УДК 517.535.4

Б. Н. ГИНЗБУРГ

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть $\varphi(r) > 0$ — неубывающая функция от $r > 0$. Назовем гиперповерхностью сопряженных φ-порядков целой функции $f(z)$, $z \in C^n$ границу множества тех значений $a \in R^n$, для которых выполняется асимптотическое неравенство

$$\ln M(r_1, \ldots, r_n) < [\varphi(r_1)]^{a_1} + \ldots + [\varphi(r_n)]^{a_n}.$$

Л. И. Ронкиным [2] была полностью изучена структура гиперповерхностей сопряженных порядков, т. е. случай, когда $\varphi(r)$ — степенная функция. Им была доказана

Теорема [2, гл. 3, § 1]. *Для того чтобы гиперповерхность $S \in R^n$, являющаяся границей некоторой области $B \subset R^n$, была гиперповерхностью сопряженных порядков хотя бы одной целой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы образ B^{-1} области B при отображении $a'_i = \frac{1}{a_j}$, $j = 1, \ldots, n$ был полной выпуклой областью.*

В работе [4] нами было введено понятие гиперповерхности сопряженных логарифмических порядков ($\varphi(r) = \ln^a r$) и показано, что такая гиперповерхность (в отличие от гиперповерхности сопряженных порядков) обязана являться границей некоторого гипероктанта.

Возникает вопрос, какими свойствами характеризуется гиперповерхность φ-порядков, когда $\varphi(r)$ растет быстрее любой степени логарифмической функции.

Настоящая работа посвящена изучению этого вопроса.

Обозначим через W класс функций $\Phi(r) = \Phi(r_1, \ldots, r_n)$, определенных при $r_1 > 0, \ldots, r_n > 0$ и таких, что функция $\Phi(r) \in W$ является монотонно неубывающей по каждой из переменных и выпуклой относительно $\ln r_1, \ldots, \ln r_n$. Функция $\ln^+ M(r_1, \ldots, r_n)$ принадлежит этому классу.

Пусть D_ρ — множество точек $a \in R^n$, для которых выполняется асимптотическое неравенство

$$\Phi(r) < e^{a_1 (\ln r_1)^{\alpha(\ln r_1)}} + \ldots + e^{a_n (\ln r_n)^{\alpha(\ln r_n)}},$$

где $\alpha(r)$ — уточненный порядок. Границу $dD_\rho = S_\rho$ назовем гиперповерхностью α-порядков функции $\Phi(r)$.

Положим

$$\bar{\rho}_j = \overline{\lim_{r_j \to \infty}} \frac{\ln \Phi(r)}{(\ln r_j)^{\alpha(\ln r_j)}}. \tag{1}$$

Лемма 1. *Величина $\bar{\rho}_j$ не зависит от выбора r_i, $i \neq j$.*

Доказательство. Заметим, что из свойств уточненного порядка [1, с. 49] следует, что для любого $\delta > 0$ при $r > r_\delta(k)$ выполняется

$$(kr)^{\alpha(rk)} < (1+\delta) k^\alpha r^{\alpha(r)}; \ \forall k > 0, \tag{2}$$

где $\alpha = \lim\limits_{r \to \infty} \alpha(r)$. Достаточно доказать утверждение леммы при $j = n$. Обозначим

$$\bar{\rho}(r_1, \ldots, r_{n-1}) = \overline{\lim_{r_n \to \infty}} \frac{\ln \Phi(r)}{(\ln r_n)^{\alpha(\ln r_n)}}.$$

Очевидно, что при любом $\varepsilon > 0$ и всех $r_1 > 0, \ldots, r_n > 0$ справедливо неравенство

$$\Phi(r) < C_\varepsilon(r_1, \ldots, r_{n-1}) + e^{[\bar{\rho}_n(r_1, \ldots r_{n-1}) + \varepsilon](\ln r_n)^{\alpha(\ln r_n)}}$$

с некоторой функцией $C_\varepsilon(r_1, \ldots, r_{n-1}) < \infty$. Из выпуклости функции $\Phi(e^{t_1}, \ldots, e^{t_n})$ следует, что при любых $r_i > 0$, $R_j > 0$, $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, $\lambda + \mu = 1$ справедливо неравенство

$$\Phi(R_1, \ldots, R_n) \leqslant \lambda \Phi(r_1, \ldots r_{n-1}, R_n^{\frac{1}{\lambda}}) + \mu \Phi(R_1^{\frac{1}{\mu}} r_1^{-\frac{\lambda}{\mu}}, \ldots,$$
$$R_{n-1}^{\frac{1}{\mu}} r_{n-1}^{-\frac{\lambda}{\mu}}, 1) \leqslant \lambda C_\varepsilon(r_1, \ldots, r_{n-1}) + \lambda e^{[\bar{\rho}_n(r_1, \ldots, r_{n-1}) + \varepsilon] \left(\frac{1}{\lambda} \ln R_n\right)^{\alpha\left(\frac{1}{\lambda} \ln R_n\right)}} +$$
$$+ \mu \Phi(R_1^{\frac{1}{\lambda}} r_1^{-\frac{\mu}{\lambda}}, \ldots, R_{n-1}^{\frac{1}{\lambda}} r_{n-1}^{-\frac{\mu}{\lambda}}, 1).$$

