УДК 517.535.4

Е. Д. ФАЙНБЕРГ

О ДЕФЕКТАХ ФУНКЦИЙ, МЕРОМОРФНЫХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ. II

Настоящая статья является продолжением работы [1]. Поэтому мы сохраняем все обозначения из [1]. В частности, $\boldsymbol{m}(r, f)$, $\boldsymbol{N}(r, f)$, $\boldsymbol{T}(r, f)$ — характеристики Цудзи функции $f(z)$, мероморфной в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$; $\rho_T[f]$ — порядок $f(z)$ в смысле Цудзи; $\delta_T(a) = \delta_T(a, f)$ — дефект в смысле Цудзи функции $f(z)$ в точке a; $\delta_N(a) = \delta_N(a, f)$ — дефект в смысле Неванлинны функции $f(z)$ в точке a; $\rho_N[f]$ — порядок $f(z)$ в смысле Неванлинны; E_T и E_N — множества дефектных значений в смысле Цудзи и Неванлинны соответственно (см. [2, с. 38—41]).

Основным результатом работы являются следующие теоремы.

Теорема А. *Пусть* $\{a_\nu\}$ — *произвольная последовательность комплексных чисел и* $\{\delta_\nu\}_1^N$ — *последовательность положительных чисел* ($N \leqslant \infty$), *подчиненных условию* $\sum_{\nu=1}^{N} \delta_\nu \leqslant 1$. *Тогда существует аналитическая в полуплоскости* $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ *функция* $f(z)$ *такая, что* $\delta_N(a_\nu, f) = \delta_T(a_\nu, f) = \delta_\nu$ $(1 \leqslant \nu \leqslant N)$ *и* $\delta_N(a, f) = \delta_T(a, f) = 0$, $a \overline{\in} \{a_\nu\}$.

Теорема В. *Пусть* $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$, *а* M — *произвольное не более чем счетное множество точек расширенной комплексной* *плоскости. Тогда существует мероморфная в полуплоскости* $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ *функция* $f(z)$ *порядка* $\rho_T = \rho_N = \rho$, *множество дефектных значений которой* $E_T(f) = E_N(f)$ *совпадает с* M.

Доказательство этих теорем основано на общем методе А. А. Гольдберга [2, 4, 5] (см. также [3]). В случае $0 < \rho < \infty$ теорема В была доказана в [1], в случае $\rho = \infty$ эта теорема следует из теоремы А. Мы приводим здесь доказательства обеих теорем только для характеристик Цудзи.

1. Доказательство теоремы А. Наши рассуждения близки к доказательству соответствующей теоремы для целых функций [3, с. 125—139]. Пусть $f(z)$ — функция Хеймана и Фукса. Рассмотрим эту функцию в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$. Покажем сначала, что

$$\delta_T(a_\nu, f) \geqslant \delta_\nu, \ \delta_T(0, f(z) - z) \geqslant 1 - \sum_\nu \delta_\nu \overset{\text{def}}{=} \delta_0. \tag{1}$$

Для дальнейшего нам потребуется следующий аналог леммы Фукса и Хеймана [3, с. 130—132] (см. также [2, с. 167—169]).

Лемма 1. *Пусть* $\varphi(t)$ — *ограниченная неотрицательная интегрируемая на каждом сегменте* $0 \leqslant t \leqslant r$ *функция такая, что существует конечный предел*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{r} \int_0^r \varphi(t)\, dt = l.$$

Тогда

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\arcsin \frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{2}} e^{r \sin\theta \cos\theta} \varphi(r \sin^2\theta) \frac{d\theta}{\sin^2\theta} = \frac{l + 0(1)}{\sqrt{\pi r}} e^{r/2}, \ r \to \infty. \tag{2}$$

Очевидно, что

$$\int_{\arcsin \frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{2}} e^{r \sin\theta \cos\theta} \varphi(r \sin^2\theta) \frac{d\theta}{\sin^2\theta} =$$

$$= e^{\frac{r}{2}} \left[\int_{\arcsin \frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4} - r^{-1/3}} e^{-r \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)} \frac{\varphi(r \sin^2\theta)}{\sin^2\theta} d\theta + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{\pi}{4} - r^{-1/3}}^{\frac{\pi}{4} + r^{-1/3}} + \int_{\frac{\pi}{4} + r^{-1/3}}^{\frac{\pi}{2}} \right] = e^{\frac{r}{2}} (I_1 + I_2 + I_3). \tag{3}$$

Так как $\varphi(r\sin^2\theta)=O(1)$, имеем

$$I_1=O(re^{-r^{1/3}});\quad I_3=O(e^{-r^{1/3}}). \tag{4}$$

Интеграл I_2 вычислим следующим образом (ср. [2, с. 167—168]; [3, с. 130—132]):

$$I_2=\int\limits_{\frac{\pi}{4}-r^{-1/3}}^{\frac{\pi}{4}+r^{-1/3}} e^{-r\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}\frac{\varphi(r\sin^2\theta)}{\sin^2\theta}\,d\theta=$$

$$=\sin^{-2}\xi\int\limits_0^{r^{-1/3}} e^{-r\sin^2\tau}\left[\varphi\left(r\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\tau\right)\right)+\varphi\left(r\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\tau\right)\right)\right]d\tau,$$

где $\frac{\pi}{4}-r^{-1/3}<\xi<\frac{\pi}{4}+r^{-1/3}$.

