_0^5 2^{-n_0} n_0^{-2} = 0(n_0^3) =$$

$$= 0\left(\ln^3 \frac{1}{1-r}\right), \quad r \to 1.$$

Здесь мы использовали (5). Возьмем $\rho(r)$ — уточненный порядок для $N(r, 0)$. Поскольку $\rho[N(r, 0)] = 1$, то $\Delta_K = 0$, $\Delta_N = 1$. Аналогичный пример можно построить для любого натурального p.

Выражаю глубокую благодарность А. А. Гольдбергу за помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970. 591 с.
2. Джрбашян М. М. К проблеме представимости аналитических функций.— «Сообщ. ин-та мат. и мех. АН Арм. ССР», 1948, т. 2, с. 3—40.
3. Нафталевич А. Г. Об интерполировании функций, мероморфных в единичном круге.— ДАН СССР, 1953, т. 88, № 2, с. 205—208.
4. Нафталевич А. Г. Об интерполировании функций, мероморфных в единичном круге.— «Лит. мат. сб.», 1961, т. 1, № 1—2, с. 159—180.
5. Tsuji M. Canonical product for a meromorphic function in a unit circle.— «J. Math. Sos. Jap.», 1956, vol. 8, № 1, p. 7—21.
6. Гижа Б. О. Деякі нерівності для зростаючих опуклих відносно логарифма функцій.— ДАН УРСР, серія А, 1973, № 4, с. 296—298.
7. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М., «Наука», 1970. 440 с.

Поступила 16 марта 1974 г.