Логарифмируя, получим

$$\ln^+ \Phi(R_1, \ldots, R_n) \leqslant [\bar{\rho}_n(r_1, \ldots, r_{n-1}) + \varepsilon] \left(\frac{1}{\lambda} \ln R_n\right)^{\alpha\left(\frac{1}{\lambda} \ln R_n\right)} +$$
$$+ 0(1), \ (R_n \to \infty).$$

Используя (2), заключаем, что

$$\ln^+\Phi(R_1, \ldots, R_n) \leqslant [\bar{\rho}_n(r_1, \ldots, r_{n-1}) + \varepsilon](1+\delta)\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\alpha}(\ln R_n)^{\alpha(\ln R_n)},$$
$$(R_n \to \infty).$$

Следовательно, при любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $r_i > 0$, $R_j > 0$

$$\bar{\rho}(R_1, \ldots, R_{n-1}) \leqslant \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\alpha}[\bar{\rho}(r_1, \ldots, r_{n-1}) + \varepsilon](1+\delta).$$

Пользуясь произвольной малостью чисел ε и δ и устремляя $\lambda \to \to 1$, заключаем, что $\bar{\rho}(r_1, \ldots, r_{n-1}) \equiv \mathrm{const}$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть* $\lim\limits_{r\to\infty}\alpha(r) = 0$. *Тогда гиперповерхность сопряженных* α*-порядков функций класса* $\underline{W}$ *совпадает с границей гипероктанта* $D\{d: d_j \geqslant \bar{\rho}_j\}$, *где числа* $\bar{\rho}_j$ *определены равенством* (1).

Доказательство. Из того, что функция $\Phi(e^{t_1}, \ldots, e^{t_n})$ выпукла относительно переменных $t_1, \ldots, t_n$, вытекает следующее неравенство:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Phi(1, \ldots, e^{t_i}, \ldots, 1) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\Phi(1, \ldots, e^{t_i}, \ldots, 1) \leqslant$$
$$\leqslant \Phi(e^{t_1}, \ldots, e^{t_n}) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Phi(1, \ldots, e^{nt_i}, \ldots, 1).$$

Из (1) следует, что

$$e^{(\bar{\rho}_1-\varepsilon_1)t_1^{\alpha(t_1)}} + \ldots + e^{(\bar{\rho}_n-\varepsilon_n)t_n^{\alpha(t_n)}} \leqslant \Phi(e^{t_1}, \ldots, e^{t_n}) \leqslant$$
$$\leqslant e^{(\bar{\rho}_1+\varepsilon_1)(nt_1)^{\alpha(nt_1)}} + \ldots + e^{(\bar{\rho}_n+\varepsilon_n)(nt_n)^{\alpha(nt_n)}}, \tag{3}$$

причем правое неравенство выполняется асимптотически, а левое — для некоторой последовательности, стремящейся к бесконечности. Так как по условию теоремы $\alpha = \lim\alpha(r) = 0$, то из (2) следует, что $(nt_j)^{\alpha(nt_j)} < (1+\delta)t_j^{\alpha(t_j)}$ для любого $\delta > 0$. Поэтому неравенство (3) показывает, что $(\bar{\rho}_1, \ldots, \bar{\rho}_n) \in S_\rho$. Теорема доказана.

Будем в дальнейшем рассматривать в качестве функции $\Phi(r)$ функцию $\ln^+M(r)$, где $M(r)$ — максимум модуля целой функции $f(z)$ на полицилиндре $|z_j| \leqslant r_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Пусть $\varphi(t)$ — единственное при $t > t_0$ решение уравнения

$$t = r^{\alpha(r)}.$$

Теорема 2. *Для того чтобы положительные числа* $\rho_1, \ldots, \rho_n$ *образовывали систему сопряженных* α*-порядков,* $\alpha > 0$ *целой функции*

$$f(z) = \sum_{\|k\|=0}^{\infty} c_k z^k,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{\|k\| \to \infty}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i \varphi(\ln k_i)}{\rho_i^{1/\alpha}} \right\} [-\ln |c_k|]^{-1} = 1.$$

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 2. *Для того чтобы точка* $(b_1, \ldots, b_n)$ *принадлежала множеству* D_ρ^0 *внутренних точек множества* D_ρ, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim_{\|k\| \to \infty}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i \varphi(\ln k_i)}{b_i^{1/\alpha}} \right\} [-\ln |c_k|]^{-1} < 1.$$

Доказательство. *Необходимость.* Так как $(b_1, \ldots, b_n) \in D_\rho^0$, то для некоторого $\varepsilon > 0$ будет принадлежать D_ρ^0 и точка $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i = (1-\varepsilon)^\alpha b_i$.