Пусть

$$\Phi(\tau)=\frac{e^{-r\sin^2\tau}}{r\cos\tau},\ \Psi(\tau)=\int\limits_{r\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\tau\right)}^{r\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\tau\right)}\varphi(t)\,dt.$$

Заметим, что $\Phi'(\tau)<0$ при $0\leqslant\tau\leqslant r^{-1/3}$ и достаточно больших r, а также, что $\Psi(\tau)=[l+0(1)]\,r\sin 2\tau$ в силу условия леммы и того, что $r\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\tau\right)\geqslant\frac{1}{4}r$ и $r\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\tau\right)\geqslant\frac{r}{2}$ при $r\to\infty$ равномерно относительно τ. Поэтому

$$I_2=\sin^{-2}\xi\int\limits_0^{r^{-1/3}}\Phi(\tau)\,d\Psi(\tau)=$$

$$=\sin^{-2}\xi\left\{O([l+0(1)]\,\Phi(\tau)\,r\sin 2\tau)\Big|_0^{r^{-1/3}}-\right.$$

$$\left.-[l+0(1)]\int\limits_0^{r^{-1/3}}\Phi'(\tau)\,r\sin 2\tau\,d\tau\right\}=\sin^{-2}\xi\left\{O(r^{-1/3}e^{-r^{1/3}})+\right.$$

$$\left.+2[l+0(1)]\int\limits_0^{r^{-1/3}}e^{-r\sin^2\tau}\,d\tau\right\}.$$

Нетрудно показать (ср. [2, с. 167—168]), что

$$\int\limits_0^{r^{-1/3}}e^{-r\sin^2\tau}\,d\tau=[1+O(1)]\,\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{r}}. \tag{5}$$

Учитывая, что $\sin^{-2}\xi=2+\varepsilon(r)$, где $\varepsilon(r)\to 0$ при $r\to\infty$, и соотношения (3) — (5), получаем (2). Лемма доказана.

$0<\varepsilon<\delta\}$ выполняется $|\varphi(z\ln^2 z;\ \theta, \delta)| \geqslant \frac{1}{2} e^{|z \ln^2 z| \sin \varepsilon} \geqslant \frac{1}{2} e^{r \ln^2 r \sin \varepsilon}$. Кроме того, если исключить некоторую последовательность кругов с центрами в полюсах функции $\varphi(z\ln^2 z;\ \theta, \delta)$ и стремящимися к нулю радиусами, то в области $\{z: |\arg(z\ln^2 z) - (\theta+\pi)| < \pi - \varepsilon - \delta\} \bigcap \{z: 0<\arg z<\pi\}$ справедлива оценка $|\varphi(z\ln^2 z;\ \theta, \delta)| < A(\varepsilon) < \infty$, где $A(\varepsilon)$ не зависит от θ и δ. Полюсы p_n функции $\varphi(z\ln^2 z;\ \theta, \delta)$ находятся в точках $z\ln^2 z e^{-i\theta} = \frac{2n+1}{2\cos\delta}\pi$. Нетрудно проверить, что $\arg p_n \to \infty$ при $r \to \infty$.

Оценка $|\varphi(z\ln^2 z;\ \theta, \delta)| \leqslant A$ справедлива и в области $|z| < 10^{-2}$; следовательно, ряды $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ сходятся абсолютно и равномерно в каждой конечной подобласти области $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$. Так как $\boldsymbol{T}(r, \varphi_k(z\ln^2 z)) \leqslant \frac{C}{2^{|k|}} \ln^2 r$, то $\boldsymbol{T}(r, \psi_j(z\ln^2 z)) \leqslant C_1 \ln^2 r + O(\ln r)$, $\boldsymbol{T}(r, \psi_2 + z) \leqslant C_1 \cdot \ln^2 r + O(\ln r)$. С другой стороны, $\boldsymbol{m}(r, a_\nu, F) \geqslant C(\nu) \ln^2 r$. Это означает, что $\delta_T(a_\nu, F) > 0$, $\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots$, т. е. $M \subset E_T(F)$. Так же, как это было сделано в [1], можно доказать, что $\delta_T(a, F) = 0$, если $a \overline{\in} M$. При этом мы используем тот факт, что угол вида $|\arg z - \theta_k| < \delta_k - \varepsilon$ вносит вклад только в $\delta(a_k, F)$, а углы $0 < \arg z < \frac{5\pi}{16}$ и $\frac{11\pi}{16} < \arg z < \pi$ могут вносить вклад только в $\delta_T(0, F)$, а также то, что $0 \in M$ и, следовательно, $\delta_T(0, F) > 0$.

Аналогичным образом доказывается, что $E_N = M$. Очевидно, что функция $F(z)$ имеет порядок $\rho_N = \rho_T = 0$.

Автор выражает благодарность И. В. Островскому за постановку задачи и внимание к работе и А. А. Гольдбергу за полезное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Файнберг Е. Д. О дефектах функций, мероморфных в полуплоскости.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 25, Харьков, 1976, с. 120—131.
2. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970. 591 с.
3. Хейман У. Мероморфные функции. М., «Мир», 1966. 287 с.
4. Гольдберг А. А. О дефектах мероморфных функций. — ДАН СССР, 1954, т. 98, с. 893—895.
5. Гольдберг А. А. О множестве дефектных значений мероморфных функций конечного порядка.— «Укр. мат. журн.», 1959, т. 11, с. 438—443.

Поступила 16 июня 1974 г.