УДК 517.535.4

Е. Д. ФАЙНБЕРГ

О ДЕФЕКТАХ ФУНКЦИЙ, МЕРОМОРФНЫХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ. II

Настоящая статья является продолжением работы [1]. Поэтому мы сохраняем все обозначения из [1]. В частности, $\boldsymbol{m}(r, f)$, $\boldsymbol{N}(r, f)$, $\boldsymbol{T}(r, f)$ — характеристики Цудзи функции $f(z)$, мероморфной в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$; $\rho_T[f]$ — порядок $f(z)$ в смысле Цудзи; $\delta_T(a) = \delta_T(a, f)$ — дефект в смысле Цудзи функции $f(z)$ в точке a; $\delta_N(a) = \delta_N(a, f)$ — дефект в смысле Неванлинны функции $f(z)$ в точке a; $\rho_N[f]$ — порядок $f(z)$ в смысле Неванлинны; E_T и E_N — множества дефектных значений в смысле Цудзи и Неванлинны соответственно (см. [2, с. 38—41]).

Основным результатом работы являются следующие теоремы.

Теорема А. *Пусть* $\{a_\nu\}$ — *произвольная последовательность комплексных чисел и* $\{\delta_\nu\}_1^N$ — *последовательность положительных чисел* ($N \leqslant \infty$), *подчиненных условию* $\sum_{\nu=1}^{N} \delta_\nu \leqslant 1$. *Тогда существует аналитическая в полуплоскости* $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ *функция* $f(z)$ *такая, что* $\delta_N(a_\nu, f) = \delta_T(a_\nu, f) = \delta_\nu$ $(1 \leqslant \nu \leqslant N)$ *и* $\delta_N(a, f) = \delta_T(a, f) = 0$, $a \overline{\in} \{a_\nu\}$.

Теорема В. *Пусть* $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$, *а* M — *произвольное не более чем счетное множество точек расширенной комплексной* *плоскости. Тогда существует мероморфная в полуплоскости* $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ *функция* $f(z)$ *порядка* $\rho_T = \rho_N = \rho$, *множество дефектных значений которой* $E_T(f) = E_N(f)$ *совпадает с* M.

Доказательство этих теорем основано на общем методе А. А. Гольдберга [2, 4, 5] (см. также [3]). В случае $0 < \rho < \infty$ теорема В была доказана в [1], в случае $\rho = \infty$ эта теорема следует из теоремы А. Мы приводим здесь доказательства обеих теорем только для характеристик Цудзи.

1. Доказательство теоремы А. Наши рассуждения близки к доказательству соответствующей теоремы для целых функций [3, с. 125—139]. Пусть $f(z)$ — функция Хеймана и Фукса. Рассмотрим эту функцию в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$. Покажем сначала, что

$$\delta_T(a_\nu, f) \geqslant \delta_\nu,\ \ \delta_T(0, f(z) - z) \geqslant 1 - \sum_\nu \delta_\nu \overset{\mathrm{def}}{=} \delta_0. \tag{1}$$

Для дальнейшего нам потребуется следующий аналог леммы Фукса и Хеймана [3, с. 130—132] (см. также [2, с. 167—169]).

Лемма 1. *Пусть* $\varphi(t)$ — *ограниченная неотрицательная интегрируемая на каждом сегменте* $0 \leqslant t \leqslant r$ *функция такая, что существует конечный предел*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{r} \int_0^r \varphi(t)\, dt = l.$$

Тогда

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\arcsin \frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{2}} e^{r \sin\theta \cos\theta} \varphi(r \sin^2\theta) \frac{d\theta}{\sin^2\theta} = \frac{l + 0(1)}{\sqrt{\pi r}} e^{r/2},\ \ r \to \infty. \tag{2}$$

Очевидно, что

$$\int_{\arcsin \frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{2}} e^{r \sin\theta \cos\theta} \varphi(r \sin^2\theta) \frac{d\theta}{\sin^2\theta} =$$

$$= e^{\frac{r}{2}} \left[\int_{\arcsin \frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4} - r^{-1/3}} e^{-r \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)} \frac{\varphi(r \sin^2\theta)}{\sin^2\theta} d\theta + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{\pi}{4} - r^{-1/3}}^{\frac{\pi}{4} + r^{-1/3}} + \int_{\frac{\pi}{4} + r^{-1/3}}^{\frac{\pi}{2}} \right] = e^{\frac{r}{2}} (I_1 + I_2 + I_3). \tag{3}$$

Так как $\varphi(r\sin^2\theta) = O(1)$, имеем

$$I_1 = O(re^{-r^{1/3}}); \quad I_3 = O(e^{-r^{1/3}}). \tag{4}$$

Интеграл I_2 вычислим следующим образом (ср. [2, с. 167—168]; [3, с. 130—132]):

$$I_2 = \int\limits_{\frac{\pi}{4}-r^{-1/3}}^{\frac{\pi}{4}+r^{-1/3}} e^{-r\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)} \frac{\varphi(r\sin^2\theta)}{\sin^2\theta}\,d\theta =$$

$$= \sin^{-2}\xi \int\limits_0^{r^{-1/3}} e^{-r\sin^2\tau}\left[\varphi\left(r\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\tau\right)\right) + \varphi\left(r\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\tau\right)\right)\right] d\tau,$$

где $\frac{\pi}{4} - r^{-1/3} < \xi < \frac{\pi}{4} + r^{-1/3}$.

Пусть

$$\Phi(\tau) = \frac{e^{-r\sin^2\tau}}{r\cos\tau}, \quad \Psi(\tau) = \int\limits_{r\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\tau\right)}^{r\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\tau\right)} \varphi(t)\,dt.$$

Заметим, что $\Phi'(\tau) < 0$ при $0 \leqslant \tau \leqslant r^{-1/3}$ и достаточно больших r, а также, что $\Psi(\tau) = [l + 0(1)]\, r\sin 2\tau$ в силу условия леммы и того, что $r\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\tau\right) \geqslant \frac{1}{4}r$ и $r\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\tau\right) \geqslant \frac{r}{2}$ при $r \to \infty$ равномерно относительно τ. Поэтому

$$I_2 = \sin^{-2}\xi \int\limits_0^{r^{-1/3}} \Phi(\tau)\,d\Psi(\tau) =$$

$$= \sin^{-2}\xi \left\{ O([l + 0(1)]\,\Phi(\tau)\, r\sin 2\tau)\Big|_0^{r^{-1/3}} - \right.$$

$$\left. - [l + 0(1)] \int\limits_0^{r^{-1/3}} \Phi'(\tau)\, r\sin 2\tau\, d\tau \right\} = \sin^{-2}\xi \left\{ O(r^{-1/3}e^{-r^{1/3}}) + \right.$$

$$\left. + 2[l + 0(1)] \int\limits_0^{r^{-1/3}} e^{-r\sin^2\tau}\,d\tau \right\}.$$

Нетрудно показать (ср. [2, с. 167—168]), что

$$\int\limits_0^{r^{-1/3}} e^{-r\sin^2\tau}\,d\tau = [1 + O(1)]\,\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{r}}. \tag{5}$$

Учитывая, что $\sin^{-2}\xi = 2 + \varepsilon(r)$, где $\varepsilon(r) \to 0$ при $r \to \infty$, и соотношения (3) — (5), получаем (2). Лемма доказана.