По известному неравенству для коэффициентов степенного разложения имеем

$$|c_k| \leqslant \frac{M(r)}{\prod_{i=1}^{n} r_i^{k_i}}.$$

Считая $\| k \|$ достаточно большим, положим $\ln r_j = \varphi\left(\frac{1}{a} \ln k_j\right)$. Так как тогда имеем $(\ln r_j)^{\alpha (\ln r_j)} = \frac{1}{a} \ln k_j$, то получим асимтотическое неравенство

$$|c_k| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \exp \left\{ e^{\ln k_j} - k_j \varphi\left(\frac{1}{a} \ln k_j\right) \right\}.$$

Из этой оценки следует

$$\lim_{\|k\| \to \infty} \frac{-\ln |c_k|}{\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i \varphi(\ln k_i)}{a_i^{1/\alpha}}} \geqslant \lim_{\|k\| \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[k_i \varphi\left(\frac{1}{a} \ln k_i\right) - k_i \right]}{\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i \varphi(\ln k_i)}{a_i^{1/\alpha}}}.$$

Как известно [1, с. 60], при любом $c > 0$ выполняется соотношение

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\varphi(ct)}{\varphi(t)} = c^{1/\alpha}. \tag{4}$$

Учитывая это, заключаем, что

$$\varliminf_{\|k\| \to \infty} (-\ln |c_k|) \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i \varphi(\ln k_i)}{a_i^{1/\alpha}} \right\}^{-1} \geqslant 1.$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{\|k\| \to \infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i \varphi(\ln k_i)}{a_i^{1/\alpha}} \right\} (-\ln |c_k|)^{-1} \leqslant 1,$$

а

$$\varlimsup_{\|k\| \to \infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i \varphi(\ln k_i)}{b_i^{1/\alpha}} \right\} (-\ln |c_k|)^{-1} \leqslant 1 - \varepsilon.$$

Необходимость доказана.

Предположим теперь, что числа $b_1, \ldots, b_n$ удовлетворяют условию

$$\varlimsup_{\|k\| \to \infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i \varphi(\ln k_i)}{b_i^{1/\alpha}} \right\} (-\ln |c_k|)^{-1} < 1.$$

Тогда найдутся такие числа $\varepsilon_1, m_{\varepsilon_1} > 0$, что при $\| k \| \geqslant m_{\varepsilon_1}$ выполняется неравенство

$$|c_k| \leqslant \exp \left\{ - \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i \varphi(\ln k_i)}{(b_i - \varepsilon_1)^{1/\alpha}} \right\}. \tag{5}$$

Если ввести обозначение

$$\mu(r) = \max_{0 \leqslant \|k\| < \infty} |c_k| r_1^{k_1}, \ldots, r_n^{k_n},$$

то при $R_i > r_i$ получится

$$\mu(r) \leqslant M(r) \leqslant \sum_{\|k\|=0}^{\infty} |c_k| r_1^{k_1}, \ldots, r_n^{k_n} =$$

$$= \sum_{\|k\|=0}^{\infty} |c_k| R_1^{k_1}, \ldots, R_n^{k_n} (r_1/R_1)^{k_1}, \ldots, (r_n/R_n)^{k_n} \leqslant \mu(R) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - r_i/R_i}.$$

Если взять $R_i = 2r_i$, то получим неравенство

$$\mu(r) \leqslant M(r) \leqslant \mu(2r) 2^n.$$

Из (5) следует, что справедливо асимптотическое неравенство

$$\mu(r) \leqslant \max_{0 \leqslant \|k\| < \infty} \prod_{i=1}^{n} \exp\left\{-\frac{k_i \varphi(\ln k_i)}{(b_i - \varepsilon_1)^{1/\alpha}} + k_i \ln r_i\right\}.$$

Нам нужно оценить сверху величину

$$I(r_i) = \max_{0 \leqslant k_i < \infty} \left\{-\frac{k_i \varphi(\ln k_i)}{(b_i - \varepsilon_1)^{1/\alpha}} + k_i \ln r_i\right\}. \tag{6}$$

Заметим, что если k_i столь велико, что $\varphi(\ln k_i)/(b_i - \varepsilon_1)^{1/\alpha} > \ln r_i$, то выражение в фигурных скобках в (6) отрицательно. Поэтому $I(r_i) \leqslant \max k_i \ln r_i$, где max берется по остальным значениям k_i. Для этих остальных значений k_i имеем

$$k_i \leqslant \exp\left\{[(b_i - \varepsilon_1)^{1/\alpha} \ln r_i]^{\alpha((b_i - \varepsilon_1)^{1/\alpha} \ln r_i)}\right\},$$

откуда

$$I(r_i) \leqslant \ln r_i \exp\left\{[(b_i - \varepsilon_1)^{1/\alpha} \ln r_i]^{\alpha((b_i - \varepsilon_1)^{1/\alpha} \ln r_i)}\right\}.$$

Учитывая (4), получаем

$$I(r_i) \leqslant \ln r_i \exp\left\{(1+\delta)(b_i - \varepsilon_1)(\ln r_i)^{\alpha(\ln r_i)}\right\}.$$

Таким образом,

$$\mu(r) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \exp\left\{e^{(1+\delta)(b_i - \varepsilon_1)(\ln r_i)^{\alpha(\ln r_i)}} \ln r_i\right\}$$

и, следовательно, асимптотически

$$M(r) < \prod_{i=1}^{n} \exp\left\{e^{(b_i - \varepsilon_2)(\ln r_i)^{\alpha(\ln r_i)}}\right\}.$$

Отсюда заключаем, что $b \in D_\rho^{0'}$. Лемма доказана.

Из леммы 2 известным приемом [2, с. 220] можно получить теорему 2.

Теорема 3. *Для того чтобы гиперповерхность $S \subset R^n$ была гиперповерхностью сопряженных α-порядков для некоторой целой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы образ D^α области D при отображении $a_i' = \frac{1}{a_i^{1/\alpha}}$, $i = 1, \ldots, n$ был полной выпуклой областью.*

Доказательство. Необходимость условий, указанных в теореме, доказывается почти дословным повторением рассуждений, приведенных при доказательстве необходимости в теореме из [3, с. 391].

Докажем достаточность. Пусть гиперповерхность Q вместе с координатными гиперплоскостями служит границей некоторой выпуклой ограниченной области B, расположенной в абсолютном октанте R^n. (Требование ограниченности области B легко снимается с помощью рассуждений, приведенных в [2, с. 222]).

Рассмотрим опорную функцию области:

$$h_B(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \sup_{(b_1, \ldots, b_n) \in \overline{B}} (b_1 \cos\gamma_1 + \ldots + b_n \cos\gamma_n).$$

Рассмотрим далее функцию

$$f(z) = \sum_k c_k z^k,$$

где

$$c_{k_1, \ldots, k_n} = \exp\{-h_B(\gamma_1^{(k_1)}, \ldots, \gamma_n^{(kn)}) \mid k\varphi(\ln k) \mid\};$$

$$\gamma_j^{(k_j)} = \arccos \frac{k_j \varphi(\ln k_j)}{\mid k\varphi(\ln k) \mid}.$$

Из определенной опорной функции вытекает, что для каждой точки $b \in Q$

$$\overline{\lim_{\|k\| \to \infty}} \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i k_i \varphi(\ln k_i)}{-\ln \mid c_k \mid} = \overline{\lim_{\|k\| \to \infty}} \frac{b_1 \cos\gamma_1^{(k_1)} + \cdots + b_n \cos\gamma_n^{(kn)}}{h_B(\gamma_1^{(k_1)}, \ldots, \gamma_n^{(kn)})} \leqslant 1.$$

Так как $h_B(\gamma)$ — опорная функция выпуклой ограниченной области, то для каждой точки $b \in Q$ найдется такое направление $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, что

$$b_1 \cos\gamma_1 + \cdots + b_n \cos\gamma_n = h_B(\gamma).$$

Образуем последовательность векторов k такую, что $\gamma_j^{kj} \to \gamma_j$. Из непрерывности опорной функции $h_B(\gamma)$ вытекает, что

$$\overline{\lim_{\|k\| \to \infty}} \frac{b_1 \cos\gamma_1^{(k_1)} + \cdots + b_n \cos\gamma_n^{(kn)}}{h_B(\gamma_1^{k_1}, \ldots, \gamma_n^{(kn)})} = 1.$$

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность И. В. Островскому за постановку задачи и научное руководство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956. 632 с.
2. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., «Наука», 1971. 430 с.
3. Фукс Б. А. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. М., Физматгиз, 1962. 419 с.
4. Гинзбург Б. Н. О росте целых характеристических функций многомерных вероятностных законов. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 20. Харьков, 1974, с. 38—49.

Поступила 6 февраля 1975 